诸克军◎主编 王广民 郭海湘◎副主编

# 管理运筹学及智能方法

本书提供配套课件和习题参考答案

清华大学出版社

# 管理运筹学及智能方法

主　编　诸克军

副主编　王广民　郭海湘



清华大学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书主要是针对管理类的研究生编写，全书共 3 篇 11 章。第 1 篇包括运筹学传统内容共 6 章，其中第 1 章线性规划、第 3 章动态规划和第 4 章多目标规划主要是对本科阶段运筹学的复习与回顾，而第 2 章非线性规划和第 5 章排队论一般在本科阶段都没有系统学习，作为研究生无疑应该认真学好这两章；第 2 篇共 3 章，每一章都介绍一种典型的搜索算法，随着计算机技术的发展，非导数优化算法逐步成熟和完善，这些算法对于开展科学研究是不可多得的工具；第 3 篇共 2 章，主要介绍神经网络和模糊系统的基本概念，面对日益复杂的社会经济系统，两种智能方法所具有的鲁棒性和容错性用于复杂系统仿真具有特殊的意义。

全书每章都配备一定数量的习题，有的章节还附有相应的计算程序。本书适合于高等院校管理类专业研究生或者博士生作为教材或者自学使用，也可供各行各业的工程技术人员、管理人员及高等学校师生自学参考。



图书在版编目(CIP)数据

管理运筹学及智能方法/诸克军 主编；王广民，郭海湘 副主编. —北京：清华大学出版社，2013.6

ISBN 978-7-302-32108-8

Ⅰ.①管… Ⅱ.①诸… ②王… ③郭… Ⅲ.①管理学—运筹学—高等学校—教材 Ⅳ.①C931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 082969 号

**责任编辑**：王　定　胡花蕾
**封面设计**：周晓亮
**责任校对**：蔡　娟
**责任印制**：何　芊

**出版发行**：清华大学出版社
　　**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　**课 件 下 载**：http://www.tup.com.cn，010-62794504
**印 装 者**：北京密云胶印厂
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×260mm　　**印　张**：24　　**字　　数**：630 千字
**版　　次**：2013 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 6 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～4000
**定　　价**：38.00 元

产品编号：047909-01

# 前言

"运筹学"是运用科学方法(数学的、经济学的、工程的和计算机)求解社会经济中人力、财力、物资的合理配置问题，以获得生产活动的最佳效率。在西方，Management Science(管理科学)、Decision Analysis(决策分析)和 Operational Research(运筹学)三个词在许多场合是可以相互替代的。由此可见，对于从事管理特别是管理研究的人来说，运筹学的理论与方法是须臾不离的，它是管理类各级学生的主干课程，主要内容包括：

(1) 规划论。主要研究在一定约束条件下，一个或者多个指标函数的寻优问题，如果目标函数和约束条件的数学表达式是线性的，则称为线性规划问题，否则称为非线性规划问题。如果所考虑的规划问题与时间或者空间(位置)有关，则称为动态规划问题；如果约束条件中含有偏差变量，而目标函数是关于偏差的达成函数，则称为目标规划。

(2) 决策论。主要研究为了达到一定的目标，从若干个可能的行动方案中选取效果最好的一个方案的过程。小到个人生活、企业日常经营管理，大至国家的经济政策、政治方针，经常需要进行决策分析。

(3) 对策论。主要研究对抗性竞争局势的数学模型问题，寻求最优的对抗策略，也称为博弈论。

(4) 图与网络分析。主要研究有向图或无向图的优化计算以及实际应用问题，如最短路、最大流和最小费用等问题。网络分析主要介绍 PERT(计划评审分析技术)，包括网络图的绘制、资源的优化配置等问题。

(5) 存储论。主要研究物流过程中什么时候订货，每次订多少货的问题，目标是使得库存和采购过程中总的费用最低。

(6) 排队论。主要研究随机服务系统的运行指标，这些服务系统的重要特征是服务对象的到达和服务过程都是随机的，表现为一种随机聚散过程，该过程的平均特性规律是可以通过统计研究来获得的。研究这些指标的目的是提高服务系统的运行效率。

