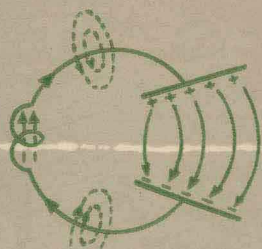
電磁振蕩與電磁波

江　理編著



大光出版社出版

電磁振蕩與電磁波

江　理編著

大光出版社出版

電磁振蕩與電磁波

編著者：江理
出版者：大光出版社
香港北角馬寶道64號
承印者：立信印刷公司
九龍新蒲崗伍芳街23號

一九七〇年十月版　H. K. $2.00

目　　錄

第一章　電磁振蕩

電路中電荷和電流的周期性變化稱爲電磁振蕩。產生電磁振蕩的電路稱爲振蕩電路。任何電荷或電流的振蕩能向其周圍發射電磁波，振蕩中的共振現象可用來接收電磁波，因而了解電磁振蕩的基本性質是研究電磁波的發射和接收所必需的。本章的主要內容是討論自由電磁振蕩、受迫電磁振蕩、電共振現象以及簡單的電子管振蕩器振蕩的產生過程和基本特性。

自由電磁振蕩

在一個含有電容器C和自感線圈L的電路中，用電源將電容器充電之後，撤去電源，再使電容器和自感線圈相連接。圖1.1(a)表示充電後的電容器剛和自感線圈連接時的情況。電容器的兩板上帶有等量異號的電荷，在電容器開始放電前的瞬間，電路中沒有電流，電路中的能量爲集中在電容器兩板間的電場能量。如圖所示，由於A板的電位高於B板，電路處於電的不平衡狀態，電容器向自感線圈放電，電流在自感線圈內激起磁場。按法拉第電磁感應定律，自感線圈內磁通量的變化，立即在線圈迴路中激起一感應電動勢，

來反抗電流的增大，因此電路中的電流不是立刻達到最大值而是逐漸地增大。在放電過程中，電容器兩板上的荷電量逐漸減少，電流逐漸增加，一直到兩板上的電荷全部消失；此時電路中的電流達最大值，電容器兩板間的電場能量全部轉換爲線圈內的磁場能量，如圖 1.1(*b*)所示。

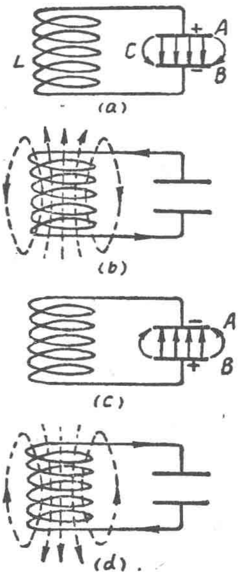


圖 1.1 無阻尼自由振蕩

當電流達到最大值、電容器兩板上已無電荷時，電流並不立即停止，而是逐漸減小並沿着原方向〔見圖 1.1(*b*)〕繼續流動使電容器作反方向充電（使B板帶正電，A板帶負電）。這是因爲在電流減小的過程中，線圈內的磁場減弱，按法拉第電磁感應定律，在線圈迴路中立即激起一感應電動勢來反抗電流的減小，因而維持了電流的繼續流動。

隨着電容器兩板上電荷的增加，電流逐漸減弱。這過程一直延續到電路中的電流變爲零，此時兩板上電荷達最大值，磁場能量又全部轉換爲電場能量，如圖 1.1(*c*)所示。

而後又是電容器向線圈放電，電容器兩板上電荷又減少，電路中電流又增加，進行的過程恰與第一階段相反。一直到兩板上荷電量爲零，電路中電流達最大，電場能量又全部轉換爲磁場能量，如圖 1.1(d) 所示。

繼而電容器又被充電。當電路中電流減小到零時，電容器兩板上電荷積累到最大值，回復到原始狀態，如圖 1.1(a)。這樣就完成了一個完全的振蕩過程。

可以看出，在含有電容和自感的電路中，電荷和電流都隨時間作周期性變化；電場能量和磁場能量亦隨時間作周期性變化並不斷轉換着——電能轉換爲磁能，磁能又轉換爲電能。如果在振蕩過程中沒有任何能量耗散，那麼電荷和電流的周期性變化將無限地繼續下去，這種振蕩稱爲無阻尼自由振蕩。

