21世纪大学公共数学系列教材

微积分全程辅导

● 张汉林　范周田　编著

Math

中国人民大学出版社

21世纪大学公共数学系列教材

微积分
全程辅导

● 张汉林　范周田　编著

Math

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

微积分全程辅导/张汉林，范周田编著．一北京：中国人民大学出版社，2013.7
21世纪大学公共数学系列教材
ISBN 978-7-300-17861-5

Ⅰ．①微… Ⅱ．①张…②范… Ⅲ．①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第169444号

21世纪大学公共数学系列教材
微积分全程辅导
张汉林　范周田　编著
Weijifen Quancheng Fudao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2013年8月第1版
印　　张	13.5插页1	**印　　次**	2013年8月第1次印刷
字　　数	317 000	**定　　价**	25.00元

前言

《微积分习题全解》是《微积分》教材的配套辅导书.

微积分是众多专业课程的基础,其工具性尽人皆知,但更重要的是其思想性.因此,在微积分的教学与学习中,尤其重要的是思想方法的训练养成.《微积分习题全解》给出了《微积分》教材所有习题的详细解答,其主要目的是为教材的使用者提供一个对照答案,为了提高数学素养,强烈建议同学们独立完成所有练习之后再来参阅本书.

书中开始部分给出了《微积分》课程教学大纲和微积分考研大纲,可以此对微积分课程的内容和要求有总体的了解.各章具有完全类似的结构:第一部分是本章的要点提示;第二部分是习题详细解答.

由编者水平和时间所限,对书中不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编者

2013年春

目 录

《微积分》课程教学大纲

课程的性质、目的和任务

本课程是高等学校经济类本科各专业学生的一门必修的重要的基础理论课，它是为培养我国社会主义现代化建设所需要的高质量的建设人才服务的.

通过本课程的学习，要使学生获得一元函数微积分学、多元函数微积分学、无穷级数、常微分方程与差分方程等方面的基本概念、基本理论和基本运算技能，为后续课程的学习奠定必要的数学基础.

在课程的教学过程中，要通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力、综合解题能力、数学建模与实践能力以及自学能力.

课程教学的主要内容与基本要求

一、函数、极限与连续

主要内容：

函数的概念及其表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，函数关系的建立；反函数、复合函数，基本初等函数的性质及其图形特征，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立；常用经济函数；数列极限与函数极限的定义和性质，函数的左、右极限，无穷小与无穷大；无穷小的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则和两个重要极限；连续函数的概念，函数间断点的分类；初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(最大值与最小值定理和介值定理).

基本要求：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法；

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性与奇偶性；

3. 能将简单实际问题中的函数关系表达出来；

4. 理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念；

5. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念及应用；

6. 会建立简单应用问题的函数关系，熟悉几种常用的经济函数；

7. 了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念；

8. 了解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小的阶的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系；

9. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，熟练掌握极限的四则运算法则，熟练掌握两个重要极限的应用；

10. 理解函数连续性的概念(包括左、右连续)与函数间断的概念，掌握间断点的分类；

11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性定理、最大值与最小值定理和介值定理)及其简单应用.

二、导数与微分

主要内容：

导数的概念，导数的几何意义和经济意义，函数的可导性与连续性之间的关系；平面曲线的切线和法线；基本初等函数的导数，导数的四则运算，反函数的导数，复合函数的求导法则；导数的应用；高阶导数的概念，某些简单函数的 n 阶导数；隐函数及参数方程所确定的函数的导数；微分的概念，微分的四则运算，一阶微分形式的不变性，函数的线性化，利用微分进行近似计算，误差计算；一阶微分形式的不变性，微分在近似计算中的应用.

基本要求：

1. 理解导数的概念，了解导数的几何意义与经济意义，理解函数的可导性与连续性之间的关系；

2. 熟练掌握基本初等函数的导数公式；

3. 熟练掌握导数的四则运算法则；

4. 熟练掌握反函数求导法则；

5. 熟练掌握复合函数求导法则；

6. 掌握隐函数求导法则与对数求导法则；

7. 掌握作为变化率的导数在几何、物理尤其是在经济学中的应用；

8. 了解高阶导数的概念，会求二阶、三阶导数及一些简单的 n 阶导数；

9. 了解微分的概念、可导与可微、导数与微分的关系以及一阶微分形式的不变性，熟练掌握求微分的方法.

