

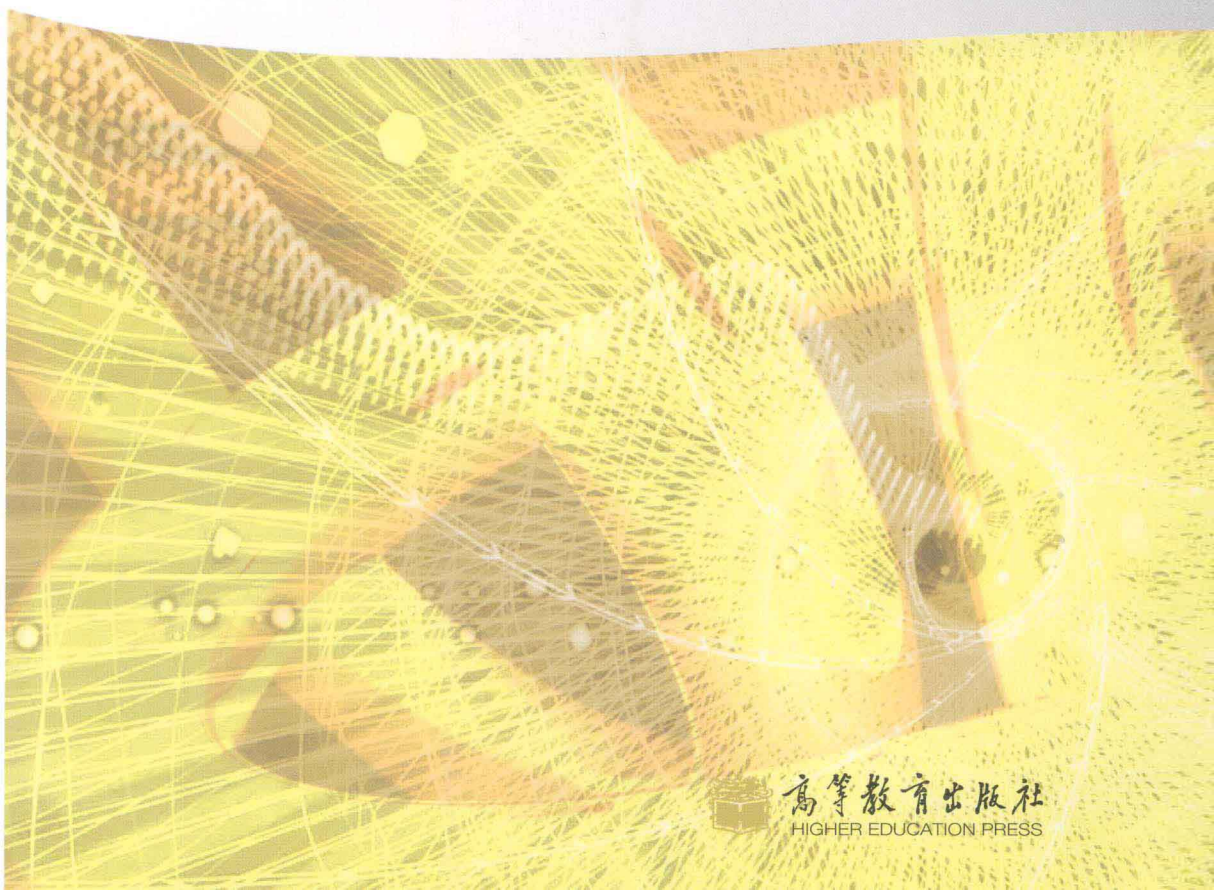
教育部高等理工教育教学改革与实践项目研究成果  
国家精品课程主讲教材

# 离散数学及其应用

(第2版)

Discrete Mathematics and Its Applications

傅彦 顾小丰 王庆先 刘启和 编著



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高等理工教育教学改革与实践项目  
国家精品课程主讲教材

# 离散数学及其应用

Lisan Shuxue ji qi Yingyong

(第2版)

