弱收敛与维纳积分

刘良深编

中山大学

一九七九年十月·广州

第一章　正泛函的积分表示

本章主要目的是要证明一个定理（Александров 定理），即：每一个正泛函 M 可以表为一个积分形式如下：

$$M(f)=\int f\,dm\ ,\qquad f\in C(X) \tag{1}$$

这里 m 是一个定义在 X 的一个代数上的非负、有限可加函数。关于这个定理的详细论述，我们将在后面给出。

证明上述定理的步骤是：用给定的正泛函 M 在 X 的 $\mathcal{U}$ 集合族上构造一个实值函数 m，然后逐步把 m 的定义域扩张到 $\mathcal{U}$ 而产生的代数上。构造 m 的工作将在第四节给出。剩下的工作就是证明这样构造出的 m 确是满足(1)式，而且在一定的正则性的要求下，它是唯一的。最后，我们还要考虑到在什么情形 m 是完全可加的问题。

我们将要看到，$\mathcal{U}$-集合族是一个格（Lattice）。因此我们在第三节补充测度论的一些内容，这就是如何把格上的函数扩张成为一个环上的有限可加函数的问题。

在构造 m 的过程中，我们还要用到有关拓扑空间的一个定理（分解定理）。在第二节中，我们先证明一个扩张定理，然后再由扩张定理推出我们要用到的分解定理。

1. 正泛函的齐性

设 X 是一个拓扑空间，X 上的有界、连续、实值函数的全体记作 $C(X)$。设 $f\in C(X)$，我们用记号 $f\geq 0$ 表示 $f(x)\geq 0$ 对一切 $x\in X$. $f\geq g$ 表示 $f(x)\geq g(x)$ 对一切 $x\in X$。对实数 a,b，规定 $a\vee b=\max\{a,b\}$，$a\wedge b=\min\{a,b\}$。设 $M(f)$ 是定义在 $C(X)$ 上的一个实值函数（以后称这样的实值函数为 $C(X)$ 上的泛函）并满足下述两个条件：

1）可加性：

$$M(f_1+f_2)=M(f_1)+M(f_2),\quad 对任意的 f_1,f_2\in C(X)$$

2）正的：

$$f\in C(X),\ f\geq 0 \Rightarrow M(f)\geq 0$$

这时称 $M(f)$ 为 $C(X)$ 上的一个可加的、正泛函。

设 $M(f)$ 为 $C(X)$ 上的一个可加的、正泛函，则有

3）齐性：

$$M(\alpha f)=\alpha M(f)\quad ，对一切实数\alpha 。$$

事实上，由可加性得

$$M(rf)=rM(f)\quad ，对一切有理数 r$$

特别有

$$M(-f)=-M(f)$$

对实数 α，取有理数 r，$r<\alpha$，那末当 $f\geq 0$ 时有

$$0\leq M((\alpha-r)f)=M(\alpha f)-rM(f)$$

令 $r\to\alpha$，得

$$\alpha M(f)\leq M(\alpha f),\qquad 当 f\geq 0. \tag{1}$$

把上式中 α 换为 $-\alpha$，得 $-\alpha M(f)\leq M(-\alpha f)=-M(\alpha f)$，于是有

$$\alpha M(f)\geq M(\alpha f),\qquad 当 f\geq 0 \tag{2}$$

由(1),(2)两式得

$$\alpha M(f)=M(\alpha f),\qquad 当 f\geq 0.$$

现考虑任意 $f\in C(X)$，有 $f^+=f\vee 0\in C(X)$, $f^-=-f\vee 0\in C(X)$

且 $f^+\geq 0$，$f^-\geq 0$，故有

$$\alpha M(f^+)=M(\alpha f^+)$$
$$\alpha M(f^-)=M(\alpha f^-)$$

从而得

$$\begin{aligned}\alpha M(f)=\alpha M(f^+-f^-)&=\alpha M(f^+)-\alpha M(f^-)\\&=M(\alpha f^+)-M(\alpha f^-)\\&=M(\alpha f^+-\alpha f^-)\\&=M(\alpha f)\end{aligned}$$

