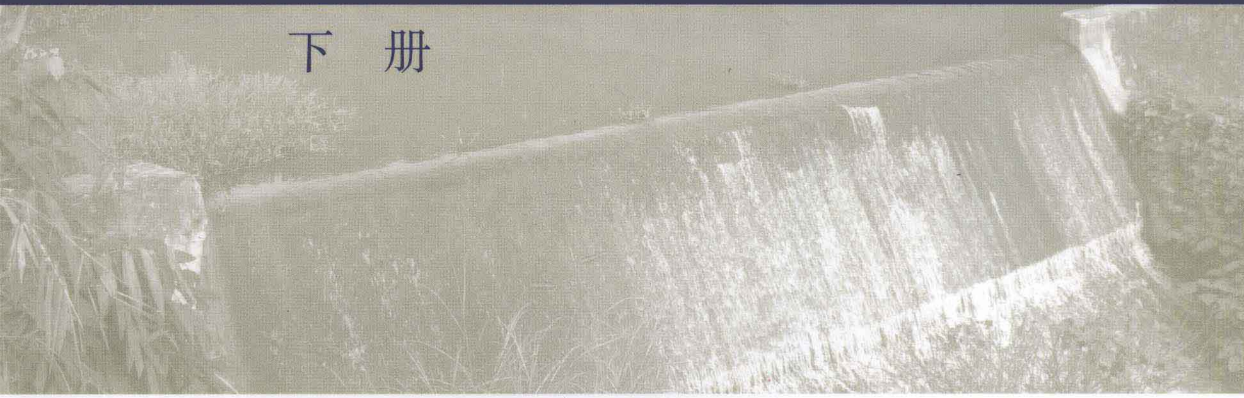
高等学校教材

Calculus
Mathematical model

微积分与数学模型教程

下 册



主 编 魏毅强 副主编 侯红卫

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高

微积分与数学模型教程

Weijifen yu Shuxue Moxing Jiaocheng

下册

主　编　魏毅强
副主编　侯红卫

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书注重通过应用实例引入与认识概念，通过加强数学建模与数学实验的教学内容以促进学生知识、能力和素质的融合。下册内容分五章，包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程。书末附有利用 MATLAB 解决常见数学问题的相关知识，以期在学习过程中逐步培养和锻炼学生利用计算机解决实际问题的能力，激发学生的学习兴趣。

本书可作为高等学校非数学类专业的数学基础课程教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分与数学模型教程．下册／魏毅强主编．—北京：高等教育出版社，2012.12
ISBN 978-7-04-036320-3

Ⅰ．①微… Ⅱ．①魏… Ⅲ．①微积分－高等学校－教材②数学模型－高等学校－教材 Ⅳ．①O172②O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 240725 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 于丽娜　特约编辑 徐　飞　封面设计 张志奇
版式设计 马敬茹　插图绘制 尹文军　责任校对 胡晓琪　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	21	版　　次	2012 年 12 月第 1 版
字　　数	380 千字	印　　次	2012 年 12 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	30.70 元

物 料 号　36320-00

目　　录

第八章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何是利用代数方法研究几何图形的学科，它是多元函数微积分的基础，向量代数则是讨论空间解析几何的重要工具．本章首先建立空间直角坐标系，引进向量概念，介绍向量运算，然后利用向量工具讨论空间的平面和直线，最后介绍一些常见的空间曲面与空间曲线．

第一节　空间直角坐标系

几何中最基本的元素是点，曲面与曲线看做是点的轨迹．解析几何的基本方法是坐标法，即通过坐标系把几何与代数联系起来，用数表示点，用方程表示空间曲面或曲线，用坐标演算来解决几何问题．为此首先需要建立空间直角坐标系，它是平面直角坐标系的推广．

一、空间直角坐标系的建立

在一直线上取定原点、规定好长度单位和正方向，则此直线就称为一个**数轴**或**坐标轴**，通常用 Ox 表示．这时直线上每一点 P 就可以用一个实数 x 来表示，称 x 为点 P 的**坐标**．

