2014命题人书系

理工社®

考研数学 2

命题人

高等数学考试参考书

主编◎张宇　何英凯　李擂

请问这本书有什么特色呢?

书中精选核心知识点和经典好题，采取“点→面→点”的总结归纳模式，把常考知识点贯通起来，帮助考生构建起知识网络和思维通路，明晰考点本原，快速提高解题能力！

那这本书适合哪个阶段使用呢?

适合强化阶段使用，搭配《考研数学命题人大纲配套精典1100题》，效果会更明显哦！

请问哪里可以买到呢? ……

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学②

命题人

高等数学考试参考书

主　编◎张　宇　何英凯　李　擂

副主编◎胡金德　张天德　黄振荣

北京理工大学出版社

BEI INC　RESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学命题人高等数学考试参考书 / 张宇，何英凯，李擂主编. —北京：北京理工大学出版社，2013. 5

ISBN 978 - 7 - 5640 - 7689 - 4

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①张… ②何… ③李… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 081687 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 20.25
字　　数 / 545 千字
版　　次 / 2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 / 35.80 元

责任编辑 / 周艳红
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

考研数学四部曲之

强化教程

本书按照考试大纲常考知识点分为17讲，其中每一讲又分为三个模块：

第一，考试内容概要。这里对大纲的知识点逐一进行了全面、细致、精准的分析，在确保全面阐述所有知识点的同时，突出了重点和难点。

第二，典型例题。此部分通过大量的典型例题分析，洞悉考试命题规律、考生应对策略，其中的“思路点拨”模块是编者多年考研辅导经验的总结，对考生解题能力的提高有很大帮助。

第三，习题与解答。列举了与真题题量相当的习题供考生练习，题目新颖且具有针对性和预测性。

本书的知识点和例题都是由具有多年辅导经验的数学名师根据他们在课堂上的讲义提炼加工而成，介绍的复习方法和解题技巧都是编者多年辅导的精髓，对考生数学思维的锻炼、学习成绩的提高非常有帮助，是一本不可多得的考试参考书。

Preface 前言

本书是以**张宇**、**何英凯**、**李擂**同志为首的教学专家团队和以**胡金德**同志为首的老一辈命题专家团队通力合作的一本高等数学考研复习著作。

本书既能够“知己”，也能够“知彼”。所谓“知己”，是指本书的作者常年在教学一线工作，具有丰富的教学经验，他们深知学生的水平和需要应对的困难，深知考研复习的重点和难点；所谓“知彼”，是指本书的作者参加过甚至领导过考研数学的命题工作，具有高超的命题经验，他们就是出题人，他们不用去猜测命题，他们可以告诉学生考题如何出，该如何应对。两者结合，知己知彼，百战不殆。

“考试内容概要”：全面准确地阐述了考研数学大纲中对于高等数学所有知识点的内涵和外延，考生一定要认真研读，并在做题后温故知新。

“典型例题”：通过精心挑选或者编制的例题，让考生深化对数学知识的理解并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议考生反复练习，达到炉火纯青的地步。

“习题与解答”：给考生留下了作业，独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，增长见识。

本书是集体智慧的结晶，如果参加本书主编所主讲的考研数学辅导班，这是必备教材；如果不参加考研数学辅导班，建议考生自学这本书。

本书也可供大学一年级的学生在学习高等数学时使用。

本书答疑地址：http://weibo.com/zhangyumaths。

作者无意用“水平有限”来作为遁词，诚心接受读者和专家同行的批评指正，在此表示谢意。

本书编写组

2013年春　于北京

Contents 目录

第 1 讲 函数 极限 连续

考试内容概要

一、函数的概念与性质

1. 函数

设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，若对于每个值 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则有一个确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 称 x 为**自变量**，y 为**因变量**. 称数集 D 为此函数的**定义域**，定义域一般由实际背景中变量的实际意义或者函数的对应法则的要求确定. 称相应的函数值的全体 $R=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数的**值域**. 称 f 为**对应法则**.

