

修订版

高等数学

(微积分)

复习及试题选讲

吴振奎/编著

知识点总结、经典问题解析、
考研试题选讲、竞赛试题赏析，环环相扣

内容全面，重点突出

考试、考研、竞赛必备

北京工业大学出版社

BEIJING GONGYE DAXUE CHUBANSHE

高等数学(微积分) 复习及试题选讲

吴振奎 编著

北京工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(微积分)复习及试题选讲/吴振奎编著.
北京:北京工业大学出版社,2010.1 重印
ISBN 978-7-5639-1481-4

I.高... II.吴... III.微积分-高等学校-教学
参考资料 IV.0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第141591号

高等数学(微积分)复习及试题选讲
吴振奎 编著

*

北京工业大学出版社出版发行
邮编:100022 电话:(010)67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷有限公司印刷

*

2010年1月第2版 2010年1月第3次印刷
850mm×1168mm 32开 33.625印张 1162千字
ISBN 978-7-5639-1481-4
定价:40.00元

前 言

近年来,随着教育事业的发展,我国研究生的报考和招收人数逐年增多,这无论是对高校在校学生,还是对已经工作的往届大学毕业生和自学者来讲,都提供了继续深造的机会.

“高等数学”(包括线性代数和概率论与数理统计)是大学理工科及部分文科(如经济、管理等)专业的重要基础课,也是大多数专业研究生入学考试的必试科目.但其内容较为庞杂,涉及分支也多,且题目灵活性大.

1982年,余在辽宁大学供职.正课之暇,为学校部分打算报考研究生的学子,开设了“高等数学复习及试题选讲”选修课,目的是从知识上给学生们一个小结,方法上给他们一点开拓,技巧上给他们些微启迪.

当时课讲得很辛苦,但学生们学得极认真.教者与学者不断交流、研讨、切磋,使得两遍下来,讲义便已形成,且由辽宁科学技术出版社于1984年出版,转年增订本再印.

尔后,笔者调天津工作,种种原因,使笔者终与本书修订再版工作无缘.

一晃20余年,时过境迁,感触良多.

近年来大学扩招后,由于办学条件的限制,学生们对数学学习普遍感到困难,不少学生都希望能有一本数学复习用书,希望这本书的知识面广些,内容丰富些,层次稍高些,不仅对在校生复习迎考有所帮助,而且对于考研甚至参加数学竞赛也能有益,因为学子们都将同样面临复习、考试,尽管是不同的层次的考试.

此次应北京工业大学出版社之邀,笔者有幸将书稿修订再次奉献给广大读者.为此笔者对原书大动刀斧,以使之更适应新时代、新潮流、新情况.

与旧版相较，本书按学科拆分成三册：高等数学（微积分），线性代数和概率论与数理统计。本书系“高等数学（微积分）”分册。此外在每章增加了以下内容：

- (1) 经典问题解析；
- (2) 1987年以后全国硕士学位招生数学统考试题选讲；
- (3) 国内外大学生数学竞赛题赏析。

俗说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”。了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为数学内容就那么多，好的试题也就那么一些。正如时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然不是简单的重复）。

“登高望远”，对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为蕴涵在这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们会茅塞顿开之感，有时更会使我们大吃一惊，啊哈！原来如此。

本书编写过程参阅了大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，笔者谨向他们致以谢意。

尽管笔者十分努力，但精力与体力已使我感到力不从心，然而我仍旧会努力，且仍旧在努力。

本书的出版唤起了笔者对在辽宁大学工作的那段美好时光的追忆，对昔日的挚友、同仁的怀念，在此也向他们捎去一些祝福。

笔者也殷切期待着读者的建议、批评和指教，让我们一起将这本小说修订成功！

吴振奎

目 录

一、函数、极限、连续	1
内容提要	1
经典问题解析	9
研究生入学考试试题选讲	21
1978—1986 年部分	21
1987—2004 年部分	38
国内外大学数学竞赛题赏析	72
习题	85
二、一元函数微分学	98
内容提要	98
经典问题解析	105
研究生入学考试试题选讲	117
1978—1986 年部分	117
1987—2004 年部分	148
国内外大学数学竞赛题赏析	224
习题	234
三、一元函数积分学	251
内容提要	251
经典问题解析	262
研究生入学考试试题选讲	273
1978—1986 年部分	273
1987—2004 年部分	303
国内外大学数学竞赛题赏析	375
习题	390
四、矢量代数及空间解析几何	405