在空间中任取一点 O，过 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点且一般具有相同的长度单位．这三条数轴分别叫做 x **轴**（**横轴**），y **轴**（**纵轴**）与 z **轴**（**竖轴**），统称**坐标轴**．它们的正向符合右手法则，即用右手握住 z 轴，当拇指以外的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，拇指所指方向就是 z 轴的正向．这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$．点 O 叫做**坐标原点**（简称**原点**）．通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线（图 8－1）．

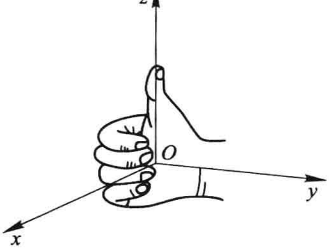


图 8－1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样确定出的三个平面统称为**坐标面**. 由 x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy **面**，由 y 轴与 z 轴及由 z 轴与 x 轴所确定的坐标面分别叫做 yOz **面**与 zOx **面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个**卦限**. 其中含有 x 轴，y 轴与 z 轴正半轴的卦限叫做**第一卦限**，其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向依次确定. 第五至第八卦限在 xOy 面的下方，由第一卦限下面的第五卦限，按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用字母Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示(图 8－2).

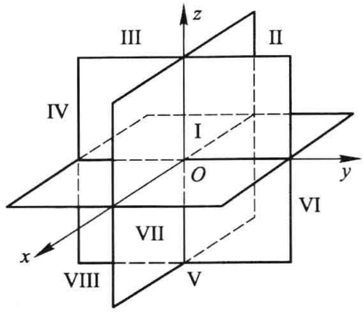


图 8－2

二、空间点的坐标

取定空间直角坐标系 $Oxyz$ 后，就可以建立空间点 M 的坐标.

设 M 为空间中任意一点，过点 M 作三个坐标轴的垂直平面，分别与 x 轴，y 轴，z 轴相交于点 P，Q，R(图 8－3)，它们在各坐标轴上的坐标依次为 x，y，z. 于是空间一点 M 就唯一地确定了一个有顺序的实数组 (x,y,z)，称为点 M 的**坐标**，记为 $M(x,y,z)$，其中 x，y，z 分别称为点 M 的**横坐标**，**纵坐标**，**竖坐标**.

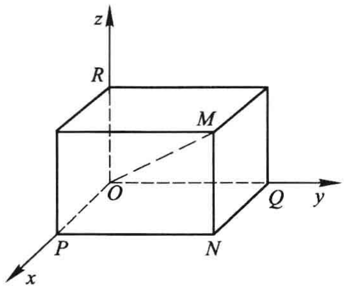


图 8－3

反过来，任意给定了三个有顺序的实数 x，y，z，在 x 轴，y 轴，z 轴上分别作出以 x，y，z 为坐标的点 P，Q，R，过 P，Q，R 分别作出与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，设它们相交于点 M，显然 M 的坐标就是 (x,y,z).

因此，在取定空间直角坐标系后，就建立了空间中的点 M 与有序的实数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系.

特别地，在坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，原点的坐标是 $O(0,0,0)$，xOy 面上点的坐标是 $(x,y,0)$，x 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$.

下面给出两点关于平面对称、直线对称、点对称的含义.

如果连接 P，Q 两点的线段 PQ 与某平面垂直且被其平分，则称 P，Q 两点关于该平面对称；如果线段 PQ 与某直线垂直相交且被其平分，则称 P，Q 关于

该直线对称；如果线段 PQ 通过某点且被其平分，则称 P，Q 关于该点对称. 例如，点 $P(x,y,z)$ 关于 xOy 面的对称点的坐标为 $Q(x,y,-z)$，关于 z 轴的对称点的坐标为 $Q(-x,-y,z)$，关于原点的对称点的坐标为 $Q(-x,-y,-z)$.

