西安交大
考研

数学考研新干线

2014版

线性代数

■ 主　编　张永怀

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

2014 版

数学考研新干线

线性代数

主编　张永怀

西安交通大学出版社

内容简介

本书各章均包括考试内容讲解、常考题型解题方法与技巧、练习题及练习题答案与提示.

不论是内容讲解，还是常考题型都特别注意各部分内容的联系与渗透，既注重介绍知识内容，又力图提高读者的应试水平.

本书既可作为考研基础、强化、冲刺等各阶段的参考书，也可作为非数学类专业的本、专科生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

2014 版数学考研新干线. 线性代数/张永怀主编. 一西安:西安交通大学出版社,2013.5
ISBN 978-7-5605-5058-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-题解
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 029266 号

书　　名 数学考研新干线　线性代数(2014 版)
主　　编 张永怀
责任编辑 叶　涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行部)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 西安明瑞印务有限公司

开　　本 787mm×1 092mm　1/16　**印张** 10　**字数** 200 千字
版次印次 2013 年 5 月第 7 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-5058-9/O·419
定　　价 19.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换.
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

2014版前言[1]

——从近几年的线性代数考研题谈起

无论是在本书中，还是在辅导课中，我都一再强调，线性代数的核心内容是矩阵、向量，必须将其方方面面都要理解掌握，只有这样才能对线性代数的整个内容做到驾轻就熟.现以近几年的线性代数试题为例，跟大家作个交流，相信读者自会有深刻体会.

1.（2013年数学一，二，三）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价　　(B) $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价

(C) $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价　　(D) $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价

解　（张老师在**提高班**讲**矩阵运算**时，仔细推导过**命题**：$\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，并由此得 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$，且要求同学仿照张老师的推导，证明：$\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，于是可得 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$.所以，最终有"**七字方针**"即**矩阵越乘秩越小**：$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}))$）.

因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，又 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组也可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示，所以选(B).

2.（2013年数学一，二，三）实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的充要条件为

(A) $a=0,b=2$　(B) $a=0,b$ 为任意常数　(C) $a=2,b=0$　(D) $a=2,b$ 为任意常数

解　（张老师在**提高班**讲**矩阵的相似关系**时，要求同学"在本教材上找空白处"记下**补充命题**：两个均可对角化的矩阵相似的充要条件是其特征值完全一样；而在讲**矩阵的合同关系**时，还要求同学"在本教材上找空白处"记下**补充命题**：两个实对称的矩阵合同的充要条件是其正负特征值的个数分别对应相同，而且，以上两个命题在**冲刺班**上给出了证明，并有例题运用）

因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称，故可对角化，而 $\boldsymbol{B}$ 已是对角阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充要条件为

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}\begin{vmatrix}\lambda&-a&-1\\0&\lambda-b&-a\\-\lambda&-a&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_1}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-b&-a\\-2a&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda2)-2a^2]$$

经比较等式两边 λ 同次幂的系数可得 $a=0,b$ 为任意常数，故选(B).

3.（2013年数学一，二，三）实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$，若 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0$ $(i,j=1,2,3)$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ______

解　（此题是本书例3.36的 $n=3$ 之情形，张老师在**提高班**讲**正交矩阵**时，详解了该例）

[1] 虽说是前言，但建议读者在全面复习过至少一遍之后再仔细看，尤其是考前必须看，一定会有极大收获.

依题意有 $\boldsymbol{A}^{*}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，因 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则不妨设 $a_{11}\neq 0$，于是 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}=-\sum\limits_{j=1}^{3}a_{1j}^{2}\leqslant -a_{11}^{2}<0$，又 $|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}^{*}|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^{n}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=(-1)^{n}|\boldsymbol{A}|$，$n=3$，所以得 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

4.（2013 年数学一，二，三）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，求常数 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有的 $\boldsymbol{C}$.

解　（张老师有一句话常挂在嘴边：**“线性方程组要么间接要么直接必会考到”**，此题是通过简单的**矩阵运算**转化为**含参数的数字型线性方程组求解问题**）

设 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，

可得线性方程组：$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}$，其增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right]$$

所以，当 $a=-1$，$b=0$ 时，方程组有解，所有的矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1+x_3+x_4 & -x_3\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，其中 x_3,x_4 为任意常数.