傅彦 顾小丰 王庆先 刘启和 编著



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 内容提要

本书是国家精品课程“离散数学”的主讲教材,也是教育部高等理工教育教学改革与实践项目的研究成果。本书系统地介绍了数理逻辑与基本定理证明方法、二元关系、图论、代数系统与布尔代数中有关的概念、定理及其证明方法,既注重对基本概念的描述,又注重阐述离散数学的证明方法及其在计算机科学中的实际应用,并以课程设计和实验的方式举出大量的应用实例。本书还配有《离散数学实验与习题解析》及电子教案。

本书可作为高等学校计算机科学与技术专业离散数学课程教材,也可作为其他相关专业的离散数学课程教材。

## 图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/傅彦等编著. 2版. 北京:  
高等教育出版社, 2013. 6

ISBN 978-7-04-037148-2

I. ①离… II. ①傅… III. ①离散数学—高等学校—  
教材 IV. ①O158



中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 069005 号

策划编辑 刘 艳      责任编辑 刘 艳      封面设计 杨立新      版式设计 于 婕  
插图绘制 尹 莉      责任校对 张小镝      责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 三河市华东印刷装订厂  
开 本 787mm × 1092mm 1/16  
印 张 30.75  
字 数 690 千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.landrac.com>  
<http://www.landrac.com.cn>  
版 次 2007 年 7 月第 1 版  
2013 年 6 月第 2 版  
印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷  
定 价 38.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究  
物料号 37148-00

# 前 言

本书是由电子科技大学离散数学课程组教师共同编写的。电子科技大学离散数学课程于2005年被评为国家精品课程，2008年被列入国家双语教学示范课程建设项目；课程组2009年获得四川省教学团队，2010年所在的“计算机专业核心课程教学团队”获得国家级教学团队。本书就是根据课程组多年讲授离散数学的教学实践经验撰写而成的。

本书针对1~2学期的离散数学课程而设计，适用于高等学校数学类专业、计算机类专业的学生使用，其先行课程为线性代数。

离散数学是现代数学的一个重要分支，也是计算机科学与技术的理论基础，所以又称为计算机数学。

作为数学的一个分支，离散数学的研究对象是各种各样的离散量的结构及其关系，并且一般是有限个或者可数个元素。同时在整个离散数学的讨论中，也非常重视“能行性”问题的研究，即要解决一个问题，首先要证明此问题的解的存在性，但是仅仅解决存在性是不够的，还需要给出得到此问题解的步骤，而且该步骤是有限的、有规则的。这与连续数学中的讨论方式相违背。而且，它由多个数学分支组成，每一个分支基本上可以看成是一个独立的研究领域，它们从不同的角度出发，研究各种离散量之间数与形的关系。同时这些分支也并非相互独立，它们之间有着密切的关系，可以说，离散数学是一门综合的数学学科。离散数学作为计算机科学与技术专业的核心课程，充分地描述了计算机科学离散性的特点，为后继课程，如数据结构、编译系统、操作系统、数据库原理和人工智能、信息安全、计算机网络、算法分析等课程提供了必要的数学基础。

对于学生而言，不仅要学会一些特定的数学知识并知道如何应用，更重要的是要学习如何进行数学思维。本书特别强调数学推理及用不同的方法解题，为学生今后继续学习和工作，参加科学研究，攀登科技高峰，打下坚实的数学基础。

在本书的编写过程中，我们力求充分体现基础与前沿的关系、基础与后续课程的关系，注重理论与实践的结合，强调以逻辑的思想为主线，并在此基础上建立了各种证明问题的方法，突出定义和定理的逻辑描述特征，同时侧重于就若干重要内容介绍其概念和独特的方法，内容以工科学生“够用”为限，突出重点；在阐述内容时，力求做到结构严谨，通俗易懂；推演时务求详尽；大部分概念都用例子加以说明；强化基本概念的描述，注重基本理论的证明方法，目的在于启发学生的思想；淡化大量烦琐的、含有特殊技巧的、不带普遍意义的理论证明方法。针对离散数学的特点，有些问题给出了不同的解法，同一概念给出了不同的描述，希望能

## II 前言

起到举一反三的作用。

本书通俗易懂，每个例题和证明都是采用先分析、后求解或证明的描述风格。在每一章前有本章内容提要、学习要求，章后有该章的主要知识点汇集、习题类型、解题分析和证明方法等。另外，由于在学习离散数学的过程中需要相应的数学基础知识，所以在编写本书时增加了一篇预备知识，它包括了学习离散数学所需要的所有数学基础知识，这对学习离散数学会有很大的帮助。

