

[英] 朱利安·哈维尔 著
郑炼 译

发现
数学
丛书

不要大惊小怪！

一些“荒唐”观点的数学证明

NONPLUSSED!

*Mathematical Proof of
Implausible Ideas*



上海科技教育出版社

发现
数学
丛书

[英] 朱利安·哈维尔 著
郑炼 译

不要大惊小怪！

一些“荒唐”观点的数学证明

上海科技教育出版社

NONPLUSSED!

*Mathematical Proof of
Implausible Ideas*



NONPLUSSED!

Mathematical Proof of Implausible Ideas

by

Julian Havil

Copyright © 2007 by Julian Havil

Simplified Character Chinese edition copyright © 2009 by

Shanghai Scientific & Technological Education Publishing House

Simplified Character Chinese edition arranged with Princeton University Press

Through Bardon Chinese Media Agency

ALL RIGHTS RESERVED

上海科技教育出版社经 Bardon Chinese Media Agency 协助

取得本书中文简体字版版权

责任编辑 朱惠霖 装帧设计 汪彦杨静

发现数学丛书

不要大惊小怪!

——一些“荒唐”观点的数学证明

[英]朱利安·哈维尔 著

郑炼译

上海世纪出版股份有限公司 出版发行

上海科技教育出版社

(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)

网址: www.ewen.cc www.sste.com

各地新华书店经销 常熟华顺印刷有限公司印刷

ISBN 978-7-5428-5549-7/O·813

图字 09-2009-586 号

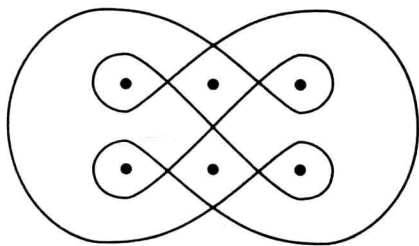
开本 850 × 1168 1/32 印张 7.875 字数 190 000

2013年1月第1版 2013年1月第1次印刷

定价:21.00元

献给安妮

我对你的爱单调递增无上界



Time flies like an arrow. Fruit flies like a banana^①.

格劳乔·马克思^②

我自相矛盾？好吧，那我就是自相矛盾。
我心胸博大，我包罗万象。

惠特曼^③

数学不是在一条康庄大道上的谨慎前行，
而是在一片陌生荒野中的漫漫之旅，探险家经常在那里迷路。对于史学家来说，严密化应该

① 这是英语中关于一语双关和句法歧义的典型例子，前后句均可作多种理解。Time flies like an arrow，一般理解为“时光飞逝如箭”，但也可理解为“像测定火箭的速度那样测定苍蝇的速度”。Fruit flies like a banana，考虑到与前句的对仗，可为“水果飞行如香蕉”，但符合常识的是“果蝇喜欢香蕉”。——编注

② 格劳乔·马克思(Groucho Marx, 原名 Julius Henry Marx, 1890—1977)，美国喜剧、电影、电视明星。以连珠炮式的、机智幽默且暗含嘲讽的即兴答问或演讲见长，曾获 1974 年度奥斯卡终身成就奖。——译注

③ 惠特曼(Walt Whitman, 1819—1892)，美国诗人。这段文字摘自他的著名诗集《草叶集》(*Leaves of Grass*)中“我自己的歌”(Song of Myself)的第 51 首。——译注

是一个信号,它表明地图已绘制完毕,真正的探险家已去往别处。

W. S. 安格林^①

① W. S. 安格林(William S. Anglin, 1949—2004), 加拿大数学家、数学哲学家。著有《数学史与数学哲学: 一种简明的读本》(*Mathematics: A Concise History and Philosophy*), 与他人合著《泰勒斯的遗产》(*The Heritage of Thales*)。——译注

序

致读者

我已把我无所事事或心情抑郁时作为消遣而间或写下的一些东西置于你手中。如果它们有幸同样也能帮你在有些时候打发无聊,排遣烦闷,而且你读到它们时能感到快乐,哪怕只有我写下它们时所感到的快乐的一半,那你就基本上不会认为你买这本书白花了钱,正如我不会懊悔我写这本书枉费了精力一样。请不要误以为我在鼓吹自己的作品,也不要以为由于我在做这件事时很有乐趣,所以如今成书之后便对之钟爱有加。一个放出游隼去追捕百灵和麻雀的人,比起一个放出苍鹰去捉拿较高档猎物的人来说,虽然猎捕对象十分卑微,但在乐趣上完全相同。一个人,如果不知道下面这点,那么他对于这本论著的主题——人类的理解——就几乎没有什么了解:由于理解是人类在智力方面的至高无上的官能,所以在运用它时,比起运用其他任何官能来说,有着一种更大更持久的愉悦。运用理解寻求真理,犹如放鹰逐犬,在这种活动中,正是“追寻”这个行动,造成了绝大部分的快乐。人类心智在不断认知世界的进程中,每迈出一步,就会作出某些发现。它们不但是新的发现,而且也是最好的发现,至少在当时是如此。