内容提要	405
经典问题解析	412
研究生入学考试试题选讲	416
1978—1986 年部分	416
1987—2004 年部分	427
国内外大学数学竞赛题赏析	431
习题	438
五、多元函数微分	442
内容提要	442
经典问题解析	448
研究生入学考试试题选讲	454
1978—1986 年部分	454
1987—2004 年部分	469
国内外大学数学竞赛题赏析	497
习题	503
六、多元函数积分	515
内容提要	515
经典问题解析	524
研究生入学考试试题选讲	531
1978—1986 年部分	531
1987—2004 年部分	554
国内外大学数学竞赛题赏析	583
习题	586
七、无穷级数	600
内容提要	600
经典问题解析	605
研究生入学考试试题选讲	616
1978—1986 年部分	616
1987—2004 年部分	641
国内外大学数学竞赛题赏析	666
习题	677

八、微分方程	689
内容提要	689
经典问题解析	698
研究生入学考试试题选讲	702
1978—1986 年部分	702
1987—2004 年部分	720
国内外大学数学竞赛题赏析	763
习题	769
附篇 1 解题步骤的一个框图	778
附篇 2 数学中的证明方法	779
习题	789
附录 1 硕士研究生招生高等数学试题选载	793
1979—1986 年部分院校试题选载	793
2003 年全国硕士研究生招生数学试题	851
2004 年全国硕士研究生招生数学试题	904
2005 年全国硕士研究生招生数学试题	960
附录 2 国内外大学生数学竞赛试题选录	1000
1. 美国普特南(Putnam)数学竞赛试题选录	1000
2. 北京市大学生(非理科)数学竞赛试题选录	1024
3. 天津市大学生数学竞赛(经济类、理工类)试题选录	1056
参考文献	1066

一、函数、极限、连续

内 容 提 要

(一) 集合及运算

集合是现代数学中最基本的概念,其观点和方法已渗透到数学的许多分支中去.通常用“具有某种特定性质事物(对象)的全体”去描述集合.集合简称集,通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.构成集合的事物称为元素,通常用 $a, b, c, \dots$ 小写字母表示.

若 a 是 A 的元素,称 a 属于 A ,记 $a \in A$;若 a 不是 A 的元素,称 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.

又 $A = \{a \mid a \text{ 具有 } P\}$ 表示集合 A 由满足条件 P 的元素组成.

不含任何元素的集合叫空集,记作 $\emptyset$.

又若 $x \in A$,必有 $x \in B$,则称 A 是 B 的子集,记 $A \subset B$.

当 $A \subset B$,且 $B \subset A$ 时,称集合 A, B 相等,记 $A = B$.

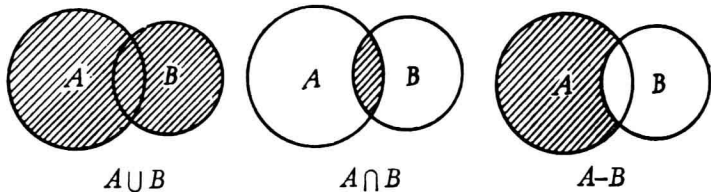
集合的运算指交、并、差等:

$X: \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称集合 A, B 的并,记 $A \cup B$;

$Y: \{y \mid y \in A \text{ 或 } y \in B\}$ 称集合 A, B 的交,记 $A \cap B$;

$Z: \{z \mid z \in A \text{ 或 } z \notin B\}$ 称集合 A, B 的差,记 $A - B$ 或 $A \setminus B$;

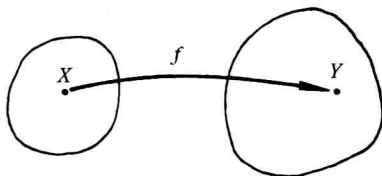
又若 S 是全空间,则任一集合 $A \subset S$,称 $S - A$ 为 A 的余集或补集,记 $\bar{A}$.



