



普通高等教育“十二五”规划教材

# 数学物理方法 (第二版)

冉扬强 编著



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

# 数学物理方法

(第二版)

冉扬强 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是作者在物理类各专业长期讲授数学物理方法课程的基础上编写的,全书共4篇,分别为复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数。第一篇重点讲解解析函数的独特性质和应用留数定理计算实积分;第二篇加强了对分离变量法和格林函数法的讲解,特别重视本征值问题;第三篇主要讨论傅里叶变换和拉普拉斯变换,强调了积分变换的应用;第四篇讨论了勒让德多项式与球函数、贝塞尔函数、厄米多项式和拉盖尔多项式,特别重视特殊函数的处理方法及其应用。另外,本书含有大量与实际问题有关的例题。每章都有一定数量的习题,书末还附有各章习题答案。书中带“\*”的内容有的是与微积分中有关部分平行的内容,有的是要求较高的参考内容,供各专业选用。

本书可作为高等院校物理类、工科类各专业及相近专业的教材和参考书,也可供相关专业的研究生、教师和科研人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/冉扬强编著. —2版. —北京:科学出版社,2013.6

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-037590-2

I. ①数… II. ①冉… III. ①数学物理方法-高等学校-教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第114285号

责任编辑:窦京涛 / 责任校对:赵桂芬  
责任印制:阎磊 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏立印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

西南师范大学出版社第一版

2013年6月第二版 开本:720×1000 B5

2013年6月第一次印刷 印张:24 1/2

字数:479 000

定价:46.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## 第二版前言

本书第一版曾获第一届西南地区大学出版社优秀图书奖.在第一版的使用中收到教师和读者的宝贵意见,根据这些意见,为适应各层次读者的需要并适当更新知识,在第二版中做了一些修改:首先,为了学生学习后继课程量子力学的需要,增写了一章有关厄米多项式和合流超几何函数与拉盖尔多项式的内容.其次,从教学角度出发进行仔细推敲,改写和补充对一些概念和理论的论述,在文字表述上做一些修改和补充,使语言更加清楚、恰当、准确和科学,便于学生理解.同时对笔误和印刷上的错误进行修正.最后,对全书的习题和答案进行审核,改正个别错误.

本书保持了第一版结构由浅入深、逻辑清晰、叙述和理论推导详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等特点.本书虽然内容较多,包含数学物理方法课程的主要内容,但是编写的形式是从简单到复杂,很多是带“\*”的,便于教师和读者根据具体的情况选取.除有些带“\*”的内容较难以外,其难度适合一般本科院校少学时数学物理方法课程的教学.

本书参考国内外同类优秀教材和参考书,作者从中学到很多知识,受益匪浅,在此表示衷心的感谢.同时向对本书第一版和第二版提出宝贵意见和建议的专家和读者表示衷心的感谢.本书的写作和出版得到西南大学和科学出版社的大力支持,在此深表谢意.

本书中的不足之处在所难免,恳请专家和读者批评指正.

作者

2012年12月于西南大学

## 第一版前言

本书是作者在物理类各专业长期讲授数学物理方法课程的基础上编写的. 本书包括复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数四部分. 本书可作为高等院校物理类、工科类各专业及相近专业的教材和参考书, 也可供相关专业的研究生、教师和科研人员参考.

数学物理方法既是理论物理学的基础, 又是物理学与数学联系的桥梁. 如果能结合“四大力学”, 牢固掌握数学物理方法的知识 and 技能, 就能为以后的学习和工作带来极大的方便.

数学物理方法课程是既具有数学类型又具有物理类型的二重性课程. 为了课程教学的需要, 本书在不失严密性及逻辑性的基础上, 强调运算性和实用性, 力求与物理专业的其他专业课, 如电动力学、量子力学、统计物理学等相衔接, 引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题. 本书以讲授古典数学物理中的常用方法为主, 适当介绍近年来的新发展, 为后继的专业课程研究有关的数学物理问题做准备, 也为今后工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础.

对学物理的人来说, 学数学要遵循从“特殊到一般”的学习和研究方法. 例如, 从物理上归纳出数学问题时, 往往得到一个特殊的方程式, 首先总是问: “怎么求解?” 而不会首先去关心这个方程的解是否“存在”或“唯一”, 后一问题主要依靠数学家去解决. 因为一般说来, 我们不具备这种能力. 因此, 学习数学物理方法, 主要矛盾是如何学习和掌握各种具体的计算方法, 逐步培养利用数学物理方法的知识解决物理问题的能力. 本书的编写就是为了适应这个需要. 另外, 虽然同类优秀教材已很多, 但难度适合一般本科院校的同类教材较少, 作者想编写一本适合一般本科院校少学时数学物理方法课程教学的教材. 本书的编写也是为了这个目的.