据记载,英国哲学家、博学多才的学者洛克^①于1689年5月24日在伦敦的多塞特宅邸(Dorset Court)写下这些文字,作为他1690年出版的不朽巨著《人类理解论》(*An Essay Concerning Human Understanding*)的序(或致读者)的第一段。

本书谨借此为序。

① 洛克(John Locke, 1632—1704),英国思想家、哲学家、经济学家和教育家。除《人类理解论》外,还著有《教育漫话》(*Some Thoughts Concerning Education*,又译《教育片论》)等重要作品。——译注

致 谢

我要感谢我的校长拉尔夫·汤森(Ralph Townsend)博士,感谢他的支持,特别是通过让我度公休假的方式;感谢我从前的学生汤姆·波科克(Tom Pocock),感谢他的热情和他那坦诚的看法;感谢各位审阅者,他们的意见给我以帮助;感谢设计科学公司(Design Science, Inc.)开发了 MathtypeTM 软件,感谢沃尔夫勒姆研究公司(Wolfram Research, Inc.)开发了 MathematicaTM 软件。此外,我应该衷心感谢 T&T 制作有限公司(T&T Productions Ltd)的乔纳森·温赖特(Jonathan Wainwright),感谢他严谨且耐心的工作;还应该衷心感谢我的编辑维基·卡恩(Vickie Kearn),感谢她那具有个人特色的耐心理解和热情。最后,我把我的名字列入一份长长的名单,凡这名单上的人,对马丁·加德纳(Martin Gardner)均抱感激之情,因为他对于他们是一种终生的鼓励。

目 录

序	I
致谢	III
引言	1
第 1 章 关于网球比赛的三个佯谬	7
第 2 章 滚上山去	21
第 3 章 生日佯谬	32
第 4 章 让桌子转	46
第 5 章 更 列	57
第 6 章 康韦的棋盘军队	75
第 7 章 投 针	82
第 8 章 托里拆利的小号	100
第 9 章 非可递效应	112
第 10 章 一个追逐问题	127
第 11 章 帕龙多的游戏	140
第 12 章 高维数	153
第 13 章 13 号兼星期五	181
第 14 章 Fractran 编程语言	196
关于题头图案	218
附录 A 容斥原理	227
附录 B 二项式反演公式	229
附录 C 曲面面积与弧长	233
译后记	237



引 言

爱丽丝笑起来：“试也没用，”她说，“谁也不会相信不可能的事。”

“我敢说，你缺乏练习，”王后说。“我还比较年轻的时候，每天总花半个小时来做这方面的练习。嗨，有时在早餐前我就已相信了多达六件的不可能的事。”

“我从哪里开始呢？”她问。

“从开头开始，”国王说，“到结尾结束。”

刘易斯·卡罗尔^①

① 刘易斯·卡罗尔(Lewis Carroll),真实姓名查尔斯·勒特威奇·道奇森(Charles Lutwidge Dodgson,1832—1898),英国数学家,世界著名的儿童文学家。这段引语其实来自他的两部作品。前一部分摘自1871年出版的《爱丽丝镜中世界奇遇记》(*Through the Looking Glass and What Alice Found There*)第5章。这里的王后是白棋王后,不是那个动辄要砍人头的红桃王后。后一部分摘自1865年出版的《爱丽丝漫游奇境记》(*Alice's Adventures in Wonderland*)第12章。原是“他问”(he asked),“他”指白兔,现在改成了“她问”(she asked),“她”似指爱丽丝。此外还有一些删改。这里的国王是红桃国王。本书原文这两部分文字之间没有空行,让人以为是同一部作品中的连贯描述。现用空行隔开。——编注



一名学生,学数学没多久,就能发现这样一些结果,这些结果或令人意外,或非常巧妙,或二者兼而有之,而且,对这些结果的解释可能也有着同样的优点。就作者的情况来说,卡罗尔作品中的所谓“开头”发生在很久以前,很可能就是下面这道“硬币绕硬币滚动”的智力趣题;这是一个讨人喜欢的消遣,它让人从初等代数那枯燥而难对付的功课中(即便是暂时地)解脱出来:

有两枚一模一样的硬币,它们半径相等,并排靠在一起,其中一枚固定不动。如图1所示,开始时一枚硬币上的箭头向上,将它沿着另一枚硬币的边缘无滑动地滚动,一直滚到这枚固定硬币的另一侧。

那么现在滚动过来的硬币上那个箭头是向上还是向下?

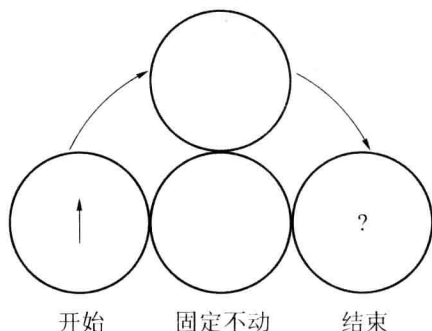


图1 一枚硬币绕另一枚固定硬币滚动

在随机选择的一群人当中,两种回答都有可能,而且都自以为“显然正确”,然而其中必定有一种是错的,只要用两枚硬币



淡定地做一个实验马上就能弄清楚是哪一种。但对这件事我们必须有一个理论上的证明,而在这里知识太多是有害的:如果选定圆圆周上的一个点,考察它的运动情况,那我们将有一条外摆线(更准确地说,是心脏线)要考虑,这就要对付较难的数学。

