

初等几何學

學 何 幾 等 初

Schultze-Sevenoak-Schuyler 原 著

德 純 馬 溝 扶 者 述 譯

熙 廷 程 縣 歙 汾 秦 定 嘉 者 閱

北 平 文 化 學 社 印 行

1 9 3 4

序

馬純德君慨現在坊間所出幾何學無良教本，以致中學教學兩方，均勞多而功少，爰取 Arthur Schultze, Frank L. Sevenoak, Elmer Schuyler 共著之書譯爲中文，以應此急需。書成以示余，余受而讀之，見其編輯方法，迥異他書，深淺有序，繁簡合宜，且隨處加入實際問題，使初學者知幾何學之應用，減想像之痛苦。誠可謂良書矣。馬君專攻數學有年，於中學教授，究研尤深，其譯筆之信而達，固無待余之多言也。

民國十七年三月

文元模

序 言

斯書譯自 Schultze—Sevenoak—Schuyler 三氏之幾何學，爲美國近世中等學校風行之善本。其組織完備，排比適宜，深能減少學者困難。且理論精微，足以陶冶學者之思想緻密。參加實用，更能添助研究興味。至於包羅豐富，亦非他書可比。近日吾國中等學校，多已採用斯書，惜無譯本出現，致使未諳英文者深以爲憾。今特譯成，以供海內同志研究。惟譯者自愧文詞淺陋，脫稿後，蒙吾師秦汾先生學友程廷熙先生詳加校閱，譯者十分誌謝！但錯訛謬誤，仍恐不免。尙望閱者匡其不逮，則幸甚矣！

中華民國十六年雙十節 馬純德識於國立京師大學校師範部

忠告學者

學者學習斯科，須知下列數事：

1. 準備器具—鉛筆，紙，直尺，圓規—以供應用。
2. 劃定時間，專心學習。
3. 習題自作，循序探求。
4. 時常省憶，不可遺忘。
5. 備一副本，將角之相等條件，線之平行條件，三角形相等條件等事，一一列出，已習公式分類。
6. 細嚼書味，厥功無極。

記

+	加
-	減
=	等於
$\cong$	全同
$\neq$	不等於
$>$	大於
$<$	小於
$\because$	因爲
$\therefore$	所以
$\perp$	垂直
$\perp\!\!\!\perp$	諸垂直

號

$\parallel$	平行
$\parallel\!\!\!\parallel$	諸平行
$\sim$	相似
$\angle$	角
$\sphericalangle$	諸角
$\triangle$	三角形
$\triangle\!\!\!\triangle$	諸三角形
$\square$	平行四邊形
$\square\!\!\!\square$	諸平行四邊形
$\bigcirc$	圓
$\odot$	諸圓
$\frown$	弧

平面幾何學

目 錄

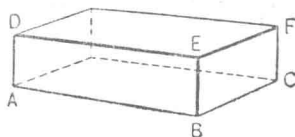
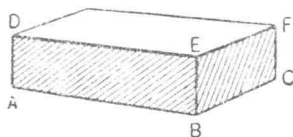
	頁數
緒 論.....	1
第壹篇 直線及直線形.....	17
第貳篇 圓 作圖題.....	102
第叁篇 比例 相似形.....	153
第肆篇 多邊形之面積.....	205
第伍篇 正多邊形 圓之度法.....	234
附 錄	263

平面幾何學

緒論

定義

1. 舉凡木石等物，皆佔有一定之空間，此一定之空間，稱為幾何立體，或簡稱曰體。



2. 定義 體 居空間一有限部分，俱有長寬高三度。

3. 定義 面 為體之界限，如圖 ABED，或 BEFC，僅有長度及寬度。

例如窗面與空氣之間，有一無厚薄之界面。

4. 定義 線 為面之界限，故圖 AB, AD，僅有長度。

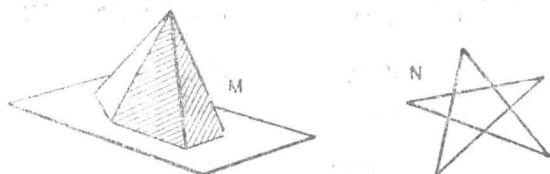
例如右邊黑線 AB，仍有寬度，故不得謂為幾何線，真正幾何線，只可想像於黑白兩色之間。