三、中值定理与导数的应用

主要内容：

罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理；洛必达法则；泰勒中值定理；函数的单调性及其

判别法，曲线的凹凸性及其判别法，函数图形的拐点及其求法，函数的极值及其求法；函数最大值和最小值的求法及其在抛射体运动和经济中的应用；渐近线，函数图形的描绘.

基本要求：

1. 理解并会运用罗尔定理，拉格朗日中值定理和泰勒中值定理；

2. 了解并会运用柯西中值定理；

3. 理解函数的极值概念，掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法，掌握函数最大值和最小值的求法及其在抛射体运动和经济中的应用；

4. 会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点，会求水平、垂直和斜渐近线，会描绘函数的图形；

5. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.

四、不定积分

主要内容：

原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质，基本积分公式；不定积分的换元积分法与分部积分法；有理函数、三角函数和简单无理函数的不定积分，以及可化为有理函数的积分.

基本要求：

1. 理解原函数的概念、理解不定积分的概念；

2. 熟练掌握不定积分的基本性质与基本积分公式；

3. 熟练掌握计算不定积分的凑微分法、换元积分法和分部积分法；

4. 会求有理函数的不定积分.

五、定积分及其应用

主要内容：

定积分的概念与定积分的近似计算；定积分的性质，定积分中值定理；积分上限的函数及其导数，牛顿-莱布尼茨公式；定积分的换元积分法与分部积分法；无穷限的广义积分，无界函数的广义积分；定积分的几何应用：微元法，平面图形的面积，旋转体的体积，平行截面面积已知的离体的体积；积分在经济分析中的应用.

基本要求：

1. 理解定积分的概念和性质；

2. 熟练掌握定积分的换元积分法和分部积分法；

3. 理解变上限的定积分作为其上限的函数及其求导定理，熟悉牛顿-莱布尼茨公式；

4. 会利用定积分计算平面图形的面积和旋转体的体积，会利用定积分求解一些简单的经济应用问题；

5. 了解广义积分收敛与发散的概念，掌握计算广义积分的基本方法.

六、多元函数微积分

主要内容：

空间直角坐标系，空间两点间的距离，平面与曲面方程简介；多元函数的概念，二元函数的极限，二元函数的连续性；偏导数的概念与计算，高阶偏导数；多元函数全微分的概念，全

微分存在的必要条件和充分条件，标准线性近似的概念，*全微分在近似计算中的应用；多元函数的复合函数微分法，全微分形式不变性；多元函数的隐函数微分法；多元函数的极值及其求法，多元函数极值的必要条件，二元函数极值的充分条件，多元函数条件极值的概念及其求法（拉格朗日乘数法），多元函数的最大值、最小值及其简单应用；二重积分的概念与性质，直角坐标系下二重积分的计算，极坐标系下二重积分的计算.

基本要求：

1. 了解空间坐标系的有关概念，会求两点之间的距离；
2. 了解平面上点的邻域、区域以及其边界点、内点等概念；
3. 了解多元函数的概念，了解二元函数的表示法与几何意义；
4. 了解二元函数的极限与连续的直观意义；
5. 理解多元函数的偏导数与全微分的概念，了解二元函数的线性化近似，熟练掌握求偏导数与全微分的方法，掌握求多元函数偏导数以及隐函数的偏导数的方法；
6. 了解二元函数极值与条件极值的概念，掌握二元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值与最小值，会求解一些简单的应用题；
7. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分在直角坐标系与极坐标系下的计算方法，会计算无界区域上的较简单的二重积分.

七、无穷级数

主要内容：

常数项级数收敛与发散的概念，收敛级数的和的概念，收敛级数的基本性质，级数收敛的必要条件，几何级数与 p－级数；正项级数的比较审敛法、达朗贝尔比值审敛法、根值审敛法；交错级数的莱布尼茨定理，绝对收敛与条件收敛的概念；函数项级数的收敛域与和函数的概念，幂级数的收敛半径、收敛区间（指开区间）和收敛域，幂级数在其收敛区间内的基本性质；简单幂级数的和函数的求法，函数可展开为泰勒级数的充分必要条件，n 阶泰勒多项式，麦克劳林展开式，*函数的幂级数展开式的应用.