换一种思路,关注运动硬币圆心的路径,让我们设两枚硬币的半径都为 r 。在运动过程中,这圆心的轨迹是一个半圆周,它的圆心就是那枚固定硬币的圆心,而它的半径是 $2r$ 。这个运动将使得这圆心走过 $\pi \cdot 2r = 2\pi r$ 的路程。

现在把事情简化,考虑运动硬币沿一条长为 $2\pi r$ 的直线无滑动地滚动, $2\pi r$ 就是它的圆心的运动距离,如图 2 所示。十分显然,这枚硬币将转过 360° ——因此箭头正好是向上^①。

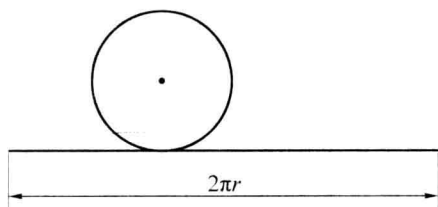


图 2 简化的情形

咋一看,这个结论确实令人意外——而且解决方法十分巧妙。

这是一个合适的开场例子,因为本书按部就班地记叙了各

① 其实,利用相对运动原理和积分概念,不难证明:一个圆沿一条曲线(包括折线)无滑动地滚动,那么它的自转圈数等于圆心运动路径的长度除以圆的周长。由此可见,曲线上被滚过的长度以及曲线的形状等,都不是关键。就这道题来说,还有个简单的解释:动圆无滑动地滚过定圆的半个圆周后,它与定圆的切点也在自己的圆周上“走”过半个圆周而变成初始切点的对径点,这时定圆圆周上与动圆的切点也变成其初始切点的对径点;要使这两个对径点合二为一,成为两圆的相切点,动圆必须是原来的方位,即圆中那个箭头必须向上。——编注



种令人意外的事例,形形色色,五花八门,而且在巧妙性方面也让人首肯,至少以作者的判断是这样。取怎样的事例,更痛苦的是,舍怎样的事例,当然要作出十分艰难的抉择;但还是找到了一个平衡方案,它既认可令人意外的事例的多样性,又认可概率和统计在带来令人意外的事例方面所起的显著作用:正是在概率和统计的领域,以及无穷大领域,反直觉事例层出不穷;但在数学的其他领域,反直觉事例并没有受到认真的对待。为反映所有这些情况,组成本书的十四章被平分为两类,一类讨论那些本质上依赖于概率和统计的结果,另一类讨论那些产生于其他各种各样相差迥异的领域——其中之一就是无穷大——的结果,这两类文章交错排列。为充分反映直觉和理性之间的这些冲突,编写了两本这样的书,本书是其中的第一本,而第二本^①则提供了把读者可能认为是不幸遗漏的内容包括进来的机会。在这两本书中,只要有可能,都将讨论所述结果的来源,并对历史背景予以相当大程度的强调;没有一门数学会像托普西^②自认为的那样是自己长出来的——总有人在某个时候培育了它。

除了第13章之外(还有什么地方可以放这种材料呢?),随着本书内容的进展,数学的水准也在逐步提高,但没有一处超过一位学习认真的高中生的水准:貌似难与真的难完全不是一回事。希望读者,不管是年轻的还是不那么年轻的,将在接下来的

① 这第二本应该是 *Impossible? — Surprising Solutions to Counterintuitive Conundrums* (《不可思议? ——有悖直觉的问题及其令人惊叹的解答》),普林斯顿大学出版社 2009 年出版。中译本即将由我社出版。——编注

② 托普西(Topsy),小说《汤姆叔叔的小屋》(*Uncle Tom's Cabin*, 又译《黑奴吁天录》、《汤姆大伯的小屋》)中的人物,一个不知道自己出身的奴隶女孩。当被问到是谁造了她时,她既不认为是上帝,也不认为是她母亲,她认为她是自己长出来的。这部反奴隶制小说由美国女作家斯陀夫人(Harriet Beecher Stowe, 1811—1896)著,1852 年出版。——译注



章节中有所发现,这些发现将告诉或提醒他或她,直觉是脆弱的。我们惯常用直觉来指导我们的日常生活,但它是如此容易地被愚弄——唯有代之以数学论证那不可动摇的理性。



第1章 关于网球比赛的三个佯谬^①

……因此，正如打网球那样，就其本身来说，这是一项没有什么用处的游戏，但是对于形成一种锐利的眼神和随时调整身体姿势的能力来说却十分有用；同样，在数学中，那种附带的、偶然的应用，其价值不亚于那种主流的、预期的应用。

罗杰·培根

在这第一章中，我们将考察与体育运动有关的反直觉现象的三个例子：前两个是借用网球比赛来说事，第三个则与网球比赛有着内在的联系。

① 原文为 paradox，通常有两义：一是指似非而是的说法，或者有悖于常识或直觉的（正确）结论；另一是指自相矛盾的说法。现由编辑将前者定译为“佯谬”，将后者定译为“悖论”。——编注