三、空间两点间的距离

和平面解析几何一样，可用坐标来计算空间两点间的距离.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1，M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-4). 它的三个边的边长分别是

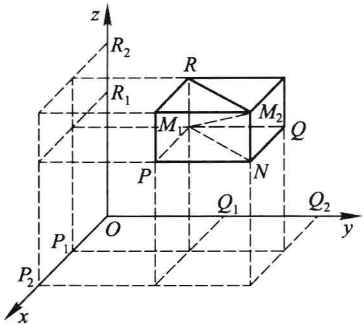


图 8-4

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

这就是**空间两点间的距离**公式.

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

例 1.1　在 y 轴上确定一点 P，使得它与点 $P_0(4,2,2)$ 之间的距离为 $\sqrt{29}$.

解　因为点 P 在 y 轴上，设其坐标为 $P(0,y,0)$，根据题设条件有

$$|P_0P|=\sqrt{29},$$

即

$$\sqrt{4^2+(y-2)^2+2^2}=\sqrt{29}.$$

解得

$$y_1=-1,\ y_2=5.$$

于是点 P 的坐标为 $(0,-1,0)$ 或 $(0,5,0)$.

例 1.2　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$ 和 $C(2,4,3)$，证明：$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

证　根据两点间的距离公式，

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2} = 7\sqrt{2},$$
$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7.$$

因为$|AB| = |AC|$，且$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，所以$\triangle ABC$为等腰直角三角形.

习　题　8.1

1. 求点$P(3,-4,5)$分别关于各坐标面、各坐标轴及原点的对称点的坐标.

2. 求点$P(1,2,-4)$到各坐标面及各坐标轴的距离.

3. 在yOz面上求与三个已知点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$等距离的点的坐标.

4. 已知$A(-2,-7,1)$，$B(4,y-2,3)$，$|AB|=11$，求点B的坐标.

5. 已知三角形三个顶点的坐标，判定它是哪种三角形：

(1) $A(5,2,3)$，$B(7,1,2)$，$C(4,3,1)$；

(2) $A(1,2,3)$，$B(3,1,2)$，$C(2,3,1)$.

6. 过点$P(-2,3,2)$作平行于y轴的直线，求此直线上与原点距离为3的点的坐标.

第二节　向量及其线性运算

向量是数学基本概念之一，通过向量可以不用坐标系就能直接把代数运算引入到几何中来. 鉴于向量知识常常能更简捷地解决几何问题，所以向量代数已经成为研究几何问题，特别是空间几何问题的有力工具. 向量不仅在力学、物理学和工程技术中有广泛应用，而且也是学习其他数学课程的基础.

一、向量概念

在反映现实世界的各种量中，最简单的一类量是，在取定某个单位后，只需要一个实数就可以表示出来，这种只有大小的量叫做**数量**. 例如，距离、时间、体积、质量、温度和功等. 另外还有一些比较复杂的量，它们既有大小又有方向，这一类量叫做**向量**(或**矢量**). 例如，位移、力、速度、力矩和角速度等.

向量有两个要素：大小与方向. 方向是一个几何性质，它反映在两点之间从一点到另一点的顺序关系，而两点之间又有一个距离. 因此，在几何上常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的起点和终点分别称为向量的起点和终点. 以A为起点、B为终点的有向线段表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 有时用黑体字母(书写时，在字母上面加箭头)表示，如$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$或$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$等

(图 8－5).

在实际问题中，有些向量与起点有关(如位移等)，有些向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上只研究与起点无关的向量，或者说只考虑由大小和方向决定的向量，称这种向量为**自由向量**(简称为**向量**). 因此，在用有向线段表示向量时，起点可以任意选取. 也就是说，长度相等且方向相同的有向线段表示相同的向量.