2．连续函数的扩张

设 X 是一个拓扑空间，$C(X)$ 是定义在 X 上的有界、连续、实值函数的全体。由实数 0 所构成的单元素集记作 $\{0\}$，记

$$Z=\{F:\ F=g^{-1}(\{0\}),\quad g\in C(X)\}$$

Z 中的元素 F 叫做空间 X 中的 Z-集；记

$$\mathcal{U}=\{G:\ G=X\setminus F,\ F\in Z\}$$

$\mathcal{U}$ 中的元素 G 叫做空间 X 中的 U-集。X 中的一个 Z-集，F 是实数 0 对 X 上的某个连续函数 g 的反像：

$$F=\{x:\ x\in X,\ g(x)=0\}$$

用 $\mathbb{R}_1$ 代表全体实数，则有

$$Z=\{F:\ F=g^{-1}(K),\ K\subset\mathbb{R}_1,\ K:\text{有界闭集}\}$$

事实上，令 $f(x)=\rho(x,K)=\inf\{|x-y|,\ y\in K\}$，$x\in\mathbb{R}_1$，它是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $f^{-1}(\{0\})=K$。从而 $g^{-1}[f^{-1}(\{0\})]=g^{-1}(K)$，或者 $(f\circ g)^{-1}(\{0\})=g^{-1}(K)$。

再注意 $f\geq 0$，因而又得

$$Z=\{F:\ F=g^{-1}(\{0\}),\ 0\leq g\leq 1,\ g\in C(X)\}.$$

根据 Z-集的定义，凡 Z-集必是闭集；但闭集不一定是 Z-集。若 X 是距离空间，X 中的闭集必是 Z-集。当 X 是正规（Normal）拓扑空间，则 X 内的每个 G_δ 型（即可表示成可列个开集之交）的闭集都是 Z-集。事实上，设 F 是正规空间 X 中的闭集且 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，$G_n$ 是 X 内的开集。设 $f_n(x)$ 为这样的连续函数：

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in F\\ 0, & \text{当 } x\in X\setminus G_n\end{cases}$$

令 $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}f_i(x)$，则 $F=f^{-1}(\{1\})$.

Z-集对†交与併这两种运算是封闭的：设 $A\in Z$，$B\in Z$，$A=f^{-1}(\{0\})$，$B=g^{-1}(\{0\})$，则

$$AB=(|f|+|g|)^{-1}(\{0\});$$

$$A\cup B=(fg)^{-1}(\{0\}).$$

下面的讨论表明互不相交的 Z-集可函数分离

设 $F_1\in Z$，$F_2\in Z$，且 $F_1F_2=\phi$，那末存在 $h_1\in C(X)$，$0\leq h_1\leq 1$，使

$$h_1(x)=\begin{cases}1, & x\in F_1\\ 0, & x\in F_2\end{cases}$$

事实上，令 $F_1=f^{-1}(\{0\})$，$F_2=g^{-1}(\{0\})$，$f,g\in C(X)$，那末

$$h_1=\frac{|g|}{|f|+|g|}$$

就是所求的连续函数且 $0\leq h_1\leq 1$. 若 $a,b\in R_1$，$a<b$，令

$$h(x)=(b-a)h_1(x)+a,\qquad x\in X$$

则 $h(x)$ 具有如下性质：

$$h(x)=\begin{cases}a, & x\in F_1\\ b, & x\in F_2\end{cases}$$

且 $a\leq h\leq b$.

我们可以把上述结果略加扩充写成如下的形式：

引理1　设 $a,b\in R_1$，$a<b$. A，B 是拓扑空间 X 内的两个集合，若存在 X 内的互不相交的 Z-集 F_1 及 F_2 使 $A\subset F_1$，$B\subset F_2$，则存在 $h\in C(X)$ 使