此书分5篇，共15章，第1章、第2章、第6章至第8章由王庆先撰写，第3章至第5章由傅彦撰写，第9章至第11章由顾小丰撰写，第12章至第15章由刘启和撰写。

由于作者水平有限，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编者  
2013年2月

# 目 录

## 第1篇 预备知识

引言	2	第2章 计数问题	24
第1章 集合论	3	2.0 内容提要	24
1.0 内容提要	3	2.1 学习要求	24
1.1 学习要求	3	2.2 基本原理	25
1.2 集合	4	2.2.1 乘法原理	25
1.2.1 集合的表示	5	2.2.2 加法原理	26
1.2.2 集合与元素的关系	6	2.2.3 基本原理的难点	27
1.2.3 集合与集合的关系	7	2.3 排列与组合	27
1.2.4 几个特殊的集合	9	2.3.1 排列问题	27
1.2.5 集合的运算	10	2.3.2 组合问题	30
1.2.6 集合的难点	13	2.3.3 排列与组合的难点	31
1.3 无限集	13	2.4 容斥原理与鸽笼原理	31
1.3.1 可数集合和不可数集合	13	2.4.1 容斥原理	31
1.3.2 无限集的难点	16	2.4.2 鸽笼原理	34
1.4 集合的应用	16	2.4.3 容斥原理与鸽笼原理的 难点	35
1.5 本章总结	19	2.5 本章总结	35
1.6 习题	20	2.6 习题	36

## 第2篇 数理逻辑

引言 .....	40	3.6 命题逻辑的推理理论.....	83
第3章 命题逻辑 .....	42	3.6.1 推理的基本概念和推理 形式 .....	83
3.0 内容提要.....	42	3.6.2 判断有效结论的常用 方法 .....	84
3.1 学习要求.....	42	3.6.3 命题逻辑推理的难点 .....	90
3.2 命题与命题联结词.....	43	3.6.4 命题逻辑推理的应用 .....	91
3.2.1 命题.....	43	3.7 本章总结.....	93
3.2.2 命题联结词 .....	44	3.8 习题.....	95
3.2.3 联结词的难点 .....	50	第4章 谓词逻辑 .....	99
3.2.4 命题联结词的应用.....	51	4.0 内容提要 .....	100
3.3 命题公式、解释与真值表.....	54	4.1 学习要求 .....	100
3.3.1 命题公式 .....	55	4.2 谓词逻辑中的基本概念与 表示 .....	100
3.3.2 命题公式的解释与 真值表 .....	56	4.2.1 谓词 .....	101
3.3.3 命题公式的分类 .....	58	4.2.2 量词 .....	103
3.3.4 命题公式的基本等价 关系.....	60	4.2.3 谓词的语言翻译 .....	106
3.3.5 命题公式的难点 .....	64	4.2.4 谓词翻译的难点 .....	107
3.3.6 命题公式的应用 .....	64	4.2.5 谓词翻译的应用 .....	108
* 3.4 联结词的完备集 .....	67	4.3 谓词合式公式与解释 .....	109
3.4.1 命题联结词的种数.....	67	4.3.1 谓词的合式公式 .....	109
3.4.2 联结词的完备集 .....	69	4.3.2 自由变元和约束变元 .....	110
3.4.3 联结词的完备集的应用 .....	70	4.3.3 谓词合式公式的解释 .....	112
3.5 公式的标准型——范式.....	72	4.3.4 谓词合式公式的分类 .....	114
3.5.1 析取范式和合取范式 .....	72	4.3.5 谓词合式公式的基本 等价关系 .....	115
3.5.2 主析取范式和主合取 范式 .....	74	4.3.6 谓词合式公式的难点 .....	117
3.5.3 范式的难点 .....	81	4.3.7 谓词合式公式的应用 .....	117
3.5.4 范式的应用 .....	81	4.4 公式的标准型——范式 .....	118

