

高中数学 训练指导

黄冈中学数学教研组编

华中师范大学出版社

高中数学训练指导

湖北省黄冈中学数学教研组编

华中师范大学出版社

鄂新登字11号

高中数学训练指导

黄冈中学数学教研组编

•

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所经销

湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

•

开本 787×1092 1/32 印张12.25 字数 294千字

1991年12月第1版 1992年9月第2次印刷

ISBN 7-5622-2775-5/G·265

印数: 56001—86500 定价: 4.50元

说 明

本书根据人民教育出版社新修订的教材编写，供高中数学教师及学生分阶段选用。全书共14章，每章含三部分内容：1. 教材结构分析。知识要点、重点、难点，并对学生在学习过程中易出现的问题进行剖析释疑。2. 能力要求。概括了常规的解题方法及技巧，特别注意数学思想、数学方法的培养。3. 习题精选。选题注意源于课本，不落俗套，力争突出重点，覆盖面大，确保双基落实和能力提高。

本书是我组全体教师集体智慧的结晶，是我组全体教师几十年、特别是近十年来认真钻研数学教学大纲和教材、长期教学实践经验的总结，体现了我组在教学上注重基础、注重能力培养的严谨求实的特色。

参加本书编写的有：卞清胜、王宪生、刘文侠、刘辉、祁锦英、李加才、杨国民、吴训臣、吴莫林、陈体国、陈鼎常、冼绍武、项中心、骆东平、徐子佑、曹衍清、彭仕主、程金辉。

由于我们水平有限，错误或不妥之处，敬请读者批评指正。

湖北省黄冈中学数学教研组

1991年10月17日

目 录

第一章	幂函数、指数函数和对数函数	1
第二章	三角函数	16
第三章	两角和与差的三角函数	25
第四章	反三角函数和简单的三角方程	34
第五章	不等式	40
第六章	数列 极限 数学归纳法	53
第七章	复数	69
第八章	排列组合 二项式定理	77
第九章	直线与平面	82
第十章	多面体与旋转体	97
第十一章	直线	110
第十二章	圆锥曲线 坐标平移	118
第十三章	参数方程 极坐标	135
代数综合练习题		142
三角综合练习题		147
立体几何综合练习题		152
解析几何综合练习题		157
综合练习题(一)		162
综合练习题(二)		166
解答与提示		172

第一章 幂函数、指数函数 和对数函数

知识要点 本章主要学习集合的概念及基本运算、映射和一一映射的概念、函数的概念及其图象与性质、指数方程和对数方程。

重点、难点 重点是有关集合的基本概念，映射、函数与反函数的概念，以及幂函数、指数和对数函数的概念、图象与性质，指数方程和对数方程的常用解法。难点是有关集合的各基本概念的涵义及相互之间的区别和联系、映射的概念、函数及反函数的概念。

应注意的问题 学习集合这一单元时，要正确理解集合、子集、交集、并集、补集等基本概念以及它们相互间的区别与联系，掌握它们的表示方法与符号，不要混淆“属于”与“包含”的涵义，要注意区别“包含”、“真包含”、“不包含”这些概念的不同涵义与不同表示法，防止把子集看作必是由原来集合的部分元素组成的集合的模糊认识。因为这种看法与 $\phi \subset A$ 、 $A \subseteq A$ 相矛盾。

学习映射这一单元时，要注意映射的定义中的两个集合的先后次序，不要把“集合 A 中的任何一个元素”中的“任何一个”误认为“某几个”，使得 A 中有的元素在 B 中找不到元素或有多个元素与之对应。关于一一映射容易出现的错误：一是忽视 A 中的不同元素，在 B 中应有不同的象；二是忽视 B 中每一个元素都有原象。有的同学在研究逆映射时，