---

† 以后，在不发生误解的情况下，把集合 A 与 B 之交 $A\cap B$ 记作 AB，而 A 与 B 之併记作 $A\cup B$。

$$h(x)=\begin{cases} a, & x\in F_1 \\ b, & x\in F_2 \end{cases}$$

且 $a\le h\le b$。

设 $F\in Z$，f 是定义在 F 上的有界、连续实值函数，下面研究把 f 扩张到整个空间 X 上的问题。

引理2　设 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 为 X 内互不相交的 Z-集，又 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为 n 个实数且 $C_1\le C_2\le\cdots\le C_n$，则存在 $f\in C(X)$ 使

$$C_1\le f(x)\le C_n\,,\quad 凡\ x\in X$$

且

$$f(x)=C_i\,,\quad 对\ x\in Z_i$$

证明　对任何的 i，集 F_i 与 $\bigcup_{j\ne i}F_j$ 互不相交，故由引理1存在 g_i 使 $0\le g_i(x)\le 1$，$x\in X$，且

$$g_i(x)=\begin{cases} 1, & 当\ x\in F_i \\ 0, & 当\ x\in\bigcup_{j\ne i}F_j \end{cases}$$

令

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_i g_i$$

则 $g\in C(X)$ 且 $g(x)=C_i$ 当 $x\in F_i$。再定义

$$f=\max\{C_1, \min\{g, C_n\}\}$$

则 f 为所求的函数，证毕。

定理1（扩张定理）　设 $F\in Z$，f 为定义在 F 上的有界、连续实值函数，且 $|f(x)|\le a$，$x\in F$。如果 f 满足下述的条件（

条件（C）：　对任意 $r, s\in R_1$，$r<s$，集合

$$\{x: x\in F, f(x)\le r\}\ 与\ \{x: x\in F, f(x)\ge s\}$$

分别含于两个互不相交的 Z-集 F_1 与 F_2 之内。

那末，存在一个定义在整个空间X上的连续函数φ使

1) $\varphi(x)=f(x)$，　　$x\in F$

2) $|\varphi(x)|\le a$，　　$x\in X$

这时φ称为f在X上的一个连续扩张。

<u>证明</u>　设$|f(x)|\le a$，　$x\in F$，　$a>0$．考虑X中的集合A与B：

$$A=\{x:\ x\in F,\ f(x)\le -\frac{a}{3}\},\quad B=\{x:\ x\in F,\ f(x)\ge\frac{a}{3}\}$$

根据条件(C)，存在$F_1\in\mathscr{Z}$，$F_2\in\mathscr{Z}$使

$$A\subset F_1,\quad B\subset F_2,\quad F_1F_2=\varphi$$

再根据引理1得知存在在整个空间X上连续的函数$\varphi_1(x)$使得

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}-\frac{a}{3}, & 当\ x\in A\\ \frac{a}{3}, & 当\ x\in B\end{cases}$$

且$|\varphi_1(x)|\le\frac{a}{3}$，　凡　$x\in X$．

令

$$f_1(x)=f(x)-\varphi_1(x),\qquad x\in F$$

那末$f_1(x)$是定义在F上的函数而且在集F上是连续的，而且$|f_1(x)|\le\frac{2}{3}a$，$x\in F$。

同样地，考交

$$A_1=\{x:\ x\in F,\ f_1(x)\le -\frac{1}{3}(\frac{2}{3}a)\},$$

$$B_1=\{x:\ x\in F,\ f_1(x)\ge\frac{2}{3}(\frac{2}{3}a)\}$$

根据条件(C)，存在$\mathscr{Z}$中互不相交的两集分别包含A_1与B_1。从而由引理1可知存在在整个空间X上连续的函数$\varphi_2(x)$使

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})a, & 当\ x\in A_1\\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3})a, & 当\ x\in B_1\end{cases}$$

且　$|\varphi_2(x)|\le\frac{1}{3}(\frac{2}{3})a$，　凡　$x\in X$

令

$$f_2(x) = f_1(x) - \varphi_2(x), \quad x \in F$$

则 f_2 是定义在集 F 上的函数且在集 F 是连续的，而且 $|f_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2 a$，凡 $x \in F$。

这样，用归纳法得到集 F 上的一列连续函数：

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$$

其中 $|f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n a$，$x \in F$；以及在整个空间 $\mathfrak{X}$ 上的连续函数列：