【注 1】注意函数定义中 y 的唯一性. 在函数的定义中，对每个 $x\in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不是唯一的，于是，这样的对应法则就不符合函数定义了，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 在考研中所提到的函数是指单值函数，也就是当自变量 x 取一个值时，这个对应法则 f 要保证因变量 y 有唯一的实数值与之对应，否则就得分成若干个单值函数去研究. 比如研究如下的"隐函数存在问题"：

一般说来，只要在满足定义域的条件下，形如 $y=f(x)$ 的函数称为**显函数**，例如 $y=\sin x$；由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**，例如由方程 $x+y^3-1=0$ 确定的隐函数(其显式表示为 $y=\sqrt[3]{1-x}$)，但"隐函数存在"是有前提的. 大多数教材都是这样的提法："如果 x 与 y 满足方程 $F(x,y)=0$，那么 $\boxed{\text{在一定条件下}}$，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的 $\boxed{\text{唯一的 } y \text{ 值}}$ 存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数."读者是否注意到"在一定条件下"和"唯一的 y 值"这样的语句？请看下面的两个定理.

隐函数存在定理 1 设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0$，$\boxed{F_y'(x_0,y_0)\neq 0}$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$.

这里的 $\boxed{F_y'(x_0,y_0)\neq 0\text{，也就是}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{存在(且连续)}}$ 是定理的关键. 由此看来，我们所谓的"隐函数存在"，是要求在一个"指定的位置"，方程 $F(x,y)=0$ 能确定一个 $\boxed{\text{“不仅有意义，而且要有可导这种良好性质的函数”}}$. 而在一个指定位置处可导的函数必然首先得是单值的.

举个例子供读者理解，给出方程 $x^2+y^2-1=0$，设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，则 $F_x'=2x$，$F_y'=2y$，$F(0,1)=0$，$F_y'(0,1)=2\neq 0$，由上述隐函数存在定理 1 可知，方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某一邻域内能确定一个有连续导数的隐函数 $y=f(x)$；而在点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 就不存在这样一个有着连续导数的隐函数，因为在点 $(-1,0)$ 和点 $(1,0)$ 处的切线都是竖直方向的，显然导数不存在，在这两个点的任何去心邻域中，一个 x 对应着两个 y 的值，这就不符合函数定义了(如图 1-1 所示).

再看个典型的例子，对于伯努利双纽线(如图 1-2 所示)，$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$，在 $(0,0)$，$(a,0)$，$(-a,0)$ 点处，隐函数不存在；而在其他位置，隐函数都存在，你看出来了么？

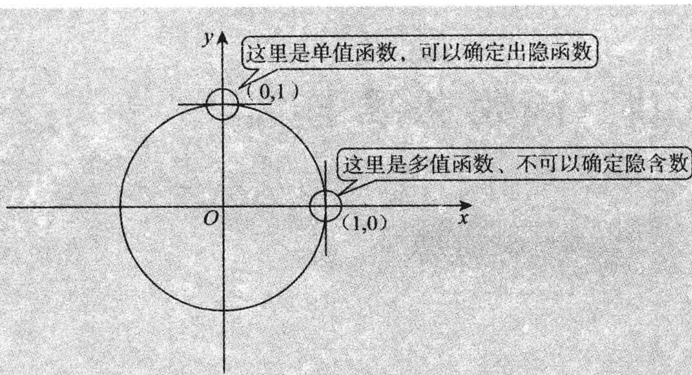

图 1-1

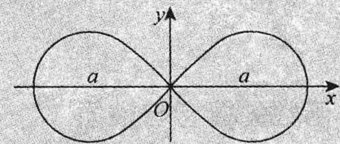

图 1-2

这里还要指出的是，定理最后给出的$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$，这个公式就是**隐函数求导公式**，证明如下：将 $y=f(x)$ 代入 $F(x,y)=0$，得恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$，在这个恒等式两边对 x 求导，得$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，由于 F'_y 连续且 $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，所以存在(x_0,y_0)的一个邻域，在这个邻域内 $F'_y\neq 0$，于是得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

于是，很自然地，我们可以把隐函数存在定理推广到多元函数，既然一个二元方程$F(x,y)=0$ 有可能确定一个一元隐函数，那么一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 也就有可能确定一个二元隐函数.

隐函数存在定理 2 设函数 $F(x,y,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$\boxed{F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0}$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

此公式的证明同样简单，将 $z=f(x,y)$代入 $F(x,y,z)=0$，得 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，将上式两端分别对 x 和 y 求偏导数，得 $F'_x+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,F'_y+F'_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

因为 F'_z 连续且$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，所以存在点(x_0,y_0,z_0)的一个邻域，使 $F'_z\neq 0$，于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

同理，这里的 $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，也就是$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$都存在(且连续)是定理的关键. 请看 **2005 年考研数学一第(10)题.**

例 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点(0,1,1)的一个邻域，在此邻域内该方程(　　).