就忽视了一一映射这个前提。

函数是一个非常重要的概念，为弄清这个概念的实质，应抓住其“三要素”：对应法则、定义域、值域。只有“三要素”分别完全相同的两个函数才是同一函数。确定函数的定义域（对于初等函数）大致原则如下：（1）“实数的原则”：偶次根号下的值应是非负的；（2）函数值存在的原则：有理分式函数的分母不能为零，对数函数 $y = \log_a x$ （ $a > 0, a \neq 1$ ）应有 $x > 0$ ；（3）有限个初等函数的四则运算而合成的函数的定义域是各初等函数定义域的交集；（4）复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域是“内层函数 $g(x)$ 的定义域与 $g(x)$ 满足于“外层函数” $f(z)$ （ $z = g(x)$ ）的定义域的 x 的集合的交集。确定函数值域的基本方法如下：（1）通过观察和变形确定；（2）通过求函数的最值确定；（3）利用判别式来求；（4）利用解方程确定；（5）通过求反函数的定义域来确定。

在学习函数的奇偶性和单调性时，要注意以下几点：（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性时，要注意所设 x 、 $-x$ 同时属于 $f(x)$ 的定义域；奇函数与偶函数的定义域都是对称于零的实数集，其图形分别关于原点、纵坐标对称；（2）讨论函数单调性时，要深刻领会定义中“属于”、“任意”两词的含义，需要指出的是：函数的单调性是对自变量变化的范围而言的，即说函数的单调区间是函数定义域的子集合。

在运用幂函数性质解题时，要注意区别 $n > 0$ 与 $n < 0$ 两种情况下幂函数的不同性质，不要忘记课本中列举的性质是对“在第一象限内”这个条件而言的。

学习指数函数与对数函数时，关键在于弄清楚底数 a 对

于函数的图象和性质的影响，不要混淆 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 时的不同情况，不要忘记底数 a 必须满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 的条件。在解对数方程时，一要尽可能避免失根（不要缩小定义域），二要进行验根，舍去增根。

练 习 题（一）

一、选择题（本书选择题正确答案唯一）

1. 下列几组对象可以构成集合的是（ ）；

- (A) 高一年级所有的胖子学生；
- (B) 高一级的所有“心灵美”的学生；
- (C) 高一年级的所有女学生；
- (D) 很小很小的数。

2. 下列命题正确的是（ ）；

- (A) $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in R\}$ 是有限集；
- (B) 0与 $\{0\}$ 表示同一集合；
- (C) $\sqrt{13} \in \{x | x \geq 2\sqrt{3}\}$ ；
- (D) $\{a, b, c, d, e, a\}$ 是有限集。

3. 方程组 $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 5x + y = 4 \end{cases}$ 的解集是（ ）；

- (A) $\{1, -1\}$ ；
- (B) $\{x, y | x = 1, y = -1\}$ ；
- (C) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ ；
- (D) $\{(x, y) | x = 1, y = -1\}$

或 $\{(1, -1)\}$ 。

4. 下列命题中正确的是（ ）；

(A) 无限集的子集是有限集;

(B) 采用“代表元素”的方法来描述一个集合, 其表示形式是唯一的;

(C) 空集 ϕ 与集合 $\{\phi\}$ 表示同一集合;

(D) 集合 $\{0\}$ 与集合 $\{\phi\}$ 都是单元素集.

5. 集合 $A = \{\text{正数}\}$, $B = \{\text{非负数}\}$, 则 $A \cap B =$

() ;

(A) ϕ ; (B) $\{0\}$; (C) A ; (D) B .

6. 若 I 为全集, 非空集 A, B 有 $A \subset B$, 下列集合中等于空集的是() ;

(A) $A \cap B$; (B) $\overline{A} \cap B$;

(C) $\overline{A} \cap \overline{B}$; (D) $A \cap \overline{B}$.

7. 已知集合 $P = \{m | m = 2k(k-1) + 1, k \in N\}$, $Q = \{n | n = 4(k-1) + 1, k \in N\}$, 则 P 与 Q 的关系是() ;

(A) $P \subset Q$; (B) $P = Q$;

(C) $P \supset Q$; (D) 以上都不正确.