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

其中 $|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} a$，凡 $x \in \mathfrak{X}$，而在集 F 上有

$$f_1(x) = f(x) - \varphi_1(x)$$

$$f_2(x) = f_1(x) - \varphi_2(x)$$

$$\cdots$$

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) - \varphi_n(x),$$

$$\cdots$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ 在 $\mathfrak{X}$ 上一致收敛，故此，令 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$，$x \in \mathfrak{X}$，则 $\varphi(x)$ 在整个空间 $\mathfrak{X}$ 上连续。再注意

$$\sum_{K=1}^{n} \varphi_K(x) = f_n(x) - f(x)$$

及在集 F 上有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$，于是

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=1}^{n} \varphi_K(x) = f(x), \quad x \in F$$

换言之，在集 F 上有 $\varphi(x) = f(x)$。最后，

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^{n-1} a = a$$

定理证毕。

可以看出，上述定理中的条件(C)是必要的，这就是说，设

$F\in Z$，而 f 是定义在集 F 上的有界、连续、实值函数，假如存在 f 在整个空间 X 上的一个连续扩张 φ，那末下述两个集合 $(r<s)$

$$\{x: x\in F,\ f(x)\le r\},\quad \{x: x\in F,\ f(x)\ge s\}$$

必含于两个互不相交的 Z-集之内。事实上，由于 Z-集对交封闭，故

$$\{x: x\in F, f(x)\le r\}=\{x: x\in F,\ \varphi(x)\le r\}$$

$$=F\cap\{x: x\in X,\ \varphi(x)\le r\}\quad\in Z.$$

同样，$\{x: x\in F,\ f(x)\ge s\}\in Z$.

由于距离空间内的闭集必为 Z-集，故此条件（C）在距离空间内自然成立。利用上述扩张定理可得如下的分解定理。

定理2（分解定理） 任给 $G_1\in\mathcal{U}$，$G_2\in\mathcal{U}$，及 $f\in C(X)$，$0\le f\le\chi_{G_1\cup G_2}$，则存在 $f_1\in C(X)$，$f_2\in C(X)$，

$$0\le f_1\le\chi_{G_1},\qquad 0\le f_2\le\chi_{G_2}$$

使

$$f=f_1+f_2$$

这里 χ_A 表示集 A 的特征函数：$\chi_A(x)=1$，$x\in A$；$\chi_A(x)=0$，$x\in X\setminus A$.

证明 令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in X\setminus G_1=F_1\\ 0, & \text{当 } x\in X\setminus G_2=F_2\end{cases}$$

由于 $x\in F_1F_2\Rightarrow f(x)=0$，故 g 是闭集 $F_1\cup F_2$ 上的一个函数，且 $0\le g(x)\le 1$，$x\in F_1\cup F_2$. 现证明 g 是闭集 $F_1\cup F_2$ 上的连续函数。事实上，如果 $x_0\in F_1F_2$. 对给定 $\varepsilon>0$，有 x_0 的邻域 V_1 及 V_2 使

$$x\in V_1F_1\ \Longrightarrow\ g(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

$$x\in V_2F_2\ \Longrightarrow\ g(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

故此得

$$x \in V_1V_2(F_1 \cup F_2) \Longrightarrow g(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

而 V_1V_2 是 x_0 的一个邻域，这就证明了 $g(x)$ 在 x_0 点连续。

如果 $x_0 \in F_1 \setminus F_2$。由于 $x_0 \in X \setminus F_2 = G_2$，而 G_2 是开集，故有 x_0 的一个邻域 V_0 使 $V_0F_2 = \phi$。又由于 $x_0 \in F_1$，以及 g 是集 F_1 上的连续函数，故有 x_0 的邻域 V_1 使

$$x \in V_1F_1 \Longrightarrow g(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

但 $V_0V_1(F_1 \cup F_2) = V_0V_1F_1 \subset V_1F_1$，故此

$$x \in V_0V_1(F_1 \cup F_2) \Longrightarrow g(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

因而 g 在 x_0 点连续。当 $x_0 \in F_2 \setminus F_1$ 时证明与上述相仿。故此 g 是闭集 $F_1 \cup F_2$ 上的连续函数。