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $z=z(x,y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$和 $z=z(x,y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$和 $y=y(x,z)$

解 有了以上详尽的解释，再看此题，便十分简单了. 令

$$F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1,$$

则 $F'_x=y+\mathrm{e}^{xz}z,F'_y=x-\frac{z}{y},F'_z=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}x$. 于是，

$$F'_x(0,1,1)=2\neq 0,\quad F'_y(0,1,1)=-1\neq 0,\quad F'_z(0,1,1)=0.$$

因此，在点$(0,1,1)$的某一个邻域U_1内，存在隐函数$x=x(y,z)$；在点$(0,1,1)$的某一个邻域U_2内，也存在隐函数$y=y(x,z)$. 于是，在邻域$U=U_1\cap U_2$内，就存在两个连续可微的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$，故应选(D).

【注2】以下一些重要的函数，在考试中出现过：

(1)$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$称为**绝对值函数**，如图1-3所示.

有些题目是把带有绝对值的函数转化为分段函数来处理，例如，设$f(x)$与$g(x)$都是连续函数，则

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]=\begin{cases}g(x), f(x)\geqslant g(x),\\ f(x), f(x)<g(x).\end{cases}$$

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]=\begin{cases}f(x), f(x)\geqslant g(x),\\ g(x), f(x)<g(x)\end{cases}$$

且也都是连续函数.

(2)$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**，如图1-4所示. 对于任何实数x，有$x=|x|\operatorname{sgn}x$.

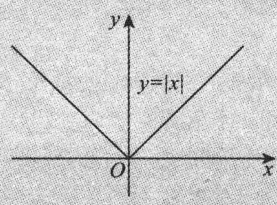

图1-3

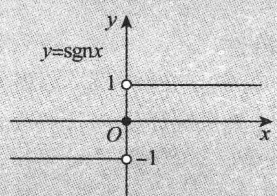

图1-4

(3)$y=[x]$，称为**取整函数** 先给出定义. 设x为任一实数，不超过x的最大整数称为x的整数部分，记作$[x]$. 如$[0.99]=0$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-1.99]=-2$. 因此，取整函数$y=[x]$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\mathbf{Z}$. 它的图形如图1-5所示，在x为整数值处图形发生跳跃.

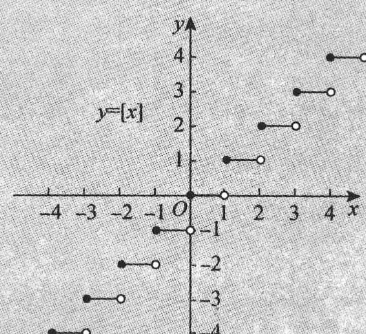

图1-5

取整函数$y=[x]$有如下一些重要性质：

$[x]\leqslant x<[x]+1$；

$[x+n]=[x]+n$；

$n[x]\leqslant nx$；

$[x]+[y]\leqslant[x+y]$，其中n为正整数.

(4)**分段函数** 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 需要强调一句，分段函数是用几个式子来表示的一个(不是几个)函数. 分段函数的典型形式如下：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x>x_0,\\ a, & x=x_0,\\ \varphi_2(x), & x<x_0\end{cases}\quad 或\ f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

(5)**狄利克雷函数** $D(x)=\begin{cases}1, x为有理数,\\ 0, x为无理数\end{cases}$是一个有界的偶函数，且任何的有理数都是它的周期，它没有最小的周期.

(6)通常把**幂指函数** $u(x)^{v(x)}$转化为复合函数$\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$来处理，所以可见，幂指函数是初等函数.

(7)**反函数** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R. 如果对于每一个 $y\in R$,必存在 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$ 成立,则由此定义了一个新的函数 $x=\varphi(y)$. 这个函数就称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,一般记作 $x=f^{-1}(y)$,它的定义域为 R,值域为 D. 相对于反函数来说,原来的函数也称为直接函数. 有两点要说明.

第一,直接函数的单值性无法保证其反函数的单值性. 比如直接函数 $y=x^2$ 的反函数是多值函数 $x=\pm\sqrt{y}$;但如果直接函数是单值单调函数,就能保证反函数的单值性了. 比如函数 $y=x^2,x\in[0,+\infty)$ 是单值单调函数,故它有反函数 $x=\sqrt{y}$.

第二,若把 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 的图形画在同一坐标系中,则它们完全重合. 只有把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$ 后,它们的图形才关于 $y=x$ 对称,事实上这也是 x 与 y 字母互换的结果.