8. 已知集合 $M = \{m | m \in N \text{ 且 } 8 - m \in N\}$, 则只含有二个元素的 M 集合的子集的个数为() ;

(A) 42个; (B) 21个;

(C) 15个; (D) 3个.

9. 下列从 P 到 Q 的各种对应关系 f 中, 不是映射的是() ;

(A) $P = \{0\} \cup N, Q = N, f: x \rightarrow |x - 3|$;

(B) $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Q = \{-4, -3, 0, 5, 12\}, f: x \rightarrow x(x - 4)$;

(C) $P = N, Q = \{-1, 1\}, f: x \rightarrow (-1)^x$;

(D) $P = Z$, $Q = \{\text{有理数}\}$, $f: x \rightarrow 2^x$.

10. 下面四组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 表示同一个函数的是 ();

(A) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$;

(B) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(C) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $g(x) = x + 2$;

(D) $f(x) = |x|$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$.

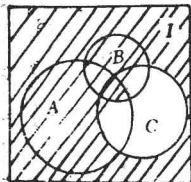
二、填空题

1. 已知 $I = \underline{R}$, $A = \{x | x^2 + x - 2 < 0\}$, $B = \{x | 0 < x \leq 4\}$, 则 $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$, $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \dots\}$, 试给出一个对应规则 f , 使得建立的对应是从 A 到 B 的映射, 那么这个所求的映射是 $f: A \rightarrow B, x \rightarrow y = \underline{\hspace{2cm}}$;

3. 图中阴影部分所表示的集合是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

4. 函数 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 值域



是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

5. 函数 $y = 1 + \sqrt{-x^2 + x}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 值域是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

$$6. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} x, & x \in (1, +\infty) \\ x^2, & x \in [-1, 1] \\ 2x+3, & x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

则 $f(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(\sin 45^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$.

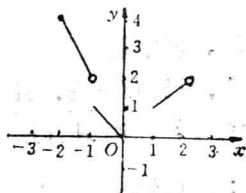
三、已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cap B = \{2\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 9\}$, 而 $\overline{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$, 求集合 A, B .

四、1. 根据图象写出函数 $f(x)$ 的表达式;

2. 若 $F(x) = \frac{|x|}{x}$,

$f(x) = x^2 - 2x - 3$, 作出

$R(x) = F(x) \cdot f(x)$ 的
图象.



五、已知 $A = \{1, 2, 3, k\}$, $B = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$, 且 $a, k \in \mathbb{N}$, $x \in A, y \in B$, $f: x \rightarrow y = 3x + 1$ 是 A 到 B 上的一个函数, 求 a, k 的值.

六、已知 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$), $A = \{x | x = f(x), x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x = f[f(x)], x \in \mathbb{R}\}$, 当 $A = \{-1, 1\}$ 时, 求集合 B (用列举法表示).

七、方程 $x^2 - ax + b = 0$ 两根为 α, β , 方程 $x^2 - bx + c = 0$ 两根为 γ, δ , 其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 互不相等, 设 $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $S = \{x | x = u + v, u, v \in M, u \neq v\} = \{5, 7, 8, 9, 10, 12\}$, $P = \{x | x = uv, u, v \in M, u \neq v\} = \{6, 10, 14, 15, 21, 35\}$, 求 a, b, c 的值.

练 习 题 (二)

一、选择题

1. 若 $-1 < a < 0$, 则有 ();

(A) $2^a < (\frac{1}{2})^a < 0.2^a$;

(B) $0.2^a < (\frac{1}{2})^a < 2^a$;

(C) $2^a < 0.2^a < (\frac{1}{2})^a$;

(D) $(\frac{1}{2})^a < 0.2^a < 2^a$.

2. 下列四个幂函数, 在 $(-\infty, 0)$ 上不是增函数的是 ();

(A) $y = x^{\frac{1}{3}}$; (B) $y = x^3$;

(C) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; (D) $y = x^4$.