5.（2013 年数学一，二，三）设有三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$$

记向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$.

（Ⅰ）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

解　（此题与本书第六章练习题 3(2) 及第五章练习题 3(6) **高度相似**，张老师在**提高班**及**冲刺班均有讲解**，并有原话：**“不仅张老师对秩为 1 的矩阵感兴趣，命题组的专家也感兴趣.”**）

（Ⅰ）令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\sum\limits_{k=1}^{3}a_kx_k$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\sum\limits_{k=1}^{3}b_kx_k$，于是有

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$$

又因 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，故 f 的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）依题意，只要证明矩阵 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 2，1，0 即可. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$，于是 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})=2\boldsymbol{\alpha}$，而 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则 2 是 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值；又 $(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}$，而 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，则 1 是 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值；又 $r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=1+1=2$，可知 3 阶矩阵 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 还有特征值 0.

6.（2012 年数学一、二、三、农学联考）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,\ 0,\ c_1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\ 1,\ c_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,\ -1,\ c_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,\ 1,\ c_4)^{\mathrm{T}}$，其中 c_1，c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组中线性相关的为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

解 (**数字型向量组及抽象型向量组线性关系的判定是重中之重,均属反复强调训练的内容,此题是含参数的数字型向量组线性关系的判定问题,在模考点睛班中第一个例题与此题高度相似**,甚至比该题略难,可见于《**冲刺五套卷**》的数三卷二(6))

因为行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3|=-c_1$, $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4|=c_1$, 而 c_1 是否为零不确定. 又 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4|=0$, 所以选(C).

7. (2012 年数学一、二、三、农学联考)

(1)(数学一、二、三)设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,

若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(2)(农学联考)下列矩阵中不能相似于对角阵的为

(A) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

解 (1)(**此题与 2009 年数学二、三的一道考题高度相似**,可见于本书前言中)依题意 $\boldsymbol{A}$ **可对角化** 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1, 1, 2, 于是选项(C)及(D)立刻被排除,余下的做法参照 2009 年的那道题,最后选(B). 当然也可用**特例排除法**:取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$. (注:张老师在模考点睛班中要求考生**在考前一定要反复看本书的前言**).

(2)(2 阶矩阵**可对角化的充要条件**是有 2 个线性无关的特征向量)

(B)有两个不同的特征值,可对角化;(C)为**实对称**,可对角化;(D)**的秩为** 1,其特征值为 0 和 3(迹),故也可对角化,所以选(A).

8. (2012 年数学一、二、三、农学联考)

(1)(数学一)设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维单位列向量, $\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的秩为________.

(2)(数学二、三)设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=3$, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**,若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$________.

(3)(农学联考)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}|=$________.

解 (1)(**对于秩为 1 的矩阵**,张老师总是反复强调,如本书中例 5.1、例 3.29、例 2.5 及冲刺五套卷的数一卷四(5)和冲刺练习题的一(6)等)

依题意 $\boldsymbol{\alpha}$ 是实的且 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$, 则必有 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=1$, 于是知 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 0, 0, 即为 1, 0, 0, 所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 0, 1, 1, 又因为 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 显然为实对称,可对角化,故 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})=r(\mathrm{diag}(0, 1, 1))=2$(实际上,张老师在冲刺班上还通过一个例题,阐明了一个结论:**可与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有 1 或 0 作特征值时,必有** $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.)

(2) 依题意 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=-|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|^{3-1}=-27$.

(3) **解法一** $|A^*B|=|A^*|\cdot|B|=|A|^{2-1}\cdot|A|=|A|^2=9$.

解法二 因 $A^*=\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$,则 $|A^*|=3$, 于是 $|A^*B|=3|B|=9$.

9. (2012年数学一、二、三、农学联考)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(Ⅰ)计算 $|A|$;(Ⅱ)当实数 a 为何值时,方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解,并求通解.