例 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

因为,由 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$,得关于 x 的方程 $e^{2x}-2ye^x-1=0$. 解出

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}>0,\text{得 } x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

所以 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数是 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 定义域是 $\mathbf{R}$.

2. 函数的四种特性

(1)**有界性** 设 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $I\subset D$. 如果存在某个正数 M,使对任一 $x\in I$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界;如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

【注】(1)从几何上看,如果在给定的区间,函数 $y=f(x)$ 的图形能够被直线 $y=-M$ 和 $y=M$"完全包起来",则为有界,从解析上说,找到某个正数 M,使得 $|f(x)|\leqslant M$,则为有界.

(2)有界还是无界的讨论首先得 $\boxed{\text{指明区间 } I}$,不知区间,无法谈论有界性. 比如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(2,+\infty)$ 内有界,但在 $(0,2)$ 内无界.

(3)什么是无界函数?事实上,只要在区间 I 上存在点 x_0 使得函数 $f(x)$ 的值为无穷大,则没有任何两条直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 可以把 I 上的 $f(x)$"包起来",这就叫无界. 值得指出,无界函数并不要求所有定义域上的点都使得函数值无穷大,只要存在这样的点 x_0 就可以了. 考研中常出这样的题目,比如,函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界( ).

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$

分析 有如下两个重要结论:

① 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界;

② 若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在,则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有界.

解答 因为,当 $x\neq 0,1,2$ 时,$f(x)$ 连续,而

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},\lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\lim_{x\to 2}f(x)=\infty,$$

所以,函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界,故选(A).

(2)**单调性** 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加. 同理,如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

【注】后面会看到，在考研试题中常常是用求导来讨论函数在某个区间的单调性，但是定义法不可以忘记. 试题中也用到如下定义法的判别形式，请读者留意：

对任何 $x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2$，则

$$f(x)\text{是增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0;$$
$$f(x)\text{是减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant 0;$$
$$f(x)\text{是严格增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0;$$
$$f(x)\text{是严格减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0.$$

(3)**奇偶性** 设 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数. 同理，如果对于任一 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数. 我们熟知的是，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

【注】设 $f(x)$是定义在$[-l,l]$上的任何函数，则

$F_1(x)=f(x)-f(-x)$必为**奇函数**；$F_2(x)=f(x)+f(-x)$必为**偶函数**.

显然：

$$u(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]\text{是偶函数},\quad v(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\text{是奇函数}.$$

而 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x)$.

(4)**周期性** 设 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期. 从几何图形上看，在周期函数的定义域内，每个长度为 T 的区间上，函数的图形完全一样.

【注】(1)奇函数 $y=f(x)$的图形关于坐标原点对称，当 $f(x)$在 $x=0$ 处有定义时，必有 $f(0)=0$；

(2)偶函数 $y=f(x)$的图形关于 y 轴对称，且当 $f'(0)$存在时，必有 $f'(0)=0$；

(3)函数 $y=f(x)$与 $y=-f(x)$的图形关于 x 轴对称；函数 $y=f(x)$与 $y=f(-x)$的图形关于 y 轴对称；

(4)函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=T$ 对称的充分必要条件是

$$f(x)=f(2T-x)\text{或 }f(x+T)=f(T-x).$$

3. 复合函数

设 $y=f(u)$的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)](x\in D),$$

称为由函数 $u=g(x)$和函数 $y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为 D，u 称为中间变量. 对于复合函数，重要的是熟练掌握分解与复合的技术，这是考研的一个重点考点.

二、函数极限的概念、性质与定理

1. 邻域

(1)**一维的情形**

邻域 以点 x_0为中心的任何开区间称为点 x_0的邻域，记作$U(x_0)$.

δ 邻域 设 δ 是一正数，则称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0的 δ 邻域，记作$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\},$$

其中点 x_0称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

δ 去心邻域 定义去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$： $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$

左、右 δ 邻域 $\{x\,|\,0<x-x_0<\delta\}$称为点 x_0的右 δ 邻域，记作 $U^+(x_0,\delta)$；$\{x\,|\,0<x_0-x<\delta\}$称为点 x_0的左 δ 邻域，记作 $U^-(x_0,\delta)$.

(2)**二维的情形**

δ 邻域 设 $P_0(x_0,y_0)$是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$距离小于 δ 的点 $P(x,y)$的全体，称为点 P_0的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}\text{或}U(P_0,\delta)=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

ε去心邻域 点 P_0的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|P_0P|<\delta\}$. 需要指出，如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$表示点 P_0的某个邻域，点 P_0的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

δ邻域的几何意义 $U(P_0,\delta)$表示 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$的全体.