4.4.1 前束范式 .....	118	5.2 证明定理的方法 .....	139
4.4.2 Skolem 标准型 .....	119	5.2.1 基本证明技术 .....	139
4.4.3 范式的难点 .....	120	5.2.2 几种典型的证明技术 .....	141
4.5 谓词逻辑的推理理论 .....	120	5.2.3 带量词的证明技术 .....	143
4.5.1 谓词演算的演绎与推理 .....	120	5.2.4 证明中的错误 .....	145
4.5.2 谓词演算的综合推理 方法 .....	123	5.3 数学归纳法 .....	146
4.5.3 谓词逻辑推理的难点 .....	127	5.3.1 数学归纳法 .....	147
4.5.4 谓词逻辑推理的应用 .....	127	5.3.2 强形式数学归纳法 .....	150
4.6 本章总结 .....	132	5.3.3 数学归纳法的应用 .....	151
4.7 习题 .....	134	5.4 按定义证明方法 .....	154
<b>第 5 章 证明技术</b> .....	138	5.4.1 按定义证明方法 .....	154
5.0 内容提要 .....	138	5.4.2 按定义证明方法的应用 实例 .....	155
5.1 学习要求 .....	139	5.5 本章总结 .....	156
		5.6 习题 .....	156

### 第 3 篇 二元关系

引言 .....	160	6.3.5 关系运算的应用 .....	183
<b>第 6 章 二元关系</b> .....	161	6.4 关系的性质 .....	184
6.0 内容提要 .....	161	6.4.1 关系性质的定义 .....	184
6.1 学习要求 .....	161	6.4.2 关系性质的判定定理 .....	192
6.2 二元关系 .....	162	6.4.3 关系性质的保守性 .....	193
6.2.1 序偶和笛卡儿积 .....	162	6.4.4 关系性质的难点 .....	195
6.2.2 关系的定义 .....	165	6.4.5 关系性质的应用 .....	195
6.2.3 关系的表示法 .....	167	6.5 关系的闭包运算 .....	195
6.2.4 二元关系的难点 .....	171	6.5.1 关系的闭包 .....	195
6.2.5 关系的应用 .....	172	6.5.2 关系闭包的难点 .....	200
6.3 关系的运算 .....	173	6.5.3 关系闭包的应用 .....	200
6.3.1 关系的复合运算 .....	174	6.6 本章总结 .....	201
6.3.2 关系的逆运算 .....	178	6.7 习题 .....	202
6.3.3 关系的幂运算 .....	181	<b>第 7 章 特殊关系</b> .....	207
6.3.4 关系运算的难点 .....	183	7.0 内容提要 .....	207
		7.1 学习要求 .....	207



## IV 目录

7.2 等价关系 .....	208	8.1 学习要求 .....	233
7.2.1 等价关系 .....	208	8.2 函数 .....	234
7.2.2 集合的划分 .....	210	8.2.1 函数的定义 .....	234
7.2.3 等价类与商集 .....	211	8.2.2 函数的类型 .....	236
7.2.4 等价关系与划分 .....	213	8.2.3 常用函数 .....	239
7.2.5 等价关系的难点 .....	216	8.2.4 函数的难点 .....	240
7.2.6 等价关系的应用 .....	217	8.2.5 函数的应用 .....	240
7.3 次序关系 .....	218	8.3 函数的运算 .....	242
7.3.1 拟序关系 .....	218	8.3.1 函数的复合运算 .....	242
7.3.2 偏序关系 .....	219	8.3.2 函数的逆运算 .....	244
7.3.3 全序关系 .....	225	8.3.3 函数运算的难点 .....	245
7.3.4 良序关系 .....	226	8.3.4 函数运算的应用 .....	245
7.3.5 次序关系的难点 .....	227	8.4 置换函数 .....	247
7.3.6 次序关系的应用 .....	227	8.4.1 基本概念 .....	247
7.4 本章总结 .....	229	8.4.2 置换函数的难点 .....	248
7.5 习题 .....	230	8.4.3 置换函数的应用 .....	248
<b>第8章 函数</b> .....	<b>233</b>	8.5 本章总结 .....	249
8.0 内容提要 .....	233	8.6 习题 .....	250