(二) 函数概念

1. 函数

X, Y 两个集合, 若对 X 中每一元素 x , 通过法则(映射) f 对应到 Y 中一个元素 y , 则称 f 为定义在 X 上的一个函数, 记 $y = f(x)$ (x 又称自变量, y 称因变量)



X 称为函数定义域. 而 $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的值域. 变量也称为元. 随自变量个数不同函数又分一元函数、二元函数……多元函数.

注 这儿 X 中的元素 x 可以是 n 维空间中的点, 这样一来定义就包括了一元函数、二元函数、多元函数等.

2. 函数的表示法

解析法(又称公式法, 它有显式、隐式、参数式之分)、列表法, 图象法等.

3. 函数的几种特性

单、多值性	对定义域 X 中每一个 x , 只确定惟一的 y 的函数叫单值函数; 否则称为多值函数
奇偶性	$f(-x) = f(x)$ 称 $f(x)$ 为偶函数, $f(-x) = -f(x)$ 称 $f(x)$ 为奇函数(对所有 $x \in X$)
单调性	对于 X 内任两点 $x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) \leq f(x_2)$] 称函数 $f(x)$ 单增[不减]; $f(x_1) > f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$] 称函数 $f(x)$ 单减[不减]
有界性	若 $ f(x) \leq M$ (M 是正的常数) 对所有 $x \in X$ 成立, 则 $f(x)$ 在 X 上有界; 否则称无界
周期性	若 $f(x+T) = f(x)$, 对所有 $x \in X$ 成立, 称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小正数 T (如果存在) 称为该函数的周期
齐次性	对多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来说, 若 $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称该函数为 k 次齐次函数

4. 反函数、复合函数

复合函数是由函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 经过中间变量 u 而组合成的函数

$$y = f[\varphi(x)].$$

注意当 $x \in X$ (或其一部分) 时, $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域中时, 函数才能复合.

	自变量	因变量	定义域	值 域	表达式
函 数	x	y	X	Y	$y = f(x)$
反函数	y	x	Y (或部分)	X (或部分)	$x = f^{-1}(y)$

注 函数与反函数是相对的, 它们的位置可互换.

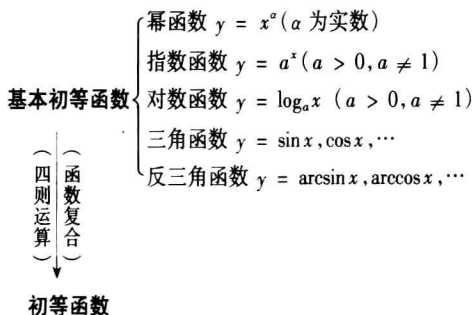
5. 显函数、隐函数

	定 义	表 示 式
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
隐函数	未解出因变量, 而是用方程表示自变量与因变量间的关系的函数	$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$

6. 初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数由基本初等函数经有限次代数运算或函数复合得到的函数.



(三) 极限的概念

1. 极限

极限分数列极限和函数极限, 详见下表:

数列的极限	对一个数列 $\{x_n\}$, 若任给 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n - A < \varepsilon$ 恒成立, 则称 A 为 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 或 $x_n \rightarrow A$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时)
-------	--

函数的极限

若任给 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时)}$$

当 x 从 x_0 左(右)边趋向于 x_0 时 $f(x)$ 的极限称为左(右)极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right)$$

注1 一些常见数列的极限, 如:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1); \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

注2 这儿函数极限定义只给了其中的一种情形, 对于其他情形可见下表.