邻域与区间(区域) 邻域当然属于区间(区域)的范畴，但事实上，邻域通常表示“一个局部位置”，比如“点 x_0的 δ 邻域”，就可以称为“点 x_0的附近”. 于是，函数 $f(x)$在点 x_0的某 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$在点 x_0的附近有定义，这个“附近”到底有多近多远？既难以说明也没有必要说明. 有例为证：2007 年有一道考研数学题说，设函数 $y=y(x)$由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$在点(1,1)附近的凹凸性.

【注】关于邻域的一组概念非常重要，因为这涉及到我们将要“在一个局部位置”细致地研究问题.

2. 函数极限的定义

设函数 $f(x)$在点 x_0的某一去心邻域内有定义. 若 $\exists$ 常数 A，对于 $\forall\varepsilon>0$(不论它多么小)，总 $\exists$ 正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad\text{或 } f(x)\to A\ (\text{当 } x\to x_0).$$

写出语言是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】(1)这是用“$\varepsilon-\delta$ 语言”来描述函数极限. 符号“$\forall$”是英文 Arbitrary(任意的，武断的)的首字母上下方向倒着写出来的；符号“$\exists$”是英文 Exist(存在)的首字母左右方向倒着写出来的.

(2)这里 x 的趋向方式要比数列问题多得多，对于 $x\to x_0$，既要考虑 x 从 x_0的左侧(即小于 x_0)无限接近 x_0：$x\to x_0^-$；也要讨论 x 从 x_0的右侧(即大于 x_0)无限接近 x_0：$x\to x_0^+$；对于 $x\to\infty$，既包括 $x\to-\infty$，也包括 $x\to+\infty$. 不再一一列出，读者应学会写出函数极限的精确定义，提示一下，对于 $x\to\infty$时的极限，其语言为：

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当}|x|>X\text{ 时，有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(3)如何使用“$\varepsilon-\delta$ 语言”？请看例 7.

3. 函数的单侧极限

若当 $x\to x_0^-$时，$f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^-)=A;$$

若当 $x\to x_0^+$时，$f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的**右极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\text{ 或 }f(x_0^+)=A.$$

4. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,\text{且}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$$

5. 函数极限的性质

唯一性 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么极限唯一.

局部有界性 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

局部保号性 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

【注】局部有界性和保号性的证明，见例 8 和例 9.

6. 无穷小与无穷大

无穷小定义 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$的极限为零，那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或

$x\to\infty$)时的无穷小,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=0).$$

特别地,以零为极限的数列$\{x_n\}$称为$n\to\infty$时的无穷小.

无穷大定义 如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,函数$|f(x)|$无限增大,那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大. 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

无穷小与无穷大的关系 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq0$,则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

无穷小的比较 设在同一自变量的变化过程中,$\lim\alpha(x)=0$,$\lim\beta(x)=0$,且$\beta(x)\neq0$,则

(1)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小,记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$;

(2)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq0$,则称$\alpha(x)$是与$\beta(x)$同阶的无穷小;

(3)若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$;则称$\alpha(x)$是与$\beta(x)$**等价的无穷小**,记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$;

(4)若$\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq0$,则称$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小.

【注】并不是任意两个无穷小量都可进行比较的. 比方说,当$x\to0$时,$x\sin\frac{1}{x}$与x^2虽然都是无穷小,但是却不可以比较,也就是说既无高低阶之分,也无同阶可言,因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不存在;

再比如说,如果当$x\to0$时,$f(x)\to0$,是否一定就有$\sin[f(x)]\sim f(x)$?答案是否定的. 具体说来,当$x\to0$时,是否就有$\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\sim x\sin\frac{1}{x}$?我们看到,在$x=0$点的任一小的去心邻域内,总有点$x=\frac{1}{k\pi}\to0$($|k|$为充分大的正整数),使$\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$在该点没有定义,故$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}{x\sin\frac{1}{x}}$不存在.

事实上,这是个极其隐蔽的细节,在考研命题中,命题人会注意不出现这种过于细致的讨论,读者了解上述说法即可.

7. 极限运算规则

若$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,那么

(1) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$,其中$k,l$为常数;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

特别地,若$\lim f(x)$存在,n为正整数,则$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

(3) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

特别地,我们提出下面的"8".

8. 无穷小运算规则

(1)有限个无穷小的和是无穷小.

(2)有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3)$\boxed{\text{有限个}}$无穷小的乘积是无穷小.(注意是有限个,不是无穷个)