对 $r < s$，考虑

$$A = \{x \mid x \in F_1 \cup F_2,\quad g(x) \leq r\}$$

$$B = \{x \mid x \in F_1 \cup F_2,\quad g(x) \geq s\}$$

下面证明 $g(x)$ 满足条件（C）。

情形 1)．若 $r < 0$，

由于 $g \geq 0$，故这时 $A = \phi$，于是只须注意在个空间 X 是一个 Z-集且包含 B 即可。

情形 2)．若 $0 \leq r < s$

由于

$$A = \{x : x \in F_1 \cup F_2,\ g(x) \leq r\} = \{x \mid x \in F_1, g(x) \leq r\} \cup \{x : x \in F_2, g(x) \leq r\}$$

$$= \{x \mid x \in F_1, f(x) \leq r\} \cup \{x : x \in F_2, 0 \leq r\}$$

$$= \{x \mid x \in F_1, f(x) \leq r\} \cup F_2$$

$$= [F_1 \cap \{x \mid x \in X, f(x) \leq r\}] \cup F_2$$

夫 f 是一个 Z-集，而由

$$B=\{x \mid F_1\cup F_2,\ g(x)\geq s\}=\{x \mid x\in F_1,\ g(x)\geq s\}\cup\{x \mid x\in F_2,\ 0\geq s\}$$

$$=\{x \mid x\in F_1,\ f(x)\geq s\}\cup\phi$$

$$=F_1\cap\{x \mid x\in X,\ f(x)\geq s\}$$

知 B 是一个 Z-集，故此 $g(x)$ 满足条件 (C)。于是由扩张定理把 g 扩张为整个空间 X 上的连续函数 h，且 $0\leq h\leq 1$。令 $f_2=h\wedge f$，则 $0\leq f_2\leq f$. 再令

$$f_1=f-f_2$$

则 $0\leq f_1\leq 1$. 而且，当 $x\in F_1$ 时，有 $f(x)=g(x)=h(x)$，从而 $f_2(x)=f(x)$，于是 $f_1(x)=0$，故 $f_1(x)\leq\chi_{G_1}(x)$，凡 $x\in X$，另一方面，当 $x\in F_2$ 时 $h(x)=g(x)=0$，故 $f_2(x)=0$，从而有 $f_2\leq\chi_{G_2}$. 定理证毕。

3. 格上可加集函数的扩张

定义　一族集合 L 称为一个格（Lattice），如果 $\phi\in L$ 并且当 $A\in L$，$B\in L$ 时有

$$A\cup B\in L \quad 及 \quad AB\in L$$

若 X 是一个拓扑空间，那末 X 内全体开集构成一个格；同样地，X 内全体闭集也构成一个格。由于 Z-集对併、交这两种运算是封闭的，故 X 内全体 Z-集构成一个格。

定义　一族集合 P 若满足下述条件：

i) $\phi\in P$

ii) $A\in P$，$B\in P\Longrightarrow AB\in P$

iii) $A\in P$，$B\in P$，$A\supset B$，则存在有限多个 $C_i\in P$，$i=0,1,\cdots,n$ 使 $B=C_0$，$A=\bigcup_{i=0}^{n}C_i$，$C_iC_j=\phi$，当 $i\neq j$. 且

$$\bigcup_{i=0}^{K}C_i\in P,\quad 对\ K=0,1,2,\cdots,n$$

则 P 称为一个半环。

例如，R_1 内全体左开右闭区间 $\{(a,b]\ ;\ a\in R_1,\ b\in R_1,\ a<b\}$ 构成一个半环。

引理1 设 L 是一个格，令

$$P(L)=\{A\setminus B \mid A\in L,\ B\in L,\ A\supset B\}$$

则 $P(L)$ 是一个半环，而且 $P(L)\supset L$.