事實上，任何電路都存在導線的電阻，電路中的電磁能量不可避免地要轉變爲焦耳熱而被消耗，振蕩很快衰減。這種振蕩稱爲阻尼自由振蕩。下面我們定量地討論阻尼自由振蕩中電荷和電流的變化規律。

設振蕩電路(1.2圖)中在某時刻的電流强度爲 I，按歐姆定律可得到方程式

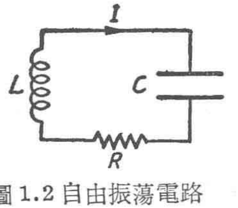


圖 1.2 自由振蕩電路

$$\frac{q}{C}+RI=-L\frac{dI}{dt}, \qquad (1.1)$$

式中$\frac{q}{C}$爲電容器兩板的電位差，RI爲電阻兩端的電位差，$-L\frac{dI}{dt}$爲自感線圈上的感應電動勢。

因爲 $$I=\frac{dq}{dt},$$

對時間 t 微分，得 $$\frac{dI}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2},$$

代入式（1.1），得

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0, \qquad (1.2)$$

該方程稱爲阻尼自由振蕩電路的振蕩方程。

無阻尼自由振蕩 設振蕩電路中的電阻很小，以致可以略去，即 $R=0$，這時電路中的電振蕩爲無阻尼自由振蕩。方程（1.2）簡化爲

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}q. \qquad (1.3)$$

令$\frac{1}{LC}=\omega_0^2$並代入上式，得

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-\omega_0^2q,$$

該方程稱爲無阻尼自由振蕩方程〔可與機械振動中的諧振動方程（見程守洙、江之永等改編"普通物理學"第一册93頁）相比〕。該微分方程的解爲

$$q=q_0\cos(\omega_0t+\varphi)。 \qquad (1.4)$$

式中 q_0 和 φ 是兩個積分常數，q_0 是振蕩過程中電容器上的最大荷電量，稱爲電荷振幅；φ 是開始時刻的周相，稱爲初相，它的值决定於我們開始計算時間那一時刻電容器板上所荷的電量。ω_0 稱爲振蕩的圓頻率，它和振蕩頻率 v_0 的關係爲 $v_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$，和振蕩周期 T 的關係爲 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$. 只要回憶一下普通物理學機械振動中的諧振動方程，這些量的意義就更加清楚了。

將式（1.4）對時間微分，就得到電路中任意時刻的電流强度爲

$$I=\frac{dq}{dt}=-\omega_0 q_0\ \sin(\omega_0 t+\varphi)=-I_0\ \sin(\omega_0 t+\varphi). \tag{1.5}$$

式中 $I_0(=\omega_0 q_0)$ 爲電流的最大值，稱爲電流强度振幅。

從方程（1.4）、（1.5）可以看出無阻尼自由振蕩的特點是：

(1) 電荷和電流都隨時間作周期性變化，如電荷以餘弦規律變化，則電流以正弦規律變化。二者在周相上差 $\frac{\pi}{2}$ 或時間上差四分之一周期，即電容器兩板積累電荷至最大時，電路中的電流爲零；電路中電流最大時，板上電荷爲零。電荷和電流的變化情況如圖 1.3 所示。在振蕩過程中，如果電流振幅和電荷振幅保持不變，這種振蕩就屬於等幅振蕩。

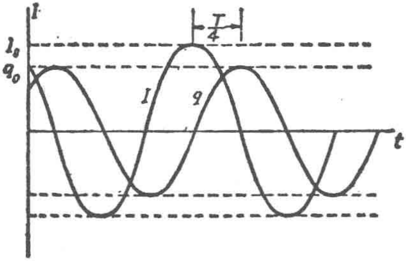


圖 1.3 無阻尼自由振蕩中的電荷和電流隨時間的變化

(2) 無阻尼自由振蕩的頻率 $v_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 完全由電路本身的性質 (L、C 的值) 所決定。電路中的自感和電容越大，頻率就越低。要提高電路的振蕩頻率就必須減小自感和電容。