5. 定義 點 為線之界限，或線之極端，僅有位置，而無度可言。

如此論之，則面非體之部份，故獨立空間，僅為體之定界而已，更推之點線亦均獨立於空間。

6. 定義 幾何形者，由點線面體一部或全數集合而成，如圖 M 或 N。



直線形者，以直線界成之圖形也。

7. 定義 幾何學者，為研究幾何圖形之科學也。

8. 直線 為最簡單之線，略可用緊張於兩點間之線以代表之，如圖 A B。又通常稱為線者，即指直線而言。



直線雖為最簡單之線，且居幾何上基礎之一；但給以適當定義，頗非易易。

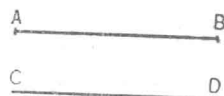
9. 定義 曲線者，線之處處非直線者也。如§8之圖 CD。

10. 定義 折線者，由諸不同方向之直線，連接而成。如§8之圖 EF。

折線上無兩鄰接部份，可重合於一直線上。

11. 直線一語，可用以指一無限長直線，或直線之一部。

一有限長之直線，通常稱為線段，其兩端作記號以表之，如圖 AB。此線之長，亦稱為 A, B 兩點間之距離。



若線之兩端不作記號者，概為一無限長之直線，如圖 CD。

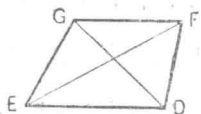
12. 論綫 AB 之方向，即指由 A 以至 B ；若論綫 BA 之方向，則指由 B 以至 A 。



13. 延長綫 AB 者，乃過 B 點而延長之；延長綫 BA 者乃過 A 點而延長之。

14. 定義 平面 又簡稱曰面。若在一面內任取兩點之聯綫，其綫上之各點，均能在此面內；此面即可稱為平面。

15. 定義 平面形者，圓形之諸點，均在一平面內者也，如圖 $EDFG$ 。



16. 定義 平面幾何 者，專研究平面上之圖形也。

17. 定義 立體幾何 其研究之圖形，不限於平面。又球面幾何乃研究球面上之圖形。

18. 置此圖於彼圖之上，若此圖內之各點，均在彼圖內，彼圖內之各點，亦均在此圖內；則稱此兩圖曰重合。

19. 定義 全同形者，即圖形能使之彼此重合者也。

以後關於全相同各綫，亦稱等綫。仿此全相同角，亦稱等角。（見 205 頁註）

20. 疊置證題法 即由重合結果，斷定其為全同形之方法也。

21. 平分一綫者，即分一綫為兩相等綫段。



例如 $AD = DC$ ，則 AC 即被平分。吾人初假定一綫段 (AC) 之分點唯一，如圖 D 點。

習題1. 點若移動，其跡如何？

習題2. 何種圖形由線移動而生成？何種由面移動而生成？

習題3. 線移動後，其跡能否不成一面？

習題4. 石工如何用直尺以判定石面之平坦？

習題5. 室內之牆，可以代表何種面？

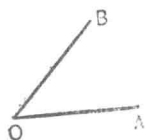
習題6. 氣筒之外面，屬何種面？

角

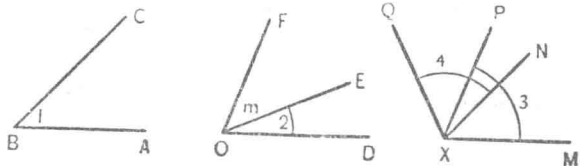
22. 設直線 OA 在一平面內繞 O 點而旋轉，其旋轉之量，稱為角 AOB 。而角之大小，顯然與旋轉線之長短無關。

線 OA 與 OB ，稱為角 AOB 之邊，點 O 稱為角 AOB 之頂。

角之構成，亦可以用二射綫或二半線由一點出發以說明之。



23. 記法 用三個文字記角時，角頂之文字，恆居他二文字之間；如角 ABC 及角 EOF 。又省記為 $\angle ABC$ 及 $\angle EOF$ 。



如用角頂之一文字記角時，則指最大之角而言。（數角會於此點時）如 $\angle DOF$ ，讀曰 $\angle O$ ； $\angle ABC$ 讀曰 $\angle B$ 。

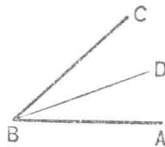
通常記角之法，亦用一數字或一斜體字母置於角之內面。如 $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle m$ 是。

$\angle FOD$ 為 $\angle 2$ 與 $\angle m$ 之和， $\angle 2$ 為 $\angle FOD$ 與 $\angle m$ 之較。