本书以数学物理方程和特殊函数部分为重点, 主要讲解数学物理方程的常用解法和最常用的两类特殊函数. 在复变函数论部分, 重点讲解解析函数的独特性质和应用留数定理计算实积分. 在数学物理方程部分, 加强对分离变量法的讲解, 特别重视解本征值问题. 实际上, 它们已成为本书的核心内容. 对格林函数法也特别重视. 在积分变换部分, 以傅里叶变换和拉普拉斯变换为例讨论积分变换, 强调了积分变换的应用. 在特殊函数部分, 重点讨论应用较广的勒让德多项式与球函数、贝塞尔函数, 特别重视特殊函数的处理方法及其在物理学中的应用, 有了这些知识, 就很容易类似地研究其他特殊函数. 另外, 本书含有大量的与实际问题有关的例题. 每章都有一定数量的习题, 其中有的是基本要求的习题, 有的是要求较高的

习题,供读者选做.书末还附有各章习题答案.书中带“\*”的内容有的是与微积分中有关部分平行的内容,有的是要求较高的参考内容,如果讲授学时有限,可以不讲或由学生自学.

对于初学者来说,如何才能学好数学物理方法?学习要有正确的方法,正如华罗庚先生所说,读书要经过由“薄”到“厚”再到“薄”的过程,才能真正把这门课程融会贯通起来.在学习数学物理方法时应该仔细阅读、刻苦钻研每一部分内容,包括每一步的推导,有时还要自己动手推导,并要多问为什么,搞清楚知识的来龙去脉.等到学完以后,把所有内容联系起来,融会贯通,把知识点及计算方法归类.要学好数学物理方法,还必须勤于思考,多做练习,“熟能生巧”.做练习的时候和做好以后,还要多想,想一想每一步有什么根据,还有没有其他方法.

数学物理方法与高等数学是分不开的,它涉及一元和多元微积分学、幂级数、傅里叶级数、微分方程、场论等.因此,在学习数学物理方法的各章节时,应该回忆或复习高等数学中有关知识.当学完数学物理方法以后,读者会发现,您的数学分析水平将有大幅提高.当然,数学物理方法还与物理学有关,如果读者能结合物理学来学,也会给这门课程的学习带来方便.

本书参考了国内外同类优秀教材和参考书,作者从中学到了很多知识,受益匪浅,作者在此表示衷心的感谢.同时向对本书提出宝贵意见和建议的专家表示衷心的感谢.本书的写作和出版得到西南大学和西南大学出版社的大力支持,在此深表谢意.

本书中的不足之处在所难免,恳请专家和读者批评指正.

作 者

2007年5月于西南大学

# 目 录

第二版前言

第一版前言

## 第一篇 复变函数论

第 1 章 复数与复变函数	2
* 1.1 复数及其代数运算	2
1.2 复变函数的基本概念	5
习题 1	9
第 2 章 解析函数	10
2.1 解析函数	10
2.2 解析函数与调和函数的关系	15
2.3 初等解析函数	18
2.4 解析函数在平面场中的应用	25
习题 2	29
第 3 章 复变函数的积分	31
3.1 复变积分的概念及其简单性质	31
3.2 柯西积分定理及其推广	33
3.3 不定积分	37
3.4 柯西积分公式及其推论	38
习题 3	43
第 4 章 复变函数级数	45
* 4.1 复变函数级数的基本概念	45
4.2 幂级数	47
4.3 洛朗级数	52
4.4 单值函数的孤立奇点	57
习题 4	63
第 5 章 留数定理及其应用	65
5.1 留数及留数定理	65
5.2 利用留数计算实积分	71
习题 5	86

* 第 6 章 保角变换 .....	88
6.1 保角变换的概念 .....	88
6.2 分式线性变换 .....	92
6.3 唯一确定分式线性变换的条件 .....	98
6.4 几个初等函数所构成的变换 .....	106
习题 6 .....	111
<b>第二篇 数学物理方程</b>	
第 7 章 一维波动方程 .....	114
7.1 波动方程的建立 .....	114
7.2 齐次方程的分离变量法 .....	119
7.3 非齐次方程的求解 .....	125
7.4 分离变量法举例 .....	128
习题 7 .....	137
第 8 章 一维热传导方程 .....	138
8.1 热传导方程和扩散方程的建立 .....	138
8.2 一维有界空间的输运问题 .....	141
8.3 一维无界空间的输运问题 .....	144
8.4 一端有界的输运问题 .....	152
8.5 无界空间的分离变量法举例 .....	154
习题 8 .....	161
第 9 章 二维拉普拉斯方程 $\delta$ 函数 .....	163
9.1 二维拉普拉斯方程的分离变量法 .....	163
9.2 $\delta$ 函数 .....	172
习题 9 .....	176
第 10 章 二阶线性偏微分方程的分类 本征值问题 .....	178
10.1 二阶线性偏微分方程的分类 .....	178
10.2 施图姆-刘维尔本征值问题 .....	185
习题 10 .....	190
第 11 章 波动方程的达朗贝尔解 .....	191
11.1 弦振动方程的达朗贝尔解 .....	191
11.2 三维空间的行波法 推迟势 .....	199
习题 11 .....	205
第 12 章 格林函数法 .....	206
12.1 格林公式 .....	206
12.2 泊松方程的格林函数法 .....	207