(3) 振蕩過程中的能量轉換關係：任意時刻電容器內的電場能量和自感線圈內的磁場能量分別爲

$$W_e=\frac{q^2}{2C}=\frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

和

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{L\omega_0^2 q_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi)。$$

將兩式相加得總能量

$$W=W_e+W_m=\frac{q_0^2}{2C},$$

在無阻尼自由振蕩過程中，電場能量和磁場能量都隨時間變化。電場能量增加時，磁能減少；磁場能量增加時，電能減少。電場能和磁場能不斷相互轉換，但總能量保持不變。

阻尼自由振蕩　在阻尼自由振蕩中，電荷和電流隨時間變化的規律可從自由振蕩方程（1.2）解得爲

$$q=q_0e^{-\delta t}\ \cos(\omega t+\varphi) \tag{1.6}$$

和

$$I=-I_0e^{-\delta t}\ \sin(\omega t+\varphi'), \tag{1.7}$$

式中 $\delta=\frac{R}{2L}$ 稱爲阻尼系數，$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$ 稱爲振蕩圓頻率。

從方程（1.6）、（1.7）可以看出阻尼自由振蕩的主要特點是：

(1) 電荷和電流隨時間作周期性變化。但振幅 $q_0e^{-\delta t}$、$I_0e^{-\delta t}$ 都將隨時間而作指數衰減。電路中電阻越大，即阻尼系數 $\delta=\frac{1}{2L}$ 越大，則衰減越快。

(2) 阻尼振蕩的頻率 $v=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$. 與無阻尼時的頻率 $v_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 比較，可見阻尼自由振蕩的頻率比無阻尼時要低些。

(3) 有阻尼時，振蕩的產生是有條件的。因爲振蕩頻率必須爲實數，所以在頻率的關係式中根號內的數值必定大於零，即 $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0$ 或 $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$. 否則振蕩不能產生。當 R 遠小於 $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 時，振蕩衰減緩慢；R 略小於 $2\sqrt{\frac{L}{C}}$

時，振蕩雖能產生，但很快衰落；當 R 比 $2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 大時，振蕩還沒有完成一周，電磁能量已全部消耗於電阻的焦耳熱，振蕩不能產生。圖 1.4 表示幾種不同阻尼的電流振蕩情況。

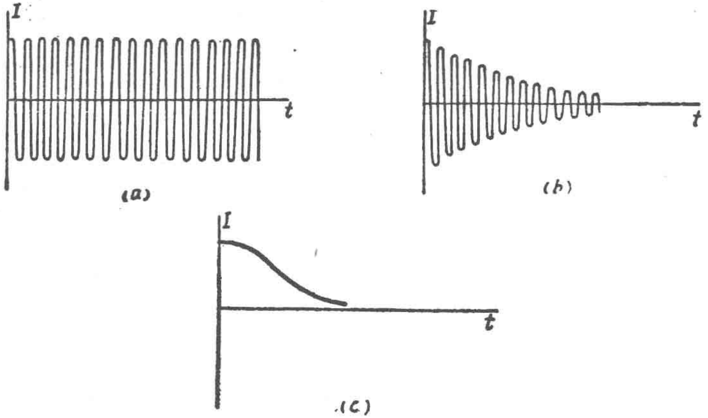


圖 1.4 阻尼自由振蕩中的電流隨時間而變化

（a）R遠小於 $2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$；（b）R 略小於 $2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$；

（c）R 大於 $2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

令 $\dfrac{1}{LC}=\omega_0$、$\dfrac{R}{L}=2\delta$ 代入方程(1.2)得

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\delta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0. \qquad (*)$$