解 **(这是一个含参数的数字型线性方程组,且系数矩阵刚好是方阵,比较容易)**

(Ⅰ) $|A|\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}}1\cdot1+a\cdot(-1)^{4+1}\cdot a^3=1-a^4$

(Ⅱ)要使 $AX=\beta$ 有无穷多解,则必有 $r(A,\beta)=r(A)<n=4$, 于是 $|A|=0$,所以得 $a=1$ 或 -1. 而当 $a=1$ 时,

$$(A,\beta)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\ r(A,\beta)=4\neq r(A)=3,\text{方程组无解.}$$

当 $a=-1$ 时,

$$(A,\beta)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则 $r(A,\beta)=r(A)=3<n=4$, 易得方程组通解为:$k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+(0,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

10. (2012年数学一、二、三)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X$ 的秩为 2

(Ⅰ)求实数 a 的值;(Ⅱ)利用正交变换 $X=QY$ 将 f 化为标准形.

解 (Ⅰ)二次型 f 的秩即为其实对称矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的秩,故 $r(A^{\mathrm{T}}A)=2$

解法一 **(利用本书例 2.56 的结论:当 A 为实矩阵时,必有 $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$,于是又有 $r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r(AA^{\mathrm{T}})$,而且,张老师在模考点睛班中最后又强调过)**

因 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)=2$, 而 $A\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$,故有 $a=-1$.

解法二(若不知道解法一,则可以采用比较繁琐的方法,只要运算细心些,也可顺利完成)

注意到 $A^{\mathrm{T}}A$ 的对称性，则未必有较大工作量可得 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{bmatrix}$

于是有 $0=|A^{\mathrm{T}}A|\xlongequal{r_3-\frac{1}{2}(1-a)r_1}\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\0&1-a&3+a^2-\frac{1}{2}(1-a)^2\end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第 1 列}}a^4+2a^3+4a^2+6a+3$

$=a^4+2a^3+a^2+3(a^2+2a+1)$

$=a^2(a+1)^2+3(a+1)^2=(a+1)^2(a^2+3)$

所以得 $a=-1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，

由 $0=|\lambda E-A^{\mathrm{T}}A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+(-1)c_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\2-\lambda&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\-1&\lambda-2&-2\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&\lambda-2&-4\\0&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-6)\lambda$

所以得 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=0$，分别代入 $(\lambda E-A^{\mathrm{T}}A)X=\mathbf{0}$ 得对应的特征向量

$\xi_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\xi_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\xi_3=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，令 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，则 Q 为正交矩阵，且令 $X=QY$，则可将 f 化为标准形：$2y_1^2+6y_2^2$.

11.（2012 年农学联考）

设 $A=\begin{bmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&b&0\end{bmatrix}$，$\alpha=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 为 A 的特征向量

（Ⅰ）求 a，b 的值；（Ⅱ）求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

解（这是典型的**反问题**及**对角化问题**，张老师在模考点睛班刚好讲过这样一道题：设 $\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $A=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&a&3\\b&0&-1\end{bmatrix}$ 的特征向量，研究 A 可否对角化）

（Ⅰ）设 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$，即

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$，所以得 $\lambda=-2, a=0, b=1$.

(Ⅱ) 由 $0=|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1-\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$，由 $(1\cdot \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2=(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha})$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

12.（2011 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二、三）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$ (C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

(2)（农学联考）将二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行与第 2 行得单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解（**张老师在强化班、冲刺班及模点班上均反复要求同学们对矩阵的初等变换要熟练到会用初等矩阵来表达**，且在本书中有整整一页的篇幅详细介绍了初等矩阵，对于本书的读者或听过课的同学来说，这两题均属于送分题）

(1) 依题意有 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}$（单位矩阵），则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$，选(D).

(2) 依题意有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，选(D).

13.（2011 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二）设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$

(2)（数学三、农学联考）设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个线性无关的解向量，k_1, k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$ (B) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$ (D) $\dfrac{\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3}{2}+k_1(\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$

解 (这两题均属于**抽象线性方程组求解**,张老师在课上举过不少类似的例子,本书中也**有十分类似的**例 4.9(3)、例 4.10(7)及例 4.12)

(1)依题意知 $4-r(\boldsymbol{A})=1$,则 $r(\boldsymbol{A})=3$,于是 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,所以 $\boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{0}$的基础解系含 3 个线性无关的解(于是(A)、(B)被排除),又 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+1\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 也线性相关(于是(C)被排除),故只能选(D).