由于格 L 对交运算封闭，故

$$P(L)=\{A\setminus B \mid A\in L,\ B\in L\}$$

下面采用记号 $B'=X\setminus B$ 表示集 B 对 X 的余集。

证明 因 $\phi\in L$，故取 $B=\phi$ 即知 $P(L)\supset L$。现设 $D_1=A_1B_1'\in P(L)$，$D_2=A_2B_2'\in P(L)$，这里 $A_i\in L$，$B_i\in L$，$i=1,2$. 且 $A_2B_2'\supset A_1B_1'$. 令

$$C=A_2(B_1\cup B_2)'$$

则 $C\in P(L)$，且 $A_2B_2'\supset C\supset A_1B_1'$，但

$$D_2C'=A_2B_2'(A_2(B_1\cup B_2)')'=A_2B_2'(A_2'\cup(B_1\cup B_2))$$

$$=A_2(B_1\cup B_2)B_2'\in P(L)$$

同样，

$$CD_1'=A_2(B_1\cup B_2)'(A_1B_1')'=A_2B_1'B_2'(A_1'\cup B_1)$$

$$=A_2B_1'B_2'A_1'=A_2\setminus(B_1\cup B_2\cup A_1)\in P(L)$$

最后，令 $C_0=D_1$，$C_1=C\setminus D_1$，$C_2=D_2\setminus C$，则有 $C_i\in P(L)$，$i=0,1,2$，且 $C_iC_j=\phi$，当 $i\neq j$ 以及 $\bigcup_{i=0}^{K}C_i\in P(L)$，$K=0,1,2$. 故 $P(L)$ 是一个半环．引理证毕。

设 M 是一族集合，若对每个 $A\in M$，有一个实数 $m(A)$ 与之对应，则称在 M 上定义了一个集函数 m。集函数 m 称为可加的，是指

$$A\in M,\quad B\in M,\quad A\cup B\in M,\quad AB=\phi$$

$\Longrightarrow$

$$m(A\cup B)=m(A)+m(B)$$

集函数 m 称为 H－可加的，如

$$A_i \in M, \quad i=1,2,3,4$$
$$A_1 \supset A_2, \quad A_3 \supset A_4$$
$$A_1 \setminus A_2 = A_3 \setminus A_4$$
$$\Longrightarrow$$
$$m(A_1)-m(A_2)=m(A_3)-m(A_4)。$$

集函数 m 称为模（modular）集函数，是指

$$A \in M, \quad B \in M, \quad A \cup B \in M, \quad AB \in M$$
$$\Longrightarrow$$
$$m(A \cup B)=m(A)+m(B)-m(AB)。$$

不难看出，集函数 m 的 H-可加性蕴涵 m 是模集函数。

下述的引理2给出格 L 上的单调、H-可加集函数扩张为半环 $P(L)$ 上的可加集函数的充分必要条件

引理2 设 m 是定义在格 L 上的非负集函数

$$0 \le m(A) < +\infty, \quad A \in L$$

若

i) $m(\phi)=0$，

ii) $A \subset B \Longrightarrow m(A) \le m(B)$，$A \in L$，$B \in L$．（单调性），

iii) m 是H-可加的，

则在半环 $P(L)$ 上可定义集函数 $\tilde{m}$ 如下：

$$\tilde{m}(A \setminus B)=m(A)-m(B), \quad A \in L, \ B \in L, \ A \supset B$$

这时 $\tilde{m}$ 在半环 $P(L)$ 上是一个可加集函数。

证明 设 $AB'=A_1B_1' \cup A_2B_2'$，其中 $A_1B_1'A_2B_2'=\phi$，AB'，A_1B_1'，A_2B_2' 均属于 $P(L)$，下面证明

$$\tilde{m}(AB')=\tilde{m}(A_1B_1')+\tilde{m}(A_2B_2')$$

注意 $AB' \supset A_iB_i'$，$i=1,2$．故

$$\tilde{m}(A_1B_1')+\tilde{m}(A_2B_2')=\tilde{m}(A_1'A\ ')+\tilde{m}(A_2'A_2B_2')$$
$$=m(AA_1)-m(AA_1(B \cup B_1))+m(AA_2)-m(AA_2(B \cup B_2))$$