12.3	波动方程的格林函数法	212
12.4	热传导方程的格林函数法	215
12.5	格林函数的求法	216
	习题 12	225
<b>* 第 13 章</b>	<b>变分法</b>	227
13.1	变分法的基本概念	228
13.2	泛函的极值	230
13.3	变分法在求解数学物理方程定解问题中的应用	237
	习题 13	243
<b>* 第 14 章</b>	<b>非线性偏微分方程初步</b>	245
14.1	KdV 方程与孤立波	245
14.2	Burgers 方程与冲击波	250
<b>第三篇 积分变换</b>		
<b>第 15 章</b>	<b>傅里叶变换</b>	254
15.1	傅里叶变换的定义及其基本性质	254
15.2	用傅里叶变换解数理方程举例	261
	习题 15	264
<b>第 16 章</b>	<b>拉普拉斯变换</b>	265
16.1	拉普拉斯变换的定义和它的逆变换	265
16.2	拉普拉斯变换的基本性质	270
16.3	拉普拉斯变换的应用举例	272
	习题 16	283
<b>第四篇 特殊函数</b>		
<b>第 17 章</b>	<b>勒让德多项式 球函数</b>	286
17.1	勒让德微分方程及勒让德多项式	286
17.2	勒让德多项式的主要性质	293
17.3	连带勒让德函数 球函数	300
17.4	球函数应用举例	306
	习题 17	310
<b>第 18 章</b>	<b>贝塞尔函数 柱函数</b>	312
18.1	贝塞尔微分方程及贝塞尔函数	312
18.2	贝塞尔函数的主要性质	322
18.3	虚宗量贝塞尔函数	328
18.4	贝塞尔函数的应用举例	331
18.5	球贝塞尔微分方程及球贝塞尔函数	339

---

习题 18 .....	344
<b>第 19 章 厄米多项式和合流超几何函数与拉盖尔多项式 .....</b>	<b>345</b>
19.1 厄米微分方程及厄米多项式 .....	345
19.2 厄米多项式的主要性质 .....	350
19.3 合流超几何函数与拉盖尔多项式 .....	354
19.4 拉盖尔多项式的主要性质 .....	361
<b>部分习题答案 .....</b>	<b>366</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>380</b>

# 第一篇 复变函数论

---

在高等数学课程中,我们学习了实变函数(自变量为实数的函数)的基本概念和理论及其应用.由于理论的探讨、科学的发展和应用的需要,又出现了复变函数.自变量为复数的函数就是复变函数.复变函数的理论和方法在数学、自然科学和工程技术中有着重要的应用,是解决流体力学、电磁学、弹性力学、热学等的平面场问题的有力工具.而自然科学和工程技术的发展又极大地推动了复变函数的发展,丰富了它的内容.例如,量子力学中的波函数是复数的事实说明复数有对应的物理实在.

复变函数的发展与数学分析是分不开的,它的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展,它们有许多相似之处,但复变函数有它自身的特点,它的中心对象是解析函数,而解析函数具有许多独特的性质.因此,在学习复变函数论的各章节时,应该回忆或复习实变函数的有关知识,找到复变函数与实变函数的相同点和不同点.这样才能抓住本质、融会贯通,把复变函数学好.

本篇主要讨论复变函数的基本概念、理论和方法及其应用,逐步培养利用复变函数的知识解决物理问题的能力.

# 第 1 章 复数与复变函数

本章介绍复数与复变函数的基本概念,首先简单复习有关复数及其运算规则的知识,其次讨论复球面与无穷远点,最后讨论复变函数的概念.

## \* 1.1 复数及其代数运算

本节主要对复数与复数的运算做一次复习.

### 1. 复数

一个复数可表示为

$$z = x + iy \quad (1.1)$$

其中  $x, y$  为实数,分别为复数  $z$  的实部与虚部,记为  $x = \operatorname{Re}z, y = \operatorname{Im}z; i^2 = -1, i$  称为虚数单位.复数的上述表示式(1.1)称为复数的代数式.