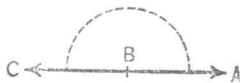
表示角時，為省目起見，通常用一曲綫記之，如 $\angle 2$ 與 $\angle 3$ 是。故一數字之旁置一弧者，此弧即示數字所表之角也。如圖 $\angle MXP$ 讀曰 $\angle 3$ ， $\angle NXQ$ 讀曰 $\angle 4$ 。

24. 平分一角者，即分此角為兩等部份；吾人初假定一角之平分綫唯一。

例如BD平分 $\angle ABC$ ，因 $\angle ABD = \angle DBC$ 。故BD稱為 $\angle B$ 之平分綫。

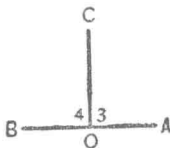


25. 定義 平角者，角之兩邊成一直綫，對於頂點適居反對方向如圖ABC。

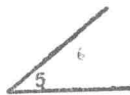


26. 定義 直角者，等於平角之半之角也。

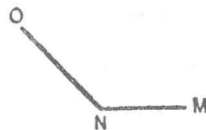
例如OC平分平角AOB，則 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 稱為直角。



直角



銳角



鈍角

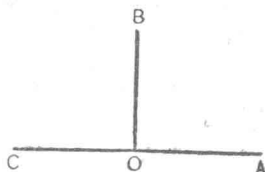
27. 定義 銳角者，角之小於一直角者也。如圖 $\angle 5$ 。

28. 定義 鈍角者，角之大於一直角，而小於一平角者也。如圖 $\angle MNO$ 。

29. 定義 銳角與鈍角，又統稱曰斜角。

30. 定義 二綫稱為互相垂直，若其相交能構成直角。如圖 AC 與 BO。

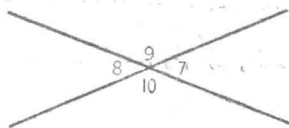
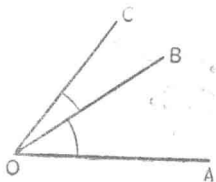
此交點 (O) 稱為垂綫之垂足。



目綫外一點，至此綫之距離，即由此點引此綫之垂綫長。如圖 BO。

31. 度一角者，即取一單位角，求該角含此單位角之數量。通常所用之單位，稱為一度；每度等於一直角九十分之一。若每度再分為六十等份，每份稱為一分；每分更分為六十等份，每份又稱為一秒。度、分、秒之記法，如 $6^{\circ}50'12''$ ，即讀為六度五十分十二秒。另外亦有取一直角或一平角作單位者。

32. 定義 鄰角者，二角俱有一公共頂點，並一公共邊居此二角之中間。如圖 $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 。

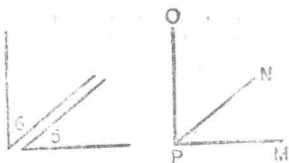


33. 定義 對頂角者，一角之兩邊，為他角之兩邊過頂點之逆向引長綫。如圖 $\angle 7$ 與 $\angle 3$ ，或 $\angle 9$ 與 $\angle 10$ 。

34. 定義 欲行加法於兩角時，可置兩角成為鄰角。如此則非公共之邊所夾之角，即該二角之和。

35. 定義 二角之和若等於一直角，則稱互為餘角。

如此則一角為他角之餘角。如圖 $\angle 5$ 與 $\angle 6$ ，或 $\angle MPN$ 與 $\angle NPO$ 彼此均互餘。



36. 定義 二角之和若等於一平角，則稱互為補角。



如此則一角為他角之補角。如圖 $\angle 1$ 與 $\angle 2$ ，或 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ ，彼此均互補。

習題1. 一直角有若干度？一平角有若干度？又一直角之半有若干度？

習題2. 時鐘當三點時，其兩針成若干度？當六點時？當兩點時？又當五點時？

習題3. 時鐘當午後一點時其兩針成若干度？當午後兩點三十分時？又當午後五點三十分時？

習題4. 若車輪轉一週之四分之一，問其一幅條經若干度？六分之一？又轉兩週。

習題5. 一圓餅分為五等份，問每份成若干度？又六等份成若干度？

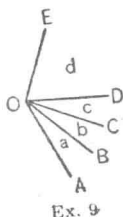
習題6. 由一點北向作一綫，北東向作一綫，問成幾度？又南向與南東成幾度？又北西與南西成幾度？