3. 下列映射中, 有逆映射的是 ();

(A) $x \in R^+, y \in P = \{x | x \neq 0, x \in R\}$, $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$;

(B) $x \in R, y \in R, f: x \rightarrow y = |x|$;

(C) $x \in S = \{x | 0^\circ \leq x \leq 180^\circ\}$, $y \in P = [0, 1]$
 $f: x \rightarrow y = \sin x$.

(D) $x \in S = \{x | x \neq 0, x \in R\}$, $y \in P = \{y | y \neq 1, y \in R\}$, $f: x \rightarrow y = 1 - \frac{1}{x}$.

4. 若 $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $(-5, -2)$ 上 ();

- (A) 是增函数;
- (B) 是减函数;
- (C) 有部分是增函数, 有部分是减函数;
- (D) 不能确定其增减性.

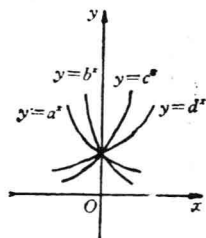
5. 函数 $f(x)$ 定义在 R 上, $f(x)$ 不恒为零, 且满足 $f(a+b) = f(a) + f(b)$, 则 $f(x)$ 是 ();

- (A) 偶函数不是奇函数;
- (B) 奇函数不是偶函数;
- (C) 既是奇函数又是偶函数;
- (D) 既不是奇函数也不是偶函数.

6. 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) 的反函数是 ();

- (A) $y = \pm \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$);
- (B) $y = \sqrt{1-x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$);
- (C) $y = -\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 0$);
- (D) 不存在.

7. 函数 $y = a^x$ 、 $y = b^x$ 、 $y = c^x$ 、 $y = d^x$ 的图象如图所示, 那么 a 、 b 、 c 、 d 之间的大小关系是 ();



- (A) $1 < a < b < c < d$;
- (B) $a < b < 1 < c < d$;
- (C) $b < a < 1 < d < c$;
- (D) $a < b < 1 < d < c$.

8. 如果 $y = \log_{(a^2-1)} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 且 $y = a^x$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 ();

(A) $|a| > 1$; (B) $|a| < \sqrt{2}$;

(C) $1 < |a| < \sqrt{2}$; (D) $1 < a < \sqrt{2}$.

9. 函数 $y = f(x)$ 与函数 $y = -f^{-1}(-x)$ 的图象的位置关系是 ();

(A) 关于直线 $y = x$ 对称;

(B) 关于直线 $x + y = 0$ 对称;

(C) 关于原点对称;

(D) 重合.

10. 函数 $y = |x + 2| + |1 - x| + |x|$ 为增函数, 必须在区间 ().

(A) $(-\infty, -2]$; (B) $[-2, 0]$;

(C) $[0, +\infty)$; (D) $(-\infty, 0]$.

二、填空题

1. 函数 $f(x) = 4^x$ ($x \in R$), 则方程 $f(x) \cdot f[f^{-1}(2^x + 2)]$ 的解是 _____;

2. 若函数 $y = \log_{\sqrt{\frac{-2}{2}}}(x^2 - 6x + 10)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 则此函数的最大值是 _____, 最小值是 _____;

3. 函数 $y = \sqrt{25 - 2x^2}$, $x \in [-\frac{5}{2}\sqrt{2}, 0]$ 的反函数是 _____;

4. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 5)$ 的递减区间是 _____;

5. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增, 那么

$f(-\pi)$ 与 $f(\log_2 \frac{1}{8})$ 中较大的一个是_____;

6. 已知 $\log_2 x = \log_3 y = \log_5 z < 0$, 则 $x^{\frac{1}{2}}$ 、 $y^{\frac{1}{3}}$ 、 $z^{\frac{1}{5}}$ 由小到大的排列顺序是_____.