## 第4篇 图 论

引言 .....	254	9.2.7 结点的度数与握手定理 .....	267
<b>第9章 图</b> .....	<b>256</b>	9.2.8 图的同构 .....	270
9.0 内容提要 .....	256	9.2.9 图的难点 .....	271
9.1 学习要求 .....	256	9.2.10 图的应用 .....	271
9.2 图的基本概念 .....	257	9.3 通路、回路与连通性 .....	272
9.2.1 图的定义 .....	257	9.3.1 通路、回路 .....	273
9.2.2 图的表示 .....	258	9.3.2 无向图的连通性 .....	280
9.2.3 邻接点与邻接边 .....	260	9.3.3 有向图的连通性 .....	282
9.2.4 图的分类 .....	261	9.3.4 通路、回路与连通性的 难点 .....	286
9.2.5 图的操作 .....	263	9.3.5 通路、回路与连通性的 应用 .....	286
9.2.6 子图与补图 .....	264	9.4 本章总结 .....	289

9.5 习题 .....	290	11.2.3 欧拉图的难点 .....	324
<b>第 10 章 树</b> .....	294	11.2.4 欧拉图的应用 .....	324
10.0 内容提要 .....	294	11.3 哈密顿图 .....	326
10.1 学习要求 .....	294	11.3.1 哈密顿的引入与定义 .....	326
10.2 树 .....	295	11.3.2 哈密顿图的判定 .....	328
10.2.1 树的定义与性质 .....	295	11.3.3 哈密顿图的难点 .....	332
10.2.2 生成树 .....	297	11.3.4 哈密顿图的应用 .....	332
10.2.3 最小生成树 .....	300	11.4 偶图 .....	337
10.2.4 无向树的难点 .....	302	11.4.1 偶图的定义 .....	337
10.2.5 无向树的应用 .....	303	11.4.2 偶图的判定 .....	337
10.3 根树 .....	303	11.4.3 匹配 .....	338
10.3.1 根树的定义与分类 .....	303	11.4.4 偶图的难点 .....	339
10.3.2 根树的遍历 .....	307	11.4.5 偶图的应用 .....	340
10.3.3 最优树与赫夫曼算法 .....	309	11.5 平面图 .....	341
10.3.4 根树的难点 .....	311	11.5.1 平面图的定义 .....	341
10.3.5 根树的应用 .....	312	11.5.2 平面图的简单判定方法 ——观察法 .....	342
10.4 本章总结 .....	317	11.5.3 欧拉公式 .....	343
10.5 习题 .....	318	11.5.4 库拉托夫斯基定理 .....	346
<b>第 11 章 特殊图</b> .....	320	11.5.5 对偶图 .....	347
11.0 内容提要 .....	320	11.5.6 图的着色 .....	348
11.1 学习要求 .....	320	11.5.7 平面图的难点 .....	351
11.2 欧拉图 .....	321	11.5.8 平面图的应用 .....	351
11.2.1 欧拉图的引入与定义 .....	321	11.6 本章总结 .....	353
11.2.2 欧拉图的判定 .....	322	11.7 习题 .....	354