基本要求：

1. 了解级数的收敛、发散以及收敛级数的和等概念；
2. 掌握几何级数、p－级数的收敛与发散的条件，了解调和级数的敛散性；
3. 掌握收敛级数的必要条件及收敛级数的基本性质；
4. 熟练掌握正项级数的比较判别法、达朗贝尔（比值）判别法与柯西（根值）判别法；
5. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法；
6. 了解任意项级数的绝对收敛与条件收敛的概念，掌握绝对收敛与条件收敛的判别法；
7. 了解幂级数及其收敛半径、收敛区域、和函数等概念，会求收敛半径和收敛域；
8. 了解幂级数在收敛区间内的基本性质（和函数的连续性，逐项微分和逐项积分），会求一些简单幂级数的和函数；
9. 掌握 e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^n$ 的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单的函数间接展开成幂级数.

八、微分方程与差分方程

主要内容：

常微分方程的概念，微分方程的解、通解、初始条件和特解；变量可分离的方程，齐次方程；一阶线性方程；* 可降阶的高阶微分方程；二阶线性微分方程解的结构；二阶常系数齐次线性微分方程及其通解，自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与乘积的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法；差分方程；微分方程的简单应用.

基本要求：

1. 了解微分方程的阶、通解、初始条件和特解等概念；

2. 掌握变量可分离的方程、齐次方程和一阶线性方程的求解方法；

3. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程和自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数，以及它们的和与乘积的二阶常系数非齐次线性微分方程的解法；

4. 了解差分与差分方程及其通解与特解等概念；

5. 掌握一阶常系数线性差分方程的求解方法；

6. 会应用微分方程和差分方程求解一些简单的经济应用问题.

微积分考研大纲

一、函数、极限与连续

1. 考试内容

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数，反函数，分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义及其性质，函数的左极限和右极限，无穷小量和无穷大量的概念及其关系，无穷小量的性质及无穷小量的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则，单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限，函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

2. 考试要求

(1)理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

(2)了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3)理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

(4)掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

(5)了解数列极限和函数极限，包括左极限与右极限的概念.

(6)了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(7)理解无穷小的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法，了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

(8)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

(9)了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质：有界性、最大值和最小值定理、介值定理，并会应用这些性质.

二、一元函数微分学

1. 考试内容

导数和微分的概念，导数的几何意义和经济意义，函数的可导性与连续性之间的关系，平面曲线的切线与法线，导数和微分的四则运算，基本初等函数的导数，复合函数，反函数和隐函数的微分法，高阶导数，一阶微分形式的不变性，微分中值定理，洛必达(L'Hospital)法则，函数单调性的判别，函数的极值，函数图形的凹凸性、拐点及渐近线，函数图形的描绘，函数的最大值与最小值.

2. 考试要求

(1)理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念)，会求平面曲线的切线方程和法线方程.

(2)掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，会求分段函数的导数，会求反函数与隐函数的导数.

(3)了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数.

(4)了解微分的概念、导数与微分之间的关系以及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分.

(5)理解罗尔定理、拉格朗日中值定理，了解泰勒定理、柯西中值定理，掌握这四个定理的简单应用.

(6)会用洛必达法则求极限.

(7)掌握函数单调性的判别方法，了解函数极值的概念，掌握函数极值、最大值和最小值的求法及其应用.

(8)会用导数判断函数图形的凹凸性，会求函数图形的拐点和渐近线.

(9)会描述简单函数的图形.

三、一元函数积分学

1. 考试内容

原函数和不定积分的概念，不定积分的基本性质，基本积分公式，定积分的概念和基本性质，定积分中值定理，积分上限的函数及其导数，牛顿-莱布尼茨公式，不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法，反常、广义积分，定积分的应用.

2. 考试要求

(1)理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，掌握不定积分的换元积分法和分部积分法.