設方程（*）的解為

$$q=e^{-\delta t}Q(t),$$

對 t 微分，得

$$\frac{dq}{dt}=(-\delta)e^{-\delta t}Q+e^{-\delta t}\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}=(-\delta)\left(-\delta e^{-\delta t}Q+e^{-\delta t}\frac{dQ}{dt}\right)+$$

$$\left(-\delta e^{-\delta t}\frac{dQ}{dt}+e^{-\delta t}\frac{d^2Q}{dt^2}\right),$$

代入方程（*），得

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=-(\omega_0^2-\delta^2)Q.$$

再令$\omega_0^2-\delta^2=\omega^2$，代入上式，得

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=-\omega^2Q,$$

與無阻尼自由振蕩方程比較，即知其解爲

$$Q=q_0\cos(\omega t+\varphi).$$

因此得到阻尼自由振蕩時電荷變化規律爲

$$q=q_0e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

電流强度

$$I=\frac{dq}{dt}=-q_0e^{-\delta t}[\delta\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)].$$

令 $$\frac{\delta}{\sqrt{\omega^2+\delta^2}}=\sin\varphi'',\quad\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\delta^2}}=\cos\varphi'',$$

則 $$I=-q_0e^{-\delta t}\sqrt{\omega^2+\delta^2}[\sin\varphi''\cos(\omega t+\varphi)+\cos\varphi''\sin(\omega t+\varphi)]$$

$$=-I_0e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi+\varphi'')$$

$$=-I_0e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi'),$$

式中 $I_0=q_0\sqrt{\omega^2+\delta^2}=q_0\omega_0$, $\varphi''=\sin^{-1}\dfrac{\delta}{\sqrt{\omega^2+\delta^2}}$,

$\varphi'=\varphi+\varphi''$.

受迫電磁振蕩

在阻尼自由振蕩中，由於電磁能量的損失，振幅逐漸衰減。如果在電路中有周期性變化的電動勢繼續不斷地供給能量，那麽振幅就可以維持不變。這種在周期性電動勢繼續作用下產生的振蕩稱爲受迫振蕩。

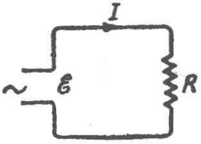


圖 1.5 純電阻受迫振蕩電路

純電阻電路 有一個純電阻電路，在電阻R兩端加上一交變電動勢 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\sin\omega t$，如圖1.5所示。式中$\mathcal{E}_0$爲電動勢的振幅，$\omega$爲電動勢的圓頻率，設任意時刻流過電阻的電流爲 I，按歐姆定律，電阻兩端的電位差（注意：以後也稱電壓）應等於電源的電動勢（略去電源內阻），即

$$V_R=\mathcal{E}.$$

將電阻兩端的電位差 $V_R=IR$ 和電動勢 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\sin\omega t$ 代入上式，得

$$IR=\mathcal{E}_0\sin\omega t.$$

流過電阻的電流强度

$$I=\frac{\mathcal{E}_0}{R}\sin\omega t=I_0\sin\omega t, \qquad (1.8)$$

可見，當以正弦規律變化的電動勢加於電阻兩端時，流過電

阻的電流也按正弦規律變化，電流和電動勢的頻率相等、周相相同，電流的振幅等於電動勢的振幅除以電阻值，即

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \tag{1.9}$$

流過電阻的電流和電動勢隨時間變化規律如圖1.6所示。

必須指出，當電阻 R 上有正弦交變電流流過時，那麽在電阻兩端的電壓（即電位差）也按正弦規律變化，電壓與電阻上的交變電流同頻率、同周相，電壓振幅等於電流振幅乘以電阻值，即 $V_{0R}=I_0R$.