○ 三、求下列函数的定义域和值域

1. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (3x + 5)}$;

2. $y = 5^{\frac{1}{x^2 - 3x + 2}}$.

四、解下列方程和方程组:

1. $3^{x+1} + 9^x - 18 = 0$;

2. $\begin{cases} \log_3 x + \log_5 y = 4, \\ \log_3 x \cdot \log_5 y = 3. \end{cases}$

五、已知函数 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ (常数 $a > 1 > b > 0$)

1. 求 $y = f(x)$ 的定义域;

2. 在函数 $y = f(x)$ 的图象上是否存在不同的两点, 使过这两点的直线平行于 x 轴?

3. 当 a, b 满足什么关系时, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒取正值?

○ 六、解方程关于 x 的 $\frac{\lg 2x}{\lg(x+a)} = 2$, 其中 $a \in R$.

七、已知 a 为实数, 对于 x 的一切实数值, 二次函数 $f(x) = x^2 - 4ax + 2a + 30$ 的值均为非负值, 求方程 $\frac{x}{a+3} = |a-1| + 1$ 的根的范围.

练习 题 (三)

一. 选择题

1. “ $x \in A \cap B$ ” 不成立的意思是 () ;

(A) $x \in \overline{B}$ 且 $x \in \overline{A}$; (B) $x \in \overline{A \cup B}$;

(C) $x \in \overline{A}$ 但 $x \in \overline{B}$; (D) $x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$ 。

2. 下列从 A 到 B 的映射中 (其中 $a \in A, b \in B$) 是一一映射的是 () ;

(A) $A = N, B = N$, 对应法则是 $a - b + 1 = 0$;

(B) $A = Z, B = Z$, 对应法则是 $b = 2a$;

(C) $A = R^-, B = R^+$, 对应法则是 $b = \frac{1}{a^2}$;

(D) $A = R, B = R$, 对应法则是 $b = \frac{1}{a^2 + 1}$ 。

3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x + y) = f(x) + f(y)$, ($x, y \in R$), 则下列各式不恒成立的是 () ;

(A) $f(0) = 0$;

(B) $f(x)f(-x) < 0$;

(C) $f(3) = 3f(1)$;

(D) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f(1)$ 。

4. 若函数 $f(x) = -(a^2 - 11a + 10)x^2 + (a - 1)x + 2$ 对 $x \in R$ 恒为正值, 则常数 a 的范围是 () ;

(A) $1 < a < 10$; (B) $1 < a < 9$;

(C) $1 \leq a < 9$; (D) $a < 1$ 或 $a > 9$ 。

5. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{4}{|x|}} - 1 + \log_3(x^2 - 2)$ 的定义域是()；

- (A) $\sqrt{2} < x \leq 4$; (B) $-4 \leq x < -\sqrt{2}$;
 (C) $-\sqrt{2} < x < 4$;
 (D) $\sqrt{2} < x \leq 4$ 或 $-4 \leq x < -\sqrt{2}$.

6. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + 2x\sqrt{x^2 + 1} + 1)$ 是()；

- (A) 偶函数; (B) 奇函数;
 (C) 既是奇函数又是偶函数;
 (D) 非奇非偶函数.

7. 如果 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则下列不等式总成立的是()；

- (A) $\log_a(1-a) > 1$;
 (B) $\log_a(1-a) < \log_{(1-a)} a$;
 (C) $a^{1-a} > (1-a)^a$;
 (D) $(1-a)^n < a^n$ ($n \in N$).

8. 设 $I = \{\text{最小的五个自然数}\}$, $A = \{x | 4^{x+2} + 2^{x+3} - 48 = 0\}$, $B = \{x | \lg x + \lg(3-x) - \lg 2 = 0\}$, 则 $\overline{A \cap B}$ 是()；

- (A) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
 (B) $\{1, 2, 3, 5\}$;
 (C) $\{1, 2\}$;
 (D) $\{3, 4, 5\}$.