注 实际上,由张老师在课上反复强调过的**"明星公式"**:$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,再由**矩阵分块运算** $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}_4)$可知 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1\sim4)$均为 $\boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{0}$的解向量,所以由上面的分析可知 $\boldsymbol{A}^*x=\boldsymbol{0}$的基础解系可为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,或可为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$.

(2)(**要掌握线性方程组解的性质、结构**)依题意知 $1\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3$,又易知 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$的两个线性无关解,则 $3-r(\boldsymbol{A})\geqslant2$(于是(A)、(B)被排除),故 $r(\boldsymbol{A})=1$,于是 $\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1$、$\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_1$ 是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$的基础解系;又 $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)$是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{0}$的解而非 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的(于是(D)被排除),实际上,$\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)$是 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的解,故选(C).

14. (2011 年数学一、二、三)

(1)(数学一)若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$,经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$,则 $a=$______.

(2)(数学二)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,则 f 的正惯性指数为______.

(3)(数学三)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 1,$\boldsymbol{A}$ 为实对称,且 A 的各行元素之和为 3,则 f 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为______.

解 (这三个题均是二次型问题,实际上均涉及与二次型一一对应的**实对称矩阵的特征值**)

(1)易得二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$,依题意有 $r(\boldsymbol{A})=2$,于是 $|\boldsymbol{A}|=0$,故得 $a=1$.

(2)易得二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}$,而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$,故 f 的正惯性指数为 2.

注 当然也可利用拉格朗日配方法:$f=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2$,作可逆线性变换 $x_1+x_2+x_3=y_1,x_2=y_2,x_3=y_3$ 得 f 的标准形 $y_1^2+2y_2^2$,故其正惯性指数为 2.

(3)(对于**秩为 1 的矩阵**,张老师总是强调了又强调,而**方阵各行元素之和均为同一个数**的问题也讲过,本书中也有些类似的题:例 5.1、第五章练习题 2(2),强化班课上也讲过这两个例子)

依题意有 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 A 有特征值 3，又 $r(A)=1$，所以 A 有二重特征值 0，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $3y_1^2$（或 $3y_2^2$，或 $3y_3^2$）.

15.（2011 年农学联考）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，且 3 阶矩阵 B 满足 $ABC=D$，则 $|B^{-1}|=$______.

解（此题需利用**方阵行列式的性质**，但太简单，缺乏区分度）

因 $|A||B||C|=|D|$，故 $|B^{-1}|=\dfrac{1}{|B|}=\dfrac{|A||C|}{|D|}=\dfrac{-1\times 1}{6}=-\dfrac{1}{6}$.

16.（2011 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二、三）设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

（Ⅰ）求 a 的值；（Ⅱ）将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(2)（农学联考）已知 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,2)^T$，$\alpha_3=(1,-1,4)^T$，$\beta=(1,0,a)^T$，问 a 为何值时，

（Ⅰ）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；（Ⅱ）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，并写出一般表达式.

解（这两个题均与**向量的线性表示**有关，属重点辅导的内容，本书中也有较多类似的题，例 3.8、例 3.23、例 3.25 及第三章练习题 2(2)、3(2) 都是这类问题）

(1)（Ⅰ）依题意必有 β_1,β_2,β_3 线性相关，于是由行列式 $\det(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=0$ 易得 $a=5$.

（Ⅱ）因 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}$，故有 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2+(-1)\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2+(-2)\alpha_3$.

(2)（Ⅰ）因 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-3&-2\\0&0&0&a-3\end{pmatrix}$，故 $a\neq 3$ 合题意.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $a=3$ 时，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而此时，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&3&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故有 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$.

17.（2011 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二、三）A 为三阶实对称矩阵，A 的秩 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，

（Ⅰ）求 A 的特征值与特征向量；（Ⅱ）求矩阵 A.