任给	存在	当自变量 变化到	恒有关系 式成立	结 论	记 号
$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$ f(x) - A < \varepsilon$	A 为 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$
	$N > 0$	$ x > N$		A 为 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
		$x > N$		A 为 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
		$x < -N$		A 为 $x \rightarrow -\infty$ 时 $f(x)$ 的极限	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

注3 若数列 $\{x_n\}$ 看成自变量只取自然数的函数: $x_n = f(n)$, 则数列极限可看作一种函数极限. 然而应注意: 函数的自变量取连续变化的实值, 而数列中 n 只取自然数.

2. 极限的运算

若 $\lim f(x) = A, \lim \varphi(x) = B$, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim f(x) \pm \lim \varphi(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim cf(x) = c \lim f(x) = cA;$$

$$(3) \lim f(x) \cdot \varphi(x) = \lim f(x) \cdot \lim \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$(4) \lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim \varphi(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

这儿 $\lim$ 下未写 x 的趋向, 表示 $x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty$ 中的一种.

3. 两个重要的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

4. 无穷大量、无穷小量及其阶

无穷小量	$\lim \alpha(x) = 0$	关 系	$\lim \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$
无穷大量	$\lim g(x) = \infty$		$\lim \frac{1}{g(x)} = 0$

无穷小量 $\alpha(x), \beta(x)$ 的阶

比 值		定 义	记 号
$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$= 0$	$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶无穷小	$\alpha(x) = o[\beta(x)]$
	$= A \neq 0$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小	$\alpha(x) = O[\beta(x)]^*$
	$= 1$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小	$\alpha(x) \sim \beta(x)$
$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A \neq 0$ ($k > 0$)		$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小	$\alpha(x) = O[\beta^k(x)]$

无穷小量的性质:

- (1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;
- (2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;
- (3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

注 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (有极限) $\iff x \rightarrow a$ 时 $f(x) - A$ 是无穷小量.

5. 极限存在的判定

(1) (柯西(Cauchy) 准则) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 $\iff N(\epsilon) > 0$, 使任何 $x_1 \geq N$, $x_2 \geq N$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ 恒成立.

(2) (单调有界函数有极限) (a, b) 内单调有界函数 $f(x)$ 存在 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

* 更确切地讲, 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则记 $\alpha(x) = O^*[\beta(x)]$; 若 $\left| \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right| \leq M \neq 0$, 则记 $\alpha(x) = O[\beta(x)]$.

(3)(压挤或夹逼准则) $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, 又 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 则 $\lim f(x) = A$.

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在} \iff \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

6. 极限的常用求法

方 法	例 子
利用定义 ($\epsilon - \delta(N)$ 方法)	若 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$ (国防科技大学, 1981)
利用极限的基本性质和法则	求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{a^{\frac{x}{2}}} (a > 1)$ (中南矿冶学院, 1982)
连续函数求极限	求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ (大连铁道学院, 1989)
利用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$	求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right)^n$ (东北重型机械学院, 1981) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$ (一机部 1981—1982 年出国进修生)
利用适当的函数变换 (化去不定型的不定性或变化不定型类型)	求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 4x^2 - x + 4}{x + 1}$ (哈尔滨工业大学, 1981) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi}{2} x$ [提示: 令 $1 - x = u$] (湘潭大学, 1981)
洛必达(L'Hospital)法 则	求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x - \sin x}$ (国防科技大学, 1983)
极限判别准则	设对 $n = 1, 2, \dots$ 均有 $0 < x_n < 1$, 且 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ (湘潭大学, 1981)

方 法	例 子
等价无穷小代换	求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x - e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$ (湖南大学, 1983)
用左右极限关系	设 $y = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} y$ (厦门大学, 1980)
用级数敛散性	求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ (成都地质学院, 1979; 山东矿冶学院, 1982)
适当放缩 (利用不等式)	求 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\sin \frac{1}{x^2}}$ (湘潭大学, 1982)
利用积分	求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$ (华东水利学院, 1980)