国内大学，运筹学的大多数内容都在本科阶段学习，本科没有学完的内容放到研究生阶段学习，到目前为止我们还没有发现专门针对研究生的运筹学教材，可见，研究生阶段运筹学的学习有很大的随意性，以至于管理科学与工程有的博士生没有学过运筹学。正是针对这种情况，本书在保证传统运筹学内容的前提下，根据科学研究的需要，与时俱进地增添了运筹学的内容，编写成这本专门针对研究生教学的教材。

本书分为 3 篇，第 1 篇主要介绍运筹学的传统内容，其中线性规划、动态规划和多目标规划作为对本科阶段运筹学基础知识的复习，已经系统学习过的同学可以略去这几章内

容，直接进入非线性规划、排队论和博弈论的补充学习。第 2 篇主要介绍 3 种非导数优化算法，传统运筹学的主要特征是可以建立目标系统的数学模型，并且能够通过导数的方法求得最优解或者满意解，但是大量的社会经济问题是不能直接建立系统数学模型的，或者所建立的数学模型不可微分，随着计算机技术的发展而逐步发展和成熟的禁忌搜索算法，是研究生所需要掌握的一种非导数优化算法，算法的目的也是为了得到最优解或相对最优解。第 3 篇简单介绍两种智能算法，对于日益复杂的社会经济系统需要类似于理工科实验室的手段来实现系统的模拟和仿真。两种智能方法所具有的鲁棒性和容错性对于复杂系统仿真具有特殊的意义。

全文继承了运筹学的传统内容，并根据知识最新进展和课题组近 10 年研究成果编写。第 1 篇由诸克军和王广民、王小林、郭海湘、於世为、柯小玲等编写；第 2 篇由翁克瑞和郭海湘编写；第 3 篇由诸克军和於世为编写，最后由诸克军和王广民进行统稿。

虽然我们力图引进更多更新的理论与方法，但限于水平和篇幅，仍然难免避重就轻，挂一漏万，此书只能作为抛砖引玉，诚恳希望广大读者斧正。

编　者

2013 年 3 月

# 目　录

# 第 1 章

# 线 性 规 划

线性规划(Linear Programming，简称 LP)是数学规划的分支之一，其特征是：它的目标函数是一个线性函数，约束条件也能表示成一组线性等式或者线性不等式。线性规划的创立可以追溯到 20 世纪 40 年代初期，现在已经发展成整个运筹学中最成熟的一个部分，被广泛地应用到企业管理、生产计划、工程设计及经济决策的各个方面，同时 LP 也是运筹学其他章节的重要基础，因此学好 LP 问题对于运筹学的学习具有特别重要的意义。

## 1.1 线性规划问题

线性规划问题主要是两类问题，其一是在资源一定的条件下研究如何决策使得产值或者利润最高；其二是在利润一定的情况下研究如何组织生产使成本最低。其实，它们只是一个问题的两个方面，都是研究如何决策使效益实现最大化，这就是线性规划的核心问题。为此，我们提出以下几个线性规划的实际问题。

### 1.1.1 几个线性规划问题

#### 1. 资源分配问题

某厂计划在下一个生产周期内生产 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$ 种产品，要消耗 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$ 种资源，已知每件产品所消耗的资源数、每种资源的数量限制以及每件产品可获得的利润如表 1-1 所示。问如何安排生产计划，才能充分利用现有资源，使获得的总利润最大？

**表 1-1 资源分配问题表——单件产品资源消耗**

| 资 源 | 产 品 | | | | 资源限制 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| 单件利润/元 | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_n$ | |

设决策变量 $x_j$ 表示下一个周期产品 $B_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的产量，则此问题的数学模型可归结为求 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max\quad Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\ x_j\geqslant 0\end{cases}$$

**2. 生产组织与计划问题**

某工厂用机床 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$ 加工 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$ 种零件，在一个生产周期内，各机床可能工作的机时、工厂必须完成各种零件的数量、各机床加工每个零件的时间(机时/个)如表 1-2 所示。问如何安排各种机床的生产任务，才能既完成加工任务，又使总成本最低？

**表 1-2 生产组织与计划问题表——零件加工时间**

| 机　床 | 零　件 | | | | 机时限制 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $a_m$ |
| 零件需求量 | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | |

设 $x_{ij}$ 为机床 $A_i$ 在一生产周期加工零件 $B_j$ 的数量 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则这一问题的数学模型为：求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max\quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m,\text{对机床}A_i\text{加工机时的限制})\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}\geqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n,\text{对零件}B_j\text{的需求量必须保证})\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