(2)(农学联考)已知 1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&a&1\\1&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$ 的二重特征值,

(Ⅰ)求 a 的值;(Ⅱ)求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ,使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 (这两个题从大类上来说均属与特征值特征向量有关的反问题以及对角化问题,这是反复强调的重点)

(1)(张老师在课上反复说过**"当发现题目与特征值(特征向量)有关时,要注意对已知条件进行适当的变形改写"**,本书中有例 5.17、5.18 及第五章练习题 3(5),其关键所在是**矩阵分块运算**)

(Ⅰ)记 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$,$\alpha_2=(1,0,1)^T$,则 $A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$,即 $A\alpha_1=(-1)\alpha_1$,$A\alpha_2=\alpha_2$,所以 A 有特征值 $\lambda_1=-1$,$\lambda_2=1$,对应的特征向量分别为 α_1,α_2. 又 $r(A)=2$,所以 A 有特征值 $\lambda_3=0$,设对应的特征向量为 α_3,A 为实对称,则 α_3 与 α_1,α_2 均正交,于是易得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$. 综上,A 的特征值为 $-1,1,0$,对应的特征向量为 $k_1\alpha_1$,$k_2\alpha_2$,$k_3\alpha_3$(k_1,k_2,k_3 为任意非零常数).

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,若记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,$\Lambda=\mathrm{diag}(-1,1,0)$,则 $P^{-1}AP=\Lambda$,于是得 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$.

注 听过张老师模点班课的同学,如果想到利用**求解非一般矩阵方程**的方法,也可以做出此题:因 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}A^T=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,令 $A^T=(x_1,x_2,x_3)$,则由 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}x_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,直接观察易得 $x_1=(0,k_1,1)^T$,$x_2=(0,k_2,0)^T$,$x_3=(1,k_3,0)^T$(k_1,k_2,k_3 为任意常数),于是 $A=\begin{bmatrix}0&k_1&1\\0&k_2&0\\1&k_3&0\end{bmatrix}$,又由 $A^T=A$,$r(A)=2$,得 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,继续可求得 A 的特征值、特征向量.

(2)(Ⅰ)因 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)[\lambda^2-(a+1)]$,而 1 是 A 的二重特征值,故有 $a=0$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$,$\lambda_3=-1$,易求得对应的特征向量 $\alpha_1=(1,0,1)^T$,$\alpha_2=(1,1,1)^T$,$\alpha_3=(-1,1,1)^T$,令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$($P$ 可逆),$\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,-1)$,则 $P^{-1}AP=\Lambda$.

18.(2010 年数学一)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,且 $AB=E$,其中 E 为 m 阶单位矩阵,则

(A) $r(A)=r(B)=m$　　(B) $r(A)=m$,$r(B)=n$

(C) $r(A)=n$,$r(B)=m$　　(D) $r(A)=r(B)=n$

解法一(直接法,利用**"七字方针"即矩阵越乘秩越小**以及矩阵的秩不超过其行数及列数中较小者,在模考点睛班中第五个例题与该题几乎一样,可见于冲刺五套卷的数二卷二(7))

因 $m=r(\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant m$,故 $r(\boldsymbol{A})=m$,类似可得 $r(\boldsymbol{B})=m$,选(A).

解法二(特例排除法,模考点睛班中给同学们也举过如下的例子)

取满足题目所有条件的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,显然,选项(B)、(C)及(D)对于这里的 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均不对,故选(A)(因为是单项选择题).

19.(2010 年农学联考)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则行列式 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=$________.

解(如果同学们对老师反复强调过的**"七字方针"**很熟的话,此题根本无需作数字运算)因 3×3 的矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的秩 $\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant2$,故填 0.

20.(2010 年数学一、二、三、农学联考)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,若 $r(\boldsymbol{A})=3$,则 $\boldsymbol{A}$ 相似于

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$

解法一(要知道**实对称矩阵可对角化以及特征值、特征向量的性质**)因 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,故 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 -1,又 $r(\boldsymbol{A})=3$,且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,故其相似对角阵的主对角元有 3 个 -1 和 1 个 0,选(D).

解法二(实际上,该题中条件"实对称矩阵"可以换成"可对角化矩阵"或者干脆都不要,照样可以得出结论,本书中例 5.18 就是几乎一样的题,而在强化班、冲刺班及模考点睛班都有**"抽象矩阵可否对角化"的问题介绍,需会运用简单的矩阵分块运算**)

因 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$,令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,则易得 $\boldsymbol{A\alpha}_j=(-1)\boldsymbol{\alpha}_j$ $(j=1\sim4)$,又 $r(\boldsymbol{A})=3$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中必有三个线性无关(当然非零),故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1 有三个线性无关的特征向量,显然 $\boldsymbol{A}$ 还有特征值 0,于是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有四个线性无关的特征向量,$\boldsymbol{A}$ 可对角化,当然选(D).