習題7. 錶之長針走10分經若干度？走15分？走30分？走45分？走一點？

習題8. 照下邊習題之圖，試用三個文字讀下列之角： $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle(a+b)$, $\angle(b+c+d)$ 。

習題9. 參照右圖，按下列各條件，求出所問角之數值：

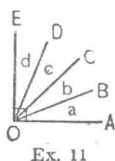
- 若 $\angle a = 30^\circ$ 及 $\angle b = 40^\circ$ ，求出 $\angle AOC$ 。
- 若 $\angle b = 35^\circ$ 及 $\angle c = 10^\circ$ ，求出 $\angle BOD$ 。
- 若 $\angle b = 40^\circ$ $\angle c = 10^\circ$ 及 $\angle d = 50^\circ$ ，求出 $\angle BOE$ 。
- 若 $\angle AOC = 50^\circ$ 及 $\angle b = 40^\circ$ ，求出 $\angle a$ 。
- 若 $\angle AOD = 70^\circ$ ， $\angle a = 35^\circ$ 及 $\angle c = 10^\circ$ ，求出 $\angle b$ 。
- 若 $\angle AOE = 110^\circ$ ， $\angle a = 20^\circ$ 及 $\angle d = 30^\circ$ ，求出 $\angle BOD$ 。
- 若 $\angle AOC = 60^\circ$ 及 $\angle a = \angle b$ ，求出 $\angle a$ 。
- 若 $\angle AOD = 75^\circ$ 及 $\angle a = \angle b = \angle c$ ，求出 $\angle c$ 。



習題10. 在上圖何角與 $\angle BOC$ 為鄰？與 $\angle COD$ ？與 $\angle BOD$ ？

習題11. 參照右圖，若 $\angle O = 90^\circ$ ，試指出：

- 何角為 $\angle a$ 之餘角？
- 何角為 $\angle AOC$ 之餘角？
- 何角為 $\angle BOE$ 之餘角？
- 若 $\angle d = 20^\circ$ ，求出 $\angle AOD$ 。
- 若 $\angle b = 20^\circ$ 及 $\angle COE = 55^\circ$ ，求出 $\angle a$ 。
- 若 $\angle AOC = 55^\circ$ 及 $\angle d = 15^\circ$ ，求出 $\angle c$ 。
- 若 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d$ ，求出 $\angle a$ 。

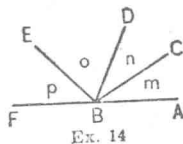


習題12. 問 30° 之餘角為若干度？ 35° 之角？三分之二之直角？ n° 之角？ n 分之一之直角？ $(10+x)^\circ$ 之角？

習題13. 一角為其餘角之二倍，問該角有若干度？

習題14. 參照右圖，若 FBA 為一直線，則下列：

- 何角為 $\angle P$ 之補角？
- 何角為 $\angle DBF$ 之補角？
- 何角為 $\angle ABE$ 之補角？
- 若 $\angle p = 40^\circ$ ，求出 $\angle ABE$ 。
- 若 $\angle m = 30^\circ$ 及 $\angle P = 35^\circ$ ，求出 $\angle CBE$ 。
- 若 $\angle DBF = 100^\circ$ 及 $\angle m = \angle n$ ，求出 $\angle m$ 。
- 若 $\angle P = 30^\circ$ 及 $\angle m = \angle n = \angle o$ ，求出 $\angle o$ 。
- 若 $\angle FBC = 140^\circ$ 及 $\angle ABD = 30^\circ$ ，求出 $\angle n$ 。
- 若 $\angle ABD = 20^\circ$ ， $\angle n = 35^\circ$ 及 $\angle CBE = 35^\circ$ ，求出 $\angle P$ 。



習題15. 20° 之角之補角幾度？ 140° 之角？四分之三之平角？ n° 之角？ $(50-3x)^\circ$ 之角？

* 習題中記以(*)號者較難。

習題16. 一角為其補角之三倍, 該角度數有若干?

習題17. 何種角小於其補角? 等於其補角? 大於其補角?

習題18. 用代數記號, 寫出:

(a) n° 之餘角.

(b) 三倍 x° 之餘角.

(c) $(2x)^\circ$ 之補角.

(d) 六倍 n° 之補角.