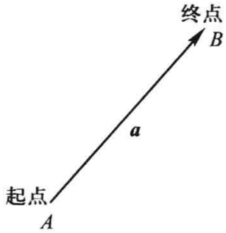


图 8－5

向量的大小叫做向量的**模**(或**长度**). 向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{a}|$，$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于 0 的向量叫做**零向量**，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\overrightarrow{0}$，零向量的方向是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等且方向相同，则称这两个向量**相等**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如，一个力的反作用力就是通过它的负向量来表示. 显然

$$-\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{P_2P_1},\quad -(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在一条直线上，因此，两向量平行也叫做两向量**共线**.

类似地还有向量共面的概念. 如果 $k(k\geqslant 3)$ 个向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在一个平面内，就称这 k 个向量**共面**.

二、向量的线性运算

向量的线性运算是指向量的加、减运算以及数乘向量的运算.

1. 向量的加、减运算

位移是一个向量. 考虑连续两次位移，先从 A 点位移到 B 点，再从 B 点位移到 C 点，其结果仍然是一个位移，它从 A 点位移到 C 点. 位移的这种合成方法可以用一个三角形表示(图 8－6). 在力学中，作用在同一点的两个不共线的力，它们的合力可以用平行四边形表示.

位移和力的合成法则具有普遍意义. 一般地，向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 A，作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**(图 8－6)，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

这种通过三角形确定两向量和的方法叫做向量加法的**三角形法则**.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，过空间一点 A 作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（图 8－7）. 这种通过平行四边形的对角线确定两向量和的方法叫做向量加法的**平行四边形法则**.

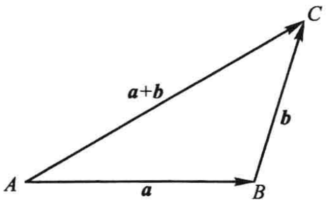


图 8－6

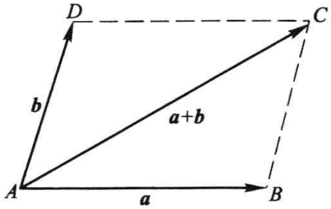


图 8－7

注意　当两个向量平行时只能用三角形法则求和. 当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行且同向时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{b}$）同向，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行且反向时，若 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行时，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 构成三角形，此时三角不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立.

向量加法满足下列运算规律：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（图 8－8）；

（3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量加法满足交换律与结合律，所以 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$（$n\geqslant 3$）相加时，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和都是相同的，因此它们的和可以写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. 由三角形法则推广可得多个向量的求和法则为：以空间某点为起点作向量 $\boldsymbol{a}_1$，以 $\boldsymbol{a}_1$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{a}_2$，…，以 $\boldsymbol{a}_{n-1}$ 的终点为起点作向量 $\boldsymbol{a}_n$，则以 $\boldsymbol{a}_1$ 起点为起点，$\boldsymbol{a}_n$ 的终点为终点的向量就是 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$（图 8－9）.

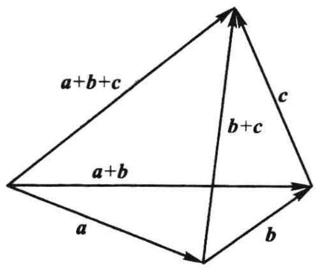


图 8－8

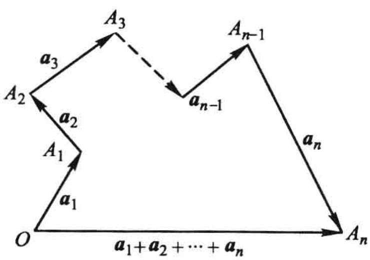


图 8－9

在向量运算时经常要用到加法的逆运算，即向量减法．规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（图 8－10）．

例 2.1　用向量方法证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形．

证　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O 且互相平分（图 8－11），则

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB},$$

所以

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}.$$

因此 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，且 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形．