$$= m(AA_1) + m(AA_2) -$$

$$-\left[m(AA_1B) + m(AA_1B_1) - m(ABA_1B_1)\right]$$

$$-\left[m(AA_2B) + m(AA_2B_2) - m(ABA_2B_2)\right]$$

$$= \left[m(AA_1) + m(AA_2)\right] - \left[m(ABA_1) + m(ABA_2)\right] - \left[m(AA_1B_1) + m(AA_2B_2)\right]$$

$$+\left[m(ABA_1B_1) + m(ABA_2B_2)\right]$$

$$= \left[m(A(A_1 \cup A_2)) + m(AA_1A_2)\right] - \left[m(AB(A_1 \cup A_2)) + m(ABA_1A_2)\right]$$

$$-\left[m(A(A_1B_1 \cup A_2B_2)) + m(AA_1B_1A_2B_2)\right] + \left[m(AB(A_1B_1 \cup A_2B_2)) + m(ABA_1B_1A_2B_2)\right]$$

$$= \tilde{m}(AB'(A_1 \cup A_2)) + \tilde{m}(AB'A_1A_2) - \tilde{m}(AB'(A_1B_1 \cup A_2B_2)) - \tilde{m}(AB'A_1B_1A_2B_2)$$

在最末一式里，由于 $AB'A_1B_1A_2B_2 = \phi$，故它的最后一项等于零；而由于 $AB' = A_1B_1' \cup A_2B_2' \subset A_1 \cup A_2$，故它的第一项等于 $\tilde{m}(AB')$。现在来估计中间的那两项，因为 $AB'A_1A_2 = A_1A_2(B_1' \cup B_2')$，又

$$AB'(A_1B_1 \cup A_2B_2) = A_1A_2(B_1B_2' \cup B_2B_1')$$

再注意 $B_1' \cup B_2' = B_1B_2' \cup B_1'B_2' \cup B_2B_1'$，由假设 $A_1B_1'A_2B_2' = \phi$ 得

$$A_1A_2(B_1' \cup B_2') = A_1A_2B_1B_2' \cup A_1A_2B_2B_1'$$

因此中间两项互相抵销，引理至此证毕。

下面证明在半环 P 上的可加集函数 m 必然是有限可加的。

定义　定义在集族 M 上的实值集函数 m 称为有限可加的，是指：对 $A_i \in M$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 及 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in M$，$A_iA_j = \phi$，当 $i \neq j$，则

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

定义　设 P 为一个半环，$A \in P$. 若存在 $A_i \in P$，$i = 1, 2, \cdots, n$；$A_iA_j = \phi$，$i \neq j$，使

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

则 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 称为集 A 的一个剖分。

若 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 A 的一个剖分，$\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ 是 A 的一个剖分，如果对每个 A_i，恒存在某个 B_j 使 $A_i \subset B_j$，则 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 称为 $\{B_1, \cdots, B_m\}$ 的一个子剖分。

容易看出，设 $\{A_1, \cdots, A_n\}$，$\{B_1, \cdots, B_m\}$ 都是 A 的剖分，则这两个剖分之交 $\{A_iB_j: i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m\}$ 也是 A 的一个剖分。

定义 设 m 为半环 P 上的一个可加集函数，$A \in P$，又 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 A 的一个剖分，假如对每个 $B \in P$，恒有

$$m(AB) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i B)$$

则称剖分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 A 的一个 m-剖分。

下面列举 m-剖分的一些性质：

1）若 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 A 的一个 m-剖分，$\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ 是 A 的一个 m-剖分，那末由下式（注意 $B_jB \in P$），

$$\sum_{i,j} m(A_iB_jB) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(A_iB_jB) = \sum_{j=1}^{m} m(B_jB) = m(B)$$

知 $\{A_iB_j,\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m\}$ 是 A 的一个 m-剖分。这就是说，A 的两个 m-剖分之交仍是一个 m-剖分。

2）若 $A \in P$，$B \in P$，$A \subset B$，则恒存在 B 的一个 m-剖分。事实上，由于 P 是半环，由 $A \in P$，$B \in P$，$A \subset B$ 及半环的定义知有 $C_i \in P$，$i=0,1,2,\cdots,n$ 使

$$A = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = B$$

这里 $C_i \in P$，$i=0,1,2,\cdots,n$ 并且

$$D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in P, \quad i=1,2,\cdots,n$$