習題19. 參照下圖, 求出所問角之數值:

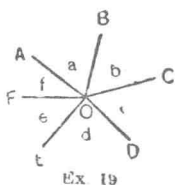
(a) 若 $\angle a = 80^\circ$, $\angle b = 50^\circ$, $\angle c = 60^\circ$, $\angle d = 90^\circ$ 及 $\angle e = 50^\circ$,

求出 $\angle f$.

(b) 若 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle e = \angle f$, 求出 $\angle f$.

* (c) 若 $\angle AOC = 130^\circ$, $\angle b = 50^\circ$, $\angle BOD = 110^\circ$ 及 $\angle DOF = 140^\circ$, 求出 $\angle f$.

(d) 若 $\angle d = 90^\circ$ 及 $\angle c = \angle b = \angle a = \angle f = \angle e$, 求出 $\angle a$.



Ex. 19



Exs. 20, 21

習題20. 二直線AB, CD相交於O點, 若 $\angle AOC = 60^\circ$, 求其他之角.

習題21. 若 $\angle AOC = m^\circ$, 問 $\angle DOB$ 幾度? $\angle BOC$ 幾度?

習題22. 若 $\angle ACB = \angle COD = 90^\circ$, 求出 $\angle AOD$, (a) 又若 $\angle BOC = 60^\circ$, (b) 又若 $\angle BOC = m^\circ$,

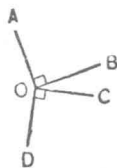
習題23. $\angle BOC$ 與 $\angle AOD$ 有何關係?

習題24. 若AO垂直CO, BO垂直DO, 求出 $\angle AOD$;

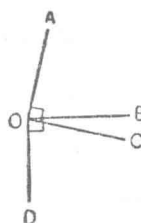
(a) 若 $\angle COB = 40^\circ$; (b) 若 $\angle COB = m^\circ$.

習題25. $\angle AOD$ 與 $\angle BOC$ 有何關係?

* 習題26. 若 $\angle AOC = \angle BOD = 90^\circ$, 及 $\angle AOD = 3\angle BOC$, 求出 $\angle BOC$.

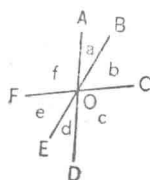


Exs. 22, 23



Exs. 24-25

習題27. 三直線相會於O點, 則構成角: a, b, c, d, e 及 f.



(a) 若 $\angle a = 20^\circ$ 及 $\angle b = 60^\circ$, 求出 $\angle c$.

(b) 若 $\angle a = 15^\circ$ 及 $\angle c = 95^\circ$, 求出 $\angle e$.

(c) 若 $\angle f = 10^\circ$ 及 $\angle d = 10^\circ$, 求出 $\angle b$.

(d) 若 $\angle AOC = 8^\circ$ 及 $\angle BOD = 135^\circ$, 求出 $\angle e$.

Ex. 72

習題28. 若兩鄰角 AOB 與 BOC 相補, 求兩角之平分線所構成之角:

(a) 若 $\angle AOB = 40^\circ$; (b) 若 $\angle AOB = 60^\circ$; (c) 若 $\angle AOB = m^\circ$.

習題29. 兩鄰補角之平分線構成何角?

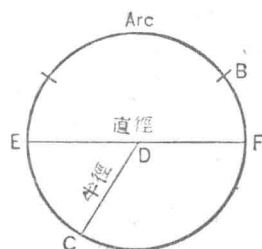
習題30. 若兩鄰角 AOB 與 BOC 相餘, 求兩角之平分線所構成之角:

(a) 若 $\angle AOB = 20^\circ$; (b) 若 $\angle AOB = 30^\circ$; (c) 若 $\angle AOB = m^\circ$.

習題31. 兩鄰餘角之平分線構成何角?

37. 定義 圓者平面之一部份, 以一曲線封閉之圖形也。此曲線上各點均與一定點(D)等距離; 如圖 ABC.

圓心(D)即此定點。半徑為由圓心至圓上之直線, 如 DC. 弧為圓上之一部份, 如 $\widehat{AB}$. 圓之長稱曰圓周。



圓之長指此曲線而言, 圓者指此面積而言; 但習慣上稱圓者多指為圓周。

38. 幾何上所用之器械僅有兩種, 即圓規與直尺。

直尺用以作線, 圓規用以作圓或弧或移動一有限直線(線段)由此位置至另一位置。¹

¹在一平面上—綫稱為封閉綫, 則此綫恰能分此面之有限部份為兩部。