解法三(在冲刺五套卷中,数三卷三(21)中有类似作法,仍无需实对称条件)因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant4$;又因 $r(-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,而 $(-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$,则 $4=r(\boldsymbol{E})\leqslant r(-\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$,故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=4$,已知 $r(\boldsymbol{A})=3$,于是 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=1$. 所以,$\boldsymbol{A}$ 有特征值 0,属于它有 $4-r(\boldsymbol{A})=1$ 个线性无关的特征向量(即 0 是单特征值),$\boldsymbol{A}$ 有特征值 -1,属于它有 $4-r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=3$ 个线性无关的特征向量(即 -1 是三重特征值),于是 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有四个线性无关特征向量,可对角化,且 $\boldsymbol{A}$ 的相似对角阵为 $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$,故选(D).

注 显然,解法二、三更具一般性,且未用到实对称条件,或者说,该题若将实对称条件去

掉的话，它的区分度会更大.

解法四（特例排除法）就取 $A=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,0)$，显然，$A$ 满足题中所有条件，而选项(A)、(B)、(C)均不对，选(D).

21.（2010 年数学二、三、农学联考）

设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，下列命题中正确的是

(A) 若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\leqslant s$　　(B) 若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$

(C) 若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\leqslant s$　　(D) 若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$

解法一（直接法，对向量组的秩及向量组间的线性表示关系与秩的关系要清楚）

因向量组Ⅰ可由Ⅱ性线表示，故 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})\leqslant s$，而当Ⅰ线性无关时，$r(\text{Ⅰ})=r$，于是必有 $r\leqslant s$，选(A).

解法二（特例排除法）① 取Ⅰ：$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，$\alpha_3=(0,0,0)$，Ⅱ：$\beta_1=(1,0,0)$，$\beta_2=(0,1,0)$，$\beta_3=(0,0,1)$，显然Ⅰ线性相关，且Ⅰ可由Ⅱ线性表示，而 $r=s=3$，则(B)不对；② 取Ⅰ与上述①中取法相同，而Ⅱ：β_1,β_2，此时，Ⅱ线性无关，且Ⅰ可由Ⅱ线性表示，而 $r=3>s=2$，故(C)不对；③ 若刚好与②中取法相反，即Ⅰ：$\alpha_1=(1,0,0)$，$\alpha_2=(0,1,0)$，Ⅱ：$\beta_1=(1,0,0)$，$\beta_2=(0,1,0)$，$\beta_3=(0,0,0)$，则Ⅰ可由Ⅱ线性表示，且Ⅱ线性相关，而 $r=2<s=3$，(D)不对.

22.（2010 年数学一）

设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 形成的向量空间的维数是 2，则 $a=$________.

解　依题意知，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，于是对矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换化为行阶梯形，立即可得 $a=6$.

23.（2010 年数学二、三）

设 A、B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$________.

解　（强化班时讲过本书中例 1.16 等，特别强调过要设法将两矩阵和的形式通过矩阵运算化成几个矩阵乘积的样子以便利用行列式性质，并提醒同学切勿犯低级错误：$|A+B^{-1}|=|A|+|B^{-1}|$）因 $A+B^{-1}=A(E+A^{-1}B^{-1})=A(B+A^{-1})B^{-1}$，故 $|A+B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$.

24.（2010 年数学一、二、三、农学联考）

(1)（数学一、二、三）设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有两个不同的解，

(Ⅰ) 求 λ 和 a 的值；(Ⅱ) 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(2)（农学联考）设 $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\0&a-1&0\\1&1&a\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有两个不同的解，求 a 的值及线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解　（线性方程组的方方面面要么间接要么直接地必会考到——这是张老师在讲课中的

原话，此处，首先要知道一个非齐次线性方程组有两个不同的解实际上就意味着 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3$（未知量个数），即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多组解）

(1)（Ⅰ）对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$ 作一系列初等行变换先化为行阶梯形：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+(-\lambda)r_1}\cdots$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right]\xlongequal{\text{记作}}\boldsymbol{B}$$

因依题意必有 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})<3$，故必有 $1-\lambda^2=0, a-\lambda+1=0$，于是 $\lambda=1$ 或 -1，而 $a=\lambda-1$. 又当 $\lambda=1$ 时，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})>r(\boldsymbol{A})$，方程组无解，所以必有 $\lambda=-1$，则 $a=-2$，此时，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A})=2<3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，将 $\lambda=-1, a=-2$ 代入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中，于是得与原方程组同解的方程组：$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\ -2x_2=1\end{cases}$，故方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k(1,0,1)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数）.