生产组织与计划问题有多种形式。例如，还可以考虑下面的问题：

某车间机床 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$ 生产由 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$ 这 $n$ 种不同零件构成的机器。如果每台机器需要各种零件的数目成比例 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$，机床 $A_i$ 生产零件 $B_j$ 的效率(每日生产零件数)为 $c_{ij}$，问如何分配机床负荷，才使生产的机器数最多？如表 1-3 所示。

表 1-3 生产计划问题——零件加工成本

| 机 床 | 零 件 | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
| $A_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | … | $c_{1n}$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | … | $c_{2n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | … | $c_{mn}$ |

设 $x_{ij}$ 为机床 $A_i$ 生产零件 $B_j$ 的时间(日) $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，这一问题的数学模型为：求 $x_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max\quad Z=\sum_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}/\lambda_1$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1\quad (i=1,2,\cdots,m;\text{机床}A_i\text{生产各种零件时间总和应为}1)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}c_{i1}x_{i1}:\sum_{i=1}^{m}c_{i2}x_{i2}:\cdots:\sum_{i=1}^{m}c_{in}x_{in}:=\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n\\ \text{(各机床一天生产各种零件总数应成比例)}\\ x_{ij}\geqslant 0\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

### 3. 合理下料问题

设用某种原材料(材料或板材)下零件 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$ 的毛坯，根据以往的经验，在一件原材料上有 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$ 种不同的下料方式，每种下料方式可得各种毛坯个数及每种零件需要量如表 1-4 所示。问应怎样安排下料方式，使得既能满足需要，又使原材料最省？

表 1-4 合理下料问题表——零件个数

| 零 件 | 下 料 | | | | 零件需要量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |

设用 $B_j$ 种方式下料的原材料数为 $x_j$ ($j$=1,2,$\cdots$,$n$)，则这一问题的数学模型为：求 $x_j$ ($j$=1,2,$\cdots$,$n$)，使得

$$\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i & (i=1,2,\cdots,m,\text{零件}A_i\text{的总数不能少于}b_i)\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,m)\text{，且为整数}\end{cases}$$

### 4. 配料问题

某饲养场用 $n$ 种饲料 $B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_n$，配制成含有 $A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$ 的混合饲料，各种饲料所含营养成分的数量、混合饲料对各种成分的最低需要量以及各种饲料的单价如表 1-5 所示。问应如何配料，才能既满足需求，又使混合饲料总成本最低？

**表 1-5　配料问题表——营养成分的含量**

| 成　分 | 饲　料 | | | | 成分需要量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| 原料单价 | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_n$ | |

设 $x_j$ 表示第 $j$ 种饲料所用的数量，则此问题的数学模型为：求 $x_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max \quad Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i & (j=1,2,\cdots,m,\text{各种成分的最低需要量必须满足需求})\\ x_j \geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

### 5. 运输问题

设某种物资(如煤炭)共有 $m$ 个产地 $A_1$、$A_2$、$\cdots$、$A_m$，其产量分别为 $a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_m$。另有 $n$ 个销地 $B_1$、$B_2$、$\cdots$、$B_n$，其销量分别为 $b_1$、$b_2$、$\cdots$、$b_n$。已知由产地 $A_i$($i$=1,2,$\cdots$,$m$)运往销地 $B_j$($j$=1,2,$\cdots$,$n$)的单位运价为 $c_{ij}$，其数据如表 1-6 所示。问如何调运才能使总运费最省？

表 1-6 运输问题表——单位运价

| 产地 | 销地 | | | | 产量 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $a_m$ |
| 销量 | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | |

当产销平衡(即$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$)时，设$x_{ij}$表示由产地$A_i$运往销地$B_j$($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)的运量，则问题的数学模型为：求$x_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m;\text{从产地}A_i\text{运出的物资等于其产量})\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n;\text{销地}B_j\text{收到的物资等于其需要量})\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

当产大于销(即$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i>\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$)时，这一问题的数学模型为：求$x_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;$ $j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max\ Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i & (i=1,2,\cdots,m;\text{从产地}A_i\text{运出的物资小于其产量})\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n;\text{销地}B_j\text{收到的物资等于其需要量})\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

当产小于销(即$\sum\limits_{i=1}^{m}a_i<\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$)时，这一问题的数学模型为：求$x_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;$ $j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max \quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m\text{；从产地A}_i\text{运出的物资等于其产量}) \\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\leqslant b_j & (j=1,2,\cdots,n\text{；销地B}_j\text{收到的物资小于其需要量}) \\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