现在证明 $\{A, D_1, \cdots, D_n\}$ 就是 B 的一个 m-剖分，[illegible]看到：由于

$D_i D_j = \phi$，$i \neq j$ 及 $A \cup \bigcup_{i=1}^{n} D_i = B$，故 $\{A, D_1, \cdots, D_n\}$ 是 B 的一个剖分。而且，对任意 $\check{B} \in P$，根据 m 在半环 P 上的可加性得

$$m(D_1 \check{B}) = m(C_1 \check{B}) - m(C_0 \check{B})$$
$$m(D_2 \check{B}) = m(C_2 \check{B}) - m(C_1 \check{B})$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$m(D_n \check{B}) = m(C_n \check{B}) - m(C_{n-1} \check{B})$$

将上述诸等式相加，得

$$\sum_{i=1}^{n} m(D_i \check{B}) = m(C_n \check{B}) - m(C_0 \check{B})$$

移项后得 $m(A\check{B}) + \sum_{i=1}^{n} m(D_i \check{B}) = m(B\check{B})$，故 $\{A, D_1, \cdots, D_n\}$ 是 B 的一个 m-剖分。

3) 设 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 是 B 的一个 m-剖分，又 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 的子剖分，那末当 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 B 的一个 m-剖分时，就有 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 是集 B 的一个 m-剖分。

事实上，由于 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 B 的一个 m-剖分，故对任意 $\check{A} \in P$ 有

$$m(B\check{A}) = \sum_{j=1}^{m} m(A_j \check{A})$$

取 $\check{A} = B_1 A$，$A \in P$，则从上式得

$$m(B_1 A) = m(BB_1 A) = \sum_{j=1}^{m} m(A_j B_1 A) = \sum_{A_j \subset B_1} m(A_j A)$$

类似地得

$$m(B_2 A) = \sum_{A_j \subset B_2} m(A_j A),$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$m(B_n A) = \sum_{A_j \subset B_n} m(A_j A)$$

相加得

$$\sum_{i=1}^{n} m(B_i A) = \sum_{j=1}^{m} m(A_j A) = m(BA)$$

这就证明了剖分 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 是 B 的一个 m-剖分。

最后，我们来证明半环 P 内任一集 A 的剖分必是 m-剖分。为此，设 $A \in P$，又 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 A 的一个剖分；由于 $A_1 \subset A$，由 m-剖分的第二个性质可知存在 A 的一个 m-剖分 $\{A_1, D_1^1, D_1^2, \cdots, D_1^{i_1}\}$、同样，由于 $A_2 \subset A$，得 A 的一个 m-剖分 $\{A_2, D_2^1, D_2^2, \cdots, D_2^{i_2}\}$，…，由 $A_n \subset A$ 得 m-剖分 $\{A_n, D_n^1, \cdots, D_n^{i_n}\}$。因为 m-剖分之交仍是 m-剖分，故上述这 n 个 m-剖分之交仍是一个 m-剖分，由此得知 A 的剖分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 含有一个 m-剖分，故由 m-剖分的第三个性质知剖分 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 本身也是一个 m-剖分，证明完毕。

以上证明了：当 m 是半环 P 上的可加集函数，又 $A \in P$，那末当 $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，$A_i \in P$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则有

$$m(AB) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i B) \quad , \cdots 凡 \quad B \in P$$

特别，若取 $B = A$，则得

$$m(A) = \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$$

换言之，m 在半环 P 上具有有限可加性。

由上述结果及引理2得到：一个定义在格 L 上的非负集函数，若满足条件 i) $m(\phi) = 0$，ii) 单调性及 iii) H-可加性，则 m 可扩张至半环 $P(L)$ 上成为一个有限可加的非负集函数。

设 P 是半环，从测度论知道所有形如 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，($A_i \in P$, $A_i A_j = \phi$ 当 $i \neq j$) 的集构成一个环 $R = R(P)$。今若在半环 P 上有一个有限可加、非负集函数，那末可以在 $R = R(P)$ 上定义一个集函数