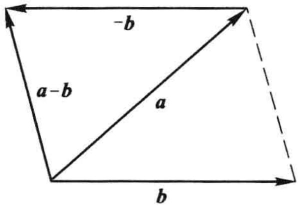


图 8－10

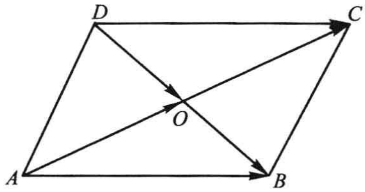


图 8－11

2. 数乘向量

在应用中还经常遇到数与向量相乘的情况．例如，连续做 n 个位移 $\boldsymbol{a}$，相当于做了一个距离是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍且方向与 $\boldsymbol{a}$ 一致的位移．又如，弹簧的伸缩只有位移大小的改变和方向的反转，大小的改变可以用倍数来表示，而方向的反转可以用负号来表示．这种关系是非常基本的，因此，我们定义数和向量的乘法如下：

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向规定为：当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反．数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的这种运算称为**数乘向量**，简称为**数乘**．

显然，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的充要条件是 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$．

如果 $\boldsymbol{a}$ 表示位移，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 表示朝着与 $\boldsymbol{a}$ 相同（$\lambda>0$）或相反（$\lambda<0$）的方向移动一段距离为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$ 的位移．简单地说，$\lambda\boldsymbol{a}$ 就是移动了 λ 个 $\boldsymbol{a}$．直观上理解，$\lambda\boldsymbol{a}$ 就是把 $\boldsymbol{a}$ 伸缩 λ 倍，其中 $\lambda<0$ 表示方向相反．

由数乘向量的定义可以直接推出

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

数乘向量满足下列运算规律：

(1) 结合律　$\lambda(\mu\cdot\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

这三条运算规律的证明可按数乘向量的定义来证明，这里从略.

从向量加法与数乘向量的运算规律可以看出，对于向量完全可以像实数那样去运算，但是必须注意，向量不是实数，不能把它们混同起来. 因此，像 $\boldsymbol{a}>3$，$\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 这样的式子是没有意义的.

数乘向量有着重要的应用. 因为单位向量的模是确定的，所以单位向量的主要特征就是方向. 一个单位向量确定一个方向，一个方向也确定一个单位向量. 即方向与单位向量是一一对应的. 因此，一个非零向量的方向通常用与它同方向的单位向量表示.

如果向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位化向量**. 显然向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这样就把一个向量表示成大小(模)和方向的乘积.

例如，如果物体运动速度$\boldsymbol{v}$ 的方向用单位向量 $\boldsymbol{e}$ 表示，距离单位为米，时间单位为秒，则$\boldsymbol{v}=5\boldsymbol{e}$ 表示物体的速率是 5 米/秒，且在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 的方向上运动.

定理 2.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 充分性是显然的，下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，则有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同方向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$.

例 2.2 用向量的方法证明：连接三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

证 如图 8－12 所示，设 AB，AC 的中点分别为 M、N，则有

$$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

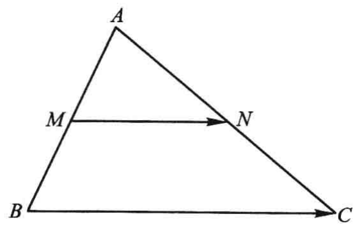


图 8－12

于是

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

所以 $MN/\!/BC$，且 $|MN|=\frac{1}{2}|BC|$.