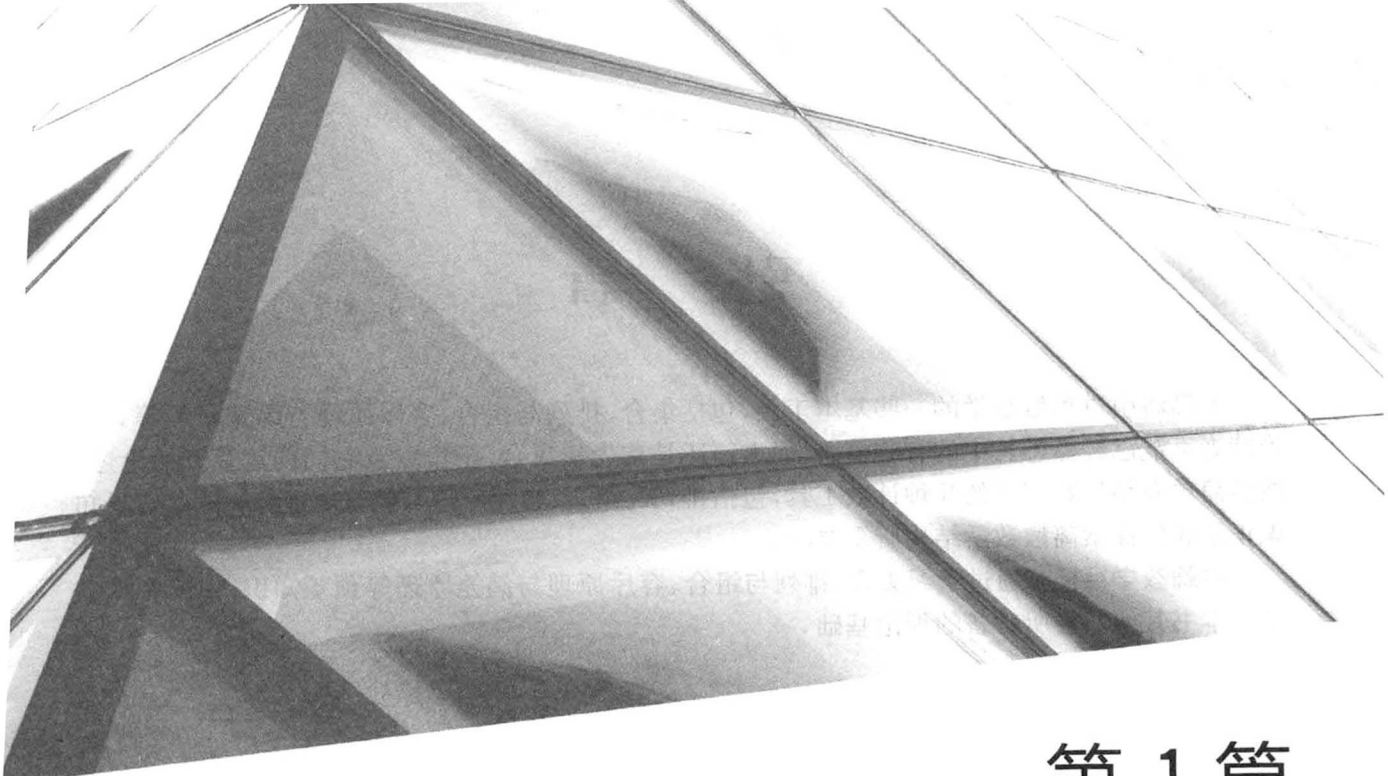
## 第 5 篇 代数系统

引言 .....	360	12.2 代数系统 .....	362
<b>第 12 章 代数系统</b> .....	361	12.2.1 代数运算 .....	362
12.0 内容提要 .....	361	12.2.2 代数系统与子代数 .....	365
12.1 学习要求 .....	361	12.2.3 代数系统的难点 .....	366
		12.2.4 代数系统的应用 .....	366
		12.3 代数系统的基本运算和	

性质	367	13.4.5 特殊群的应用	421
12.3.1 二元运算律	367	13.5 陪集与拉格朗日定理	423
12.3.2 代数系统的性质	373	13.5.1 陪集	423
12.3.3 代数系统性质的难点	381	13.5.2 拉格朗日定理	426
12.3.4 代数系统性质的应用	381	13.5.3 陪集与拉格朗日定理的 难点	427
12.4 同态与同构	382	* 13.5.4 拉格朗日定理的应用	427
12.4.1 同态与同构	383	13.6 正规子群与商群	428
12.4.2 同态的性质	385	13.6.1 正规子群(不变 子群)	428
12.4.3 同态与同构的难点	387	* 13.6.2 商群	430
12.4.4 同态与同构的应用	387	13.6.3 正规子群与商群的 难点	433
12.5 本章总结	389	* 13.6.4 商群的应用	433
12.6 习题	390	13.7 本章总结	434
<b>第13章 群</b>	392	13.8 习题	435
13.0 内容提要	392	<b>* 第14章 环与域</b>	438
13.1 学习要求	392	14.0 内容提要	438
13.2 半群与含么半群	393	14.1 学习要求	438
13.2.1 半群与含么半群	393	14.2 环与域	439
13.2.2 元素的幂	395	14.2.1 环与域的定义	439
13.2.3 循环半群	396	14.2.2 环与域的性质	441
13.2.4 半群与含么半群的 难点	398	14.2.3 环与域的应用	443
13.2.5 半群的应用	398	14.3 本章总结	443
13.3 群及其性质	399	14.4 习题	444
13.3.1 群的定义及基本性质	401	<b>第15章 格与布尔代数</b>	445
13.3.2 元素的周期	403	15.0 内容提要	445
13.3.3 子群	407	15.1 学习要求	446
13.3.4 群的同态	413	15.2 格	446
13.3.5 群及子群的难点	414	15.2.1 偏序格	446
13.3.6 群的应用	414	15.2.2 代数格	448
13.4 特殊群	416	15.2.3 偏序格与代数格的 等价性	449
13.4.1 交换群(阿贝尔群)	416		
13.4.2 循环群	417		
* 13.4.3 置换群	420		
13.4.4 特殊群的难点	421		