(2)了解定积分的概念和基本性质，了解定积分中值定理，理解积分上限的函数并会求它的导数，掌握牛顿-莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法.

(3)会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，会利用定积分

求解简单的经济应用问题.

(4)了解反常积分的概念,会计算反常积分.

四、多元函数微积分学

1. 考试内容

多元函数的概念,二元函数的几何意义,二元函数的极限与连续的概念,有界闭区域上二元连续函数的性质,多元函数偏导数的概念与计算,多元复合函数的求导法与隐函数求导法,二阶偏导数,全微分,多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值,二重积分的概念、基本性质和计算,无界区域上简单的反常二重积分.

2. 考试要求

(1)了解多元函数的概念,了解二元函数的几何意义.

(2)了解二元函数的极限与连续的概念,了解有界闭区域上二元连续函数的性质.

(3)了解多元函数偏导数与全微分的概念,会求多元复合函数一阶、二阶偏导数,会求全微分,会求多元隐函数的偏导数.

(4)了解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会利用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值,并会解决简单的应用问题.

(5)了解二重积分的概念与基本性质,掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标),了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算.

五、无穷级数

1. 考试内容

常数项级数收敛与发散的概念,收敛级数的和的概念,级数的基本性质与收敛的必要条件,几何级数与其他级数及其收敛性,正项级数收敛性的判别法,任意项级数的绝对收敛与条件收敛,交错级数与莱布尼茨定理,幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域,幂级数的和函数,幂级数在其收敛区间内的基本性质,简单幂级数的和函数的求法,初等函数的幂级数展开式.

2. 考试要求

(1)了解级数的收敛与发散,了解收敛级数的和的概念.

(2)了解级数的基本性质和级数收敛的必要条件,掌握几何级数及其他级数的收敛与发散的条件,掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法.

(3)了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系,了解交错级数的莱布尼茨判别法.

(4)会求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域.

(5)了解幂级数在其收敛区间内的基本性质和函数的连续性、逐项求导和逐项积分,会

求简单幂级数在其收敛区间内的和函数.

(6)了解麦克劳林展开式.

六、常微分方程与差分方程

1. 考试内容

常微分方程的基本概念,变量可分离的微分方程,齐次微分方程,一阶线性微分方程,线性微分方程解的性质及解的结构定理,二阶常系数齐次线性微分方程及简单的非齐次线性微分方程,差分与差分方程的概念,差分方程的通解与特解,一阶常系数线性差分方程,微分方程的简单应用.

2. 考试要求

(1)了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.

(2)掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法.

(3)会解二阶常系数齐次线性微分方程.

(4)了解线性微分方程解的性质及解的结构定理,会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程.

(5)了解差分与差分方程及其通解与特解等概念.

(6)了解一阶常系数线性差分方程的求解方法.

(7)会用微分方程求解简单的经济应用问题.

预备知识

1. 函数定义

设 D 为实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，如果对于任意的 $x\in D$，都存在唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应，则称 y 是 x 的一元函数，通常可以用 $y=f(x)$ 表示，并称 x 为**自变量**，称 y 为**因变量**，自变量的取值范围称为函数的定义域，因变量的取值范围称为函数的值域，分别记为 $\mathrm{dom}(f)$ 和 $\mathrm{ran}(f)$，或者简记为 D_f 和 R_f.

2. 函数的性质

(1)函数的单调性.

设 I 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个区间. 如果对于任意的 $x_1>x_2\in I$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增，简称单增. 如果对于任意的 $x_1>x_2\in I$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减，简称单减. 函数单调递增或单调递减的性质称为函数的单调性.

(2)函数的奇偶性.

设 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3)函数的周期性.

设 $y=f(x)$ 为函数. 如果存在正数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 对于定义域中的任意 x 都成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 是一个周期.

(4)函数的有界性.

设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若存在常数 $M>0$ 使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

3. 基本初等函数

除了较特殊的**常数函数** $y=C$ 外，通常把微积分中最常见的函数分为五类，称其为**基本初等函数**，包括幂函数 $y=x^{\mu}(\mu\neq0)$，指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$，以及反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\mathrm{arccot}\,x$.