(2) 与(1)的解法完全类似可得 $a=-1$，则通解与(1)一样.

25.（2010 年数学一）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$（其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵）在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$；（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

解（要知道 f 在正交变换下的标准形中各变元平方项前面的系数恰为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，而 $\boldsymbol{Q}$ 的各列分别是对应于各特征值的特征向量，这些知识点在讲课中都反复强调过）

（Ⅰ）（这实际上是反问题，在本书中例 5.22、5.28 都是十分类似的问题）

依题意知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_3 的特征向量有 $\boldsymbol{q}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，现设 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则它必与 $\boldsymbol{q}_3$ 正交，于是 $x_1+x_3=0$，得 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，显然 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 已正交，再单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{q}_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，于是取正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$，则必有 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,1,0)$，于是得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

（Ⅱ）（需了解实对称矩阵正定的常用充要条件之一：所有特征值均为正数，当然首先还要了解特征值的性质）由（Ⅰ）知实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,0，于是显然仍为实对称矩阵的 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2,2,1 均为正数，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 正定.

注 当然，因在（Ⅰ）中已将 $\boldsymbol{A}$ 求出，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 也已数字化，可利用霍尔维茨定理计算其各阶顺序主子式均为正数，显然要比考察特征值繁琐一些.

26.（2010 年数学二、三）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，若 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列为 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求 a，$\boldsymbol{Q}$.

解 （此题与上一题有类似的地方）设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，依题意知 $\boldsymbol{Q}$ 的 1～3 列分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，于是有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}_1=\lambda_1\boldsymbol{q}_1$，即

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\text{，亦即}\begin{cases}-2+4=\lambda_1\\ -1+6+a=2\lambda_1\\ 4+2a=\lambda_1\end{cases}\text{，由此得 }\lambda_1=2,a=-1.$$

将 $a=-1$ 代入 $\boldsymbol{A}$ 中，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-4,\lambda_3=5$. 又由 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一非零解 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，再由 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得一非零解 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，于是得正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)$.

注 解答中略去了求特征值 λ_2,λ_3 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的具体过程，读者不妨一试，必会觉得该题运算量稍微偏大.

27.（2010 年农学联考）

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & a\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 $\lambda_1=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值

（Ⅰ）求 a 的值；（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量.

解 （要熟知基本概念：$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的所有根即为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值，而 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有非零解即为 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的所有特征向量）

（Ⅰ）依题意有 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，由此得 $a=-2$.

（Ⅱ）将 $a=-2$ 代入 $\boldsymbol{A}$ 中，并由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=2$. 由 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的所有特征向量为

$$k(1,-2,3)^{\mathrm{T}}\text{（其中 }k\text{ 为任意非零常数）.}$$

由 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得其基础解系 $(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 属于 2 的所有特征向量为

$$k_1(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,1)^{\mathrm{T}}\text{（其中 }k_1,k_2\text{ 为不同时为零的任意常数）.}$$

28.（2009 年数学一）

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

解法一(直接法,要会运用简单的矩阵分块运算并对矩阵运算及求逆很熟)因

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}_1,(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}_2,\text{故}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=$$

$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$,所以所求过渡矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$,

选(A).

注 当然,如果观察能力很强,直接可得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}.$$

解法二(试算排除法)以 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3\right)$ 与四个选项中每个矩阵的第 1 列相乘之和,立即可排除选项(B)、(C)和(D).

29.(2009 年数学二、三)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 为 3 阶矩阵,且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为

(A) $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解 (要会运用简单的矩阵分块运算)因 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}}\boldsymbol{PC}$,故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$

$$(\boldsymbol{PC})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APC}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$