15.2.4	格的性质 .....	451	15.3.1	布尔代数 .....	461
15.2.5	子格与格同态 .....	452	15.3.2	布尔表达式 .....	464
15.2.6	分配格与模格 .....	455	15.3.3	布尔代数的难点 .....	467
15.2.7	有界格与有补格 .....	458	15.3.4	布尔代数的应用 .....	467
15.2.8	格的难点 .....	460	15.4	本章总结 .....	472
15.2.9	格的应用 .....	461	15.5	习题 .....	472
15.3	布尔代数 .....	461			

参考文献 .....	475
------------	-----



## 第 1 篇

# 预备知识

# 引 言

本篇将引进离散数学的一些基本工具,包括集合、排列与组合、容斥原理与鸽笼原理等. 尽管读者可能已经熟悉其中的有些概念,但本篇还是首先从集合、子集以及它们的运算开始论述,然后简单介绍计数问题的几种计数工具,包括排列与组合、容斥原理与鸽笼原理等. 这些背景知识正是我们探索离散数学结构所需要的.

**本篇教学目标:** 通过学习集合、排列与组合、容斥原理与鸽笼原理等预备知识,使读者掌握学习本书其他各篇所必备的理论基础.

# 第1章 集合论

集合论是现代数学的基础,几乎与现代数学的每个分支都有着密切的联系,它已渗透到所有科技领域,是不可缺少的数学工具和表达语言.

集合论的起源可以追溯到16世纪末期,为了追寻微积分的坚实基础,人们对数集进行了研究.1879—1884年,康托尔(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论研究的文章,这些文章为集合论奠定了深厚的基础.1904—1908年,策梅洛(Zermelo)列出了第一个集合论的公理系统,并逐步形成了公理化集合论.

这里学习集合论,是因为计算机科学及其应用的研究与集合论有着极其密切的关系.集合不仅可以表示数,而且还可以像数一样进行运算,更可以用于非数值信息的表示和处理,如数据的增加、删除、排序以及数据之间关系的描述等;有些问题很难用传统的数值计算来处理,却可以用集合运算来处理.因此,集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域都有着广泛的应用,并且得到了进一步的发展.

本章主要介绍集合、子集的基本概念及相关性质;集合之间的各种运算及其运算性质;有限集和无限集的基本概念.但对集合论本身及其公理化系统不作深入探讨.

## 1.0 内容提要

1. 与集合相关的概念和特殊集合:集合的定义、集合的表示、属于和不属于、子集、真子集、包含和真包含、幂集、空集、全集、基数、有限集、无限集等.

2. 与集合运算相关的概念和定理:集合的交、并、差、补和对称差等5种运算的定义及相关运算律.

## 1.1 学习要求

### 1. 重点掌握的核心知识点

- (1) 领会集合的概念,能判定元素与给定集合的关系.
- (2) 能正确运用枚举法或叙述法表示一个集合,会画文氏图.
- (3) 能证明两个集合之间的真包含、包含和相等关系.

- (4) 能熟练地进行集合之间的交、并、差和补等集合运算,掌握集合的运算律.
- (5) 能熟练地计算集合的幂集.

### 2. 一般掌握的知识点

- (1) 集合的归纳法表示.
- (2) 集合的对称差运算.

### 3. 了解的知识

- (1) 集合的递归指定法表示.
- (2) 了解无限集的基本概念.