这类问题通常称为**运输问题**。

**6. 作物布局问题**

某农场要在 $n$ 块土地 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$ 上种植 $m$ 种作物 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$，各块作物的面积、各种作物计划播种的面积及各种作物在各块土地上的单产如表 1-7 所示。问应该如何合理安排种植计划，才能是总产量最大？(假定 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$，即计划播种面积等于土地总面积)。

**表 1-7　作物布局问题表——单产**

| 作　　物 | 土　　地 | | | | 播种面积 |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ | $a_m$ |
| 土地面积 | $b_1$ | $b_2$ | … | $b_n$ | |

设 $x_{ij}$ 为土地 $B_j$ 种植作物 $A_i$ 的面积数 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则此问题的数学模型为：求 $x_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max \quad Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (j=1,2,\cdots,n) \\ x_{ij}\geqslant 0 & (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

还可以在经济管理中利用线性规划来解决许许多多的实际问题，另外，有些问题虽然其数学模型表现为其他形式，有时也可以转化为线性规划问题来求解，如网络分析、目标规划、投入产出问题、数据包络分析、矩阵对策问题等。

## 1.1.2 线性规划的形式

虽然希望阅读本书的读者已经对线性规划有所了解，有的甚至是很熟悉，但为了基本概念、基本理论的完整性，这里仍然进行系统的复习。

求一组变量 $x_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，使得

$$\max(\text{或}\min)\ \ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \text{或}\geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \text{或}\geqslant)b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}=,\ \text{或}\geqslant)b_m \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.2, 1.3}$$

式中，$a_{ij},b_i,c_j\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 为已知常数，式(1.1)称为目标函数，式(1.2)和(1.3)称为约束条件，特别称式(1.3)为非负约束条件。

为了研究问题方便，将线性规划问题统一写成如下的标准形式：

$$\max\ \ Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.5, 1.6}$$

并且假设 $b_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，否则将方程两边同时乘以(-1)，将右端的常数化为非负数，有时将线性规划问题式(1.4)~(1.6)简记为

$$\max\ \ Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1.7}$$

$$(\text{LP})\qquad \text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.8, 1.9}$$

并简称为(LP)问题。利用向量和矩阵的符号，(LP)问题还可以简记为

$$\max \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{CX} \tag{1.10}$$

$$\text{(LP)} \quad \text{s.t}\begin{cases} AX = b & (1.11)\\ X \geqslant 0 & (1.12)\end{cases}$$

或

$$\max \ Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.13}$$

$$\text{(LP)} \quad \text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b & (1.14)\\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n) & (1.15)\end{cases}$$

式中，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$为行向量，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为$m\times n$阶矩阵，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$均为列向量，T 表示向量转置，0 表示零向量。

我们称$\boldsymbol{A}$为约束条件的系数矩阵，简称为约束矩阵；$c_j=(j=1,2,\cdots,n)$为目标函数的系数，又称为价值系数，$\boldsymbol{C}$为价值系数向量；$b_i=(i=1,2,\cdots,m)$为第$i$个约束条件的右端常数，$b$为右端向量；$x_j=(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量，$\boldsymbol{X}$为决策向量；$\boldsymbol{P}_j=(j=1,2,\cdots,n)$为$\boldsymbol{A}$的第$j$列向量。

## 1.1.3 线性规划问题的解

**定义1-1** 在线性规划问题(LP)中，约束方程组(1.2)的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的任意一个$m\times m$阶的非奇异的子方阵$\boldsymbol{B}$(即$|\boldsymbol{B}|\neq \boldsymbol{0}$)，称为线性规划问题的一个基阵或基。

这就是说，矩阵$\boldsymbol{B}$是由矩阵$\boldsymbol{A}$的$m$个线性无关的列向量组成的。不失一般性，可假设

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=(p_1,p_2,\dots,p_m)$$

并称$p_i(i=1,2,\cdots,m)$为基向量，与基向量对应的变量$x_i(i=1,2,\cdots,m)$为基变量；不在$\boldsymbol{B}$中的列向量$p_j(j=m+1,\cdots,n)$称为非基向量，与非基向量对应的变量$x_j(j=m+1,\cdots,n)$称为非基变量。并记