例 2.3　设 P_1，P_2 是 u 轴上两点，其坐标分别为 u_1，u_2，$\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴正向一致的单位向量. 证明：$\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

证　当 $u_1<u_2$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$与 $\boldsymbol{e}$ 同方向(图 8-13(a))，且 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=u_2-u_1$，所以

$$\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e};$$

当 $u_1>u_2$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}$与 $\boldsymbol{e}$ 反方向(图 8-13(b))，且 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=u_1-u_2$，所以

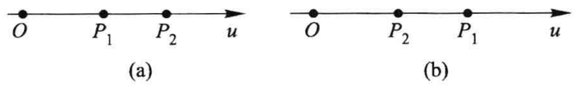


图 8-13

$$\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|(-\boldsymbol{e})=-(u_1-u_2)\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e};$$

当 $u_1=u_2$ 时，$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{0}$，显然有$\overrightarrow{P_1P_2}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

习　题　8.2

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 是对角线的交点. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

2. 证明：向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 k_1，k_2，使得 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

3. 把$\triangle ABC$ 的边 BC 五等分，设分点依次为 D_1，D_2，D_3 和 D_4，再把各分点与 A 连接. 试用$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

4. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=4\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$，证明：$A$，$B$，$D$ 三点共线.

第三节　向量的坐标

由于在许多实际问题中所研究的往往是数量关系，而向量只是作为研究的工具，这就需要建立一种向量与数量之间的关系. 为此引入向量的坐标表示，把向量与数量联系起来，使得向量运算转化为数量的代数运算.

一、向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量，并称它们为坐标系的**基本单位向量**.

在直角坐标系中，以原点 O 为起点，点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$完全被终点 M 确定，因此把向量$\overrightarrow{OM}$叫做点 M 的**定位向量**(**向径或矢径**). 设点 M 的坐标为 (x,y,z)，过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的三个平面，它们与 x 轴，y 轴，z 轴的交点依次是 P，Q，R(图 8－14)，由向量加法的三角形法则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

由上节例 2.3 知

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{3.1}$$

上式称为**向量$\overrightarrow{OM}$按基本单位向量分解的分解式**. 显然这种分解式是唯一的. 称有序数组 x，y，z 为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标，记为$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

应该注意，点 M 与该点的向径$\overrightarrow{OM}$的坐标用相同记号(x,y,z)表示，所以在实际问题中，要谨慎判别记号(x,y,z)的含义.

设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$为任意向量，起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，如图 8－15 所示，则向径

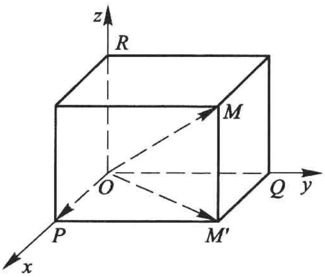


图 8－14

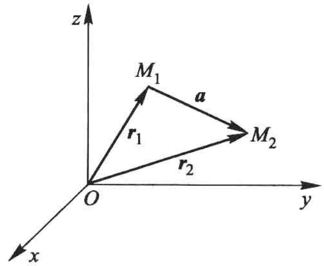


图 8－15

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\ \overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

根据向量运算法则可得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，$(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$，$(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ 分别称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴，y 轴，z 轴上的

分向量，有序数组 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1 称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标，记为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

数 x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1 分别称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在 x 轴，y 轴，z 轴上的分量.

由此可知，向量的坐标等于终点的坐标减去对应的起点坐标. 特别地，基本单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的坐标表示为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

容易证明，两向量相等的充要条件是其坐标对应相等.

二、利用坐标作向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量加减法以及数乘向量的运算如下：

设向量

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\quad(\lambda\ \text{为任意实数}).\end{aligned}\tag{3.5}$$

由此得到，向量和(或差)的坐标等于各向量对应坐标的和(或差)，数乘向量等于数乘向量的每一个坐标. 这样，向量运算就转化成数的运算.

由上节定理 2.1 知，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在实数 λ 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，用坐标表示为

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

说明两个向量平行的充要条件是它们的对应坐标成比例.

例 3.1　设有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的起点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，直线 P_1P_2 上的点 P 满足

$$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}\quad(P_1\neq P_2),$$

求点 P 的坐标(x,y,z).

解　由于

$$\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1},\ \overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP},$$

由已知条件$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\,\overrightarrow{PP_2}$可得