## 1.2 集 合

**集合(set)**是不能精确定义的基本数学概念.通常,集合是由指定范围内的满足给定条件的所有对象聚集在一起构成的.例如:

- (1) 中国所有的真皮沙发;
- (2) 所有的海鸥;
- (3) 在-1和1之间所有的有理数;
- (4) 全体亚洲人;
- (5) 中国高等学校开设的所有课程;
- (6) 天安门广场所有的路灯和树;
- (7) 所有C语言中的标准符;
- (8) 全体素数;
- (9) 全体奇数;
- (10) 全体偶数.

显然,集合可以由相关的人或事物聚集而成,如上面的集合(1)~(5),(7)~(10),也可以由毫无关联的人或事物聚集而成,如上面的集合(6).

指定范围内的每一个对象称为这个集合的**元素(element)**.例如,中国的每一个真皮沙发都是集合(1)中的元素.根据所给的属性,人们总能判断一个对象是否为某个集合中的元素.例如在集合(4)中,任何一个亚洲人都是该集合中的元素,但是其他地区的人就不是这个集合中的元素.

通常情况下,用带(或不带)下标的大写英文字母 $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots$ 表示集合,而用带(或不带)下标的小写英文字母 $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$ 表示元素.

有一些集合,以后常常要用到,可以用固定的符号表示,例如:

$\mathbf{N}$  是自然数集合:  $0, 1, 2, \dots$ ;

$\mathbf{Z}$  是整数集合:  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ;



$\mathbf{Q}$  是有理数集合;

$\mathbf{R}$  是实数集合;

$\mathbf{C}$  是复数集合.

### 1.2.1 集合的表示

集合是由它所包含的元素完全确定的. 为了表示一个集合, 可以有多种方法.

#### 1. 枚举法(显示法)

列出集合中全部元素或部分元素且能看出其他元素规律的方法叫枚举法(显示法). 一般来说, 当一个集合仅含有限个元素或元素之间有明显关系时, 通常采用枚举法(显示法).

例 1.2.1 指出下列集合的表示方法.

$$(1) A = \{a, b, c, d\};$$

$$(2) B = \{1, 3, 5, 7, \dots, 2n+1, \dots\}.$$

分析 (1) 集合  $A$  中仅含 4 个元素, 将其全部列出, 即采用了枚举法表示;

(2) 集合  $B$  中的元素是部分列出的, 并且存在着明显的规律: 自然数的 2 倍加 1 都是集合  $B$  中的元素, 因而也是枚举法.

解 (1) 和 (2) 的表示方法都是枚举法.

上述表示方法实际上是一种显示表示法, 其优点在于具有直观性. 但是, 对某些集合, 列出其所有的元素是不可能的. 而且, 从计算机的角度看, 显示法是一种“静态”表示法, 如果同时将所有的“数据”都输入到计算机中, 则会占据大量的“内存”, 为此, 给出另一种描述集合的方法——叙述法(隐式法).

#### 2. 叙述法(隐式法)

通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的方法称为叙述法(隐式法), 通常用符号  $P(x)$  来表示不同对象  $x$  所具有的性质  $P$ , 由  $P(x)$  所定义的集合常记为

$$\{x | P(x)\}$$

例 1.2.2 指出下列集合的表示方法.

$$(1) A = \{x | x \text{ 是“discrete mathematics”中的所有字母}\};$$

$$(2) \mathbf{Z} = \{x | x \text{ 是一个整数}\};$$

$$(3) S = \{x | x \text{ 是整数, 并且 } x^2 + 1 = 0\};$$

$$(4) \mathbf{Q}^+ = \{x | x \text{ 是一个正有理数}\}.$$

分析 (1) “discrete mathematics”中共有 19 个字母, 但根据集合元素的互异性, 不同的字母只有“d, i, s, c, r, e, t, m, a, h”共 10 个, 因此,  $A = \{d, i, s, c, r, e, t, m, a, h\}$ ;

$$(2) \mathbf{Z} \text{ 包含的元素为: } \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots;$$

(3) 没有任何整数满足  $x^2 + 1 = 0$ , 因此集合  $S$  中没有元素;

(4)  $\mathbf{Q}^+$  包含的元素可以写成  $a/b$ , 其中  $a$  和  $b$  都是整数,  $b$  不为零并且  $a, b$  同号.

解 上述(1)~(4)都是通过刻画集合中元素所具备的某种特性来表示集合的, 所以都是用