注 表中方法的详细使用情况, 请见后文或相应章节及例子(关于洛必达法则内容见下一章)。

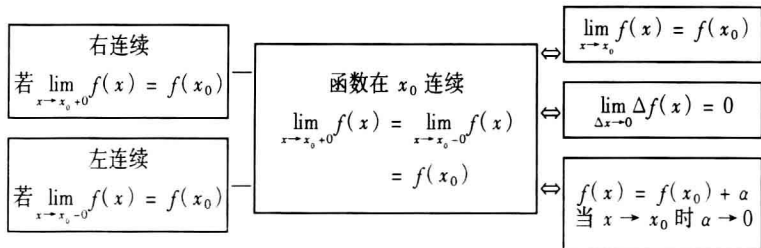
(四) 函数的连续性

1. 连续性的概念及连续函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

若函数 $f(x)$ 在某区间的每一点都连续, 则说函数在该区间上连续, 且称 $f(x)$ 为该区间上的连续函数。

2. 左、右连续及函数连续条件



3. 函数的间断点

函数的间断点	间断点的分类
① $f(x)$ 在 x_0 无定义; ② $f(x)$ 在 x_0 有定义, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在; ③ $f(x)$ 在 x_0 有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (可去间断点); ④ $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$	满足 ③、④ 的间断点称为第一类间断点, 其余的间断点称为第二类间断点

4. 一致连续

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使对任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 总有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

5. 闭区间连续函数的基本性质

最大最小值定理	若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在该区间至少取得最大、最小值各一次 (它们分别记为 M, m) [由此可推出 $ f(x) \leq M$ (有界性)]
介值定理	若 $m \leq f(x) \leq M$, 又 $\mu \in [m, M]$, 则 $[a, b]$ 上至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \mu$ 特别地, 若 $f(a)f(b) < 0$, 则有 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = 0$
一致连续	闭区间上的连续函数, 在该区间一致连续

连续函数性质 { 局部性质 $f(x)$ 在 x_0 的邻域有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$) (局部保号性)
闭区间整体性质 { 最(大、小)值定理
介值定理
一致连续定理

6. 连续函数的性质

四则运算的连续性	若 $f_1(x), f_2(x)$ 在某一区间上连续, 则 $\alpha f_1(x) \pm \beta f_2(x), f_1(x) \cdot f_2(x), f_1(x)/f_2(x)$ ($f_2(x) \neq 0$) 也连续 (在同一区间), 这里 α, β 为常数
复合函数	若 $y = f(z)$ 在 z_0 连续, $z = \varphi(x)$ 在 x_0 连续, 且 $z_0 = \varphi(x_0)$, 则 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续
反函数	若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单增(减)、连续, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在其值域上也单增(减)、连续

7. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的;

(2) 初等函数在其定义域内是连续的.

经典问题解析

一、函数及其表达式

1. 函数表达式

例 1 设函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试求 $f\{f[f(f(x))]\}$ 和 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ ($x \neq 0$ 且 $x \neq 1$).

解 由 $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$, 有 $\frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$, 则

$$f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

故 $f(f[f(x)]) = f(x)$.

从而 $f\{f[f(f(x))]\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x)}} = x$.

而 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - x$ ($x \neq 0$ 且 $x \neq 1$).

注 由解题过程不难发现:

$$\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k \text{ 重}} = \begin{cases} f(x), & k \text{ 为奇数;} \\ x, & k \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

严格地证明, 还要用数学归纳法去完成.

例 2 若 $f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 设 $x + y = u$, $\frac{y}{x} = v$, 解得 $x = \frac{u}{1+v}$, $y = \frac{uv}{1+v}$.

故 $f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{(1-v)u^2}{1+v}$.