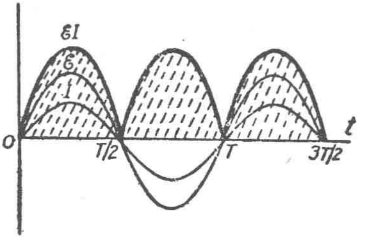


圖1.6 純電阻受迫振蕩電路中的電動勢、電流和電源輸出功率隨時間變化

電源的輸出功率等於電源電動勢 $\mathcal{E}$ 和電流 I 的乘積。在零到二分之一周期之間，電動勢和電流都是正值，功率 $\mathcal{E}I$ 爲正；在二分之一到一周期之間，電動勢和電流都是負值，功率仍爲正。圖 1.6 中的粗線表示電源供給外電路的功率 $\mathcal{E}I$ 隨時間變化的情況。所以在整個周期內電源都作正功（圖 1.6 陰影部分），亦即電源在整個周期都是輸出能量，這能量消耗於焦耳熱。這就是流過電阻的電流稱爲有功電流的原因。

在機械振動中，可以用振幅矢量圖方法來描寫質點的振動（見程守洙、江之永改編"普通物理學"第一冊 95 頁）。與機械振動相類似，在交流電理論中也引入矢量圖方法來描

寫電振動。這種方法有如下述：如果我們要表示依正弦變化的電動勢 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\sin\omega t$，將電動勢振幅 $\mathcal{E}_0$ 按某一方便的比例作一矢量，並設想此矢量繞 O 點以勻角速度 ω 沿逆時針方向旋轉。設 $t=0$ 時矢量在水平位置，則任意時刻 t，矢量和水平軸的夾角 $\theta=\omega t$。這樣，振幅（$\mathcal{E}_0$）的矢量在任何時刻沿鉛垂軸上的分量爲 $\mathcal{E}_0\sin\omega t$，即我們所要描寫的電動勢。

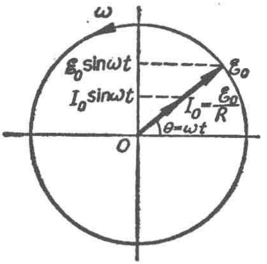


圖1.7純電阻受迫振蕩電路中的電動勢和電流的振蕩幅矢量圖

同樣地，通過電阻 R 的交變電流 $I=I_0\sin\omega t$ 也可用矢量圖來表示。將電流振幅 I_0 取一方便的比例作一矢量，因爲電流和電動勢同周相，所以電流振幅矢量和電動勢振幅矢量是重合的（圖1.7）.任意時刻電流振幅矢量沿鉛垂軸的分量爲 $I_0\sin\omega t$，即我們所要描寫的通過電阻的交變電流。

必須說明，振幅矢量圖法僅僅是一種描寫方法，决不能認爲在交流電中電動勢或電流强度振幅是在旋轉着的。

純電容電路 有一個純電容電路，當電容器兩端接上電池（電動勢爲定值）時，電容器被充電，在短時間內電路中有電流。若將已充電的電容器的兩板用導線連接，則電容器通過導線放電。如將電容器的兩端接上一交變電動勢（圖

1.8)，則電容器產生周期性的充電和放電。

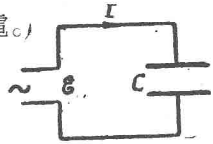


圖 1.8 純電容受迫振蕩電路

假定電路中的電阻很小，以致可以略去，則任意時刻電容器兩端的電位差等於電源的電動勢

$$V_C=\mathcal{E}.$$

電容器兩端的電位差等於板上所帶電量除以電容值，即

$$V_C=\frac{q}{C}.$$

設電動勢 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0 \sin\omega t$，代入上式後得到

$$q=C\mathcal{E}_0 \sin\omega t.$$

將電量 q 對時間 t 微分一次就得電路中的電流强度（通常稱爲"流過"電容器的電流强度）

$$I=\frac{dq}{dt}=C\omega\,\mathcal{E}_0 \cos\omega t=\frac{\mathcal{E}_0}{\frac{1}{C\omega}}\sin\left(\omega t=+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$=I_0 \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right), \quad (1.10)$$

此處 I_0 爲電流强度振幅

$$I_0=\frac{\mathcal{E}_0}{\frac{1}{C\omega}} \quad (1.11)$$

可以看出，當按正弦規律變化的電動勢加於電容器兩端時，流過電容器的電流也按正弦規律變化，電流和電動勢的頻率相同，而電流的周相超前電動勢 $\frac{\pi}{2}$ 或在時間上超前四