讨论 (1) 实部为零的复数  $z = iy$  称为纯虚数,虚部为零的复数  $z = x$  称为实数.全体实数只是全体复数的一部分.

(2) 若实部  $x=0$ ,虚部  $y=0$ ,则  $z=0$  称为复数零.即  $x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$ .

### 2. 复数的运算

$$(1) \text{ 相等: } x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2. \quad (1.2)$$

$$(2) \text{ 和差: } (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1.3)$$

$$(3) \text{ 积: } (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.4)$$

$$(4) \text{ 商: } \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} (x_2 + iy_2 \neq 0). \quad (1.5)$$

从复数的运算法则的定义中很明显地得出复数运算的交换律、结合律和分配律.

$$\text{交换律: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

$$\text{结合律: } z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$$

$$\text{分配律: } (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

全体复数在引入相等关系和运算法则以后,称为复数域.在复数域中,复数没有大小.

### 3. 复平面

如果把  $x$  和  $y$  当成平面上的点  $P$  的坐标, 复数  $z$  就跟平面上的点一一对应起来, 这个平面称为**复数平面**(简称**复平面**)或  $z$  平面,  $x$  轴称为**实轴**,  $y$  轴称为**虚轴**. 今后, 我们不再区分“复数”和“点”, 说到“点  $z$ ”, 它可以代表“复数  $z$ ”, 说到“复数  $z$ ”, 它可以代表“点  $z$ ”, 因此我们可以用复数研究几何问题, 也可以用几何方法来研究复数问题.

在复平面上, 从原点到点  $z=x+iy$  所引的矢量  $\overrightarrow{OP}$  与复数  $z$  也构成一一对应关系(图 1.1), 且复数的相加、减与矢量相加、减的法则是一致的, 即满足**平行四边形法则**(图 1.2).

根据图 1.1 和图 1.2, 还可以得出三角不等式

$$\begin{aligned} |x| &\leq |z|, & |y| &\leq |z|, & |z| &\leq |x| + |y| \\ |z_1| + |z_2| &\geq |z_1 + z_2|, & |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2| \end{aligned} \quad (1.6)$$

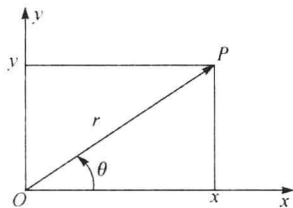


图 1.1

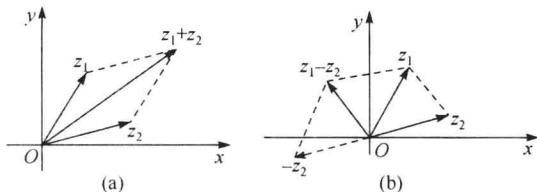


图 1.2

### 4. 复数的三角形式和指数形式

如图 1.1 所示, 用极坐标  $r, \theta$  代替直角坐标  $x$  和  $y$  来表示复数  $z$ , 有

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

则复数  $z$  可表示为

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.7)$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  称为复数  $z$  的**模**, 记为  $|z|$ ;  $\theta$  称为复数  $z$  的**辐角**, 记为  $\text{Arg} z$ . 式(1.7)称为复数的**三角式**. 利用欧拉公式  $e^{i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)$ , 复数  $z$  可表示为

$$z = r e^{i\theta} \quad (1.8)$$

式(1.8)称为复数的**指数式**.

**讨论** (1) 复数的辐角不能唯一确定. 如果  $\theta_0$  是其中一个辐角, 则  $\theta = \theta_0 + 2k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 也是其辐角, 把属于  $(-\pi, \pi]$  的辐角称为**主值辐角**, 记为  $\arg z$ .

(2) 复数“零”的辐角无定义, 其模为零.

(3) 当  $r=1$  时,  $z = (\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta}$  称为**单位复数**.

利用复数的指数形式作乘除法比较简单,如

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.9)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.10)$$

所以有

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 \quad (1.11)$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2$$

## 5. 共轭复数

一个复数  $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$  的共轭复数为

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta} \quad (1.12)$$

或称  $z$  与  $\bar{z}$  复数共轭.

共轭复数具有下列性质:

$$(1) z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2.$$

$$(2) \bar{\bar{z}} = z.$$

$$(3) z + \bar{z} = 2\text{Re}z, z - \bar{z} = 2i\text{Im}z.$$

$$(4) \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad (1.13)$$

## 6. 复数的乘幂与方根

非零复数  $z$  的整数次幂  $z^n$  为

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (1.14)$$

当  $r=1$  时

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

上式为棣莫弗(De Moivre)公式.

非零复数  $z$  的正整数次根式  $\sqrt[n]{z}$  为

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1.15)$$

讨论 给定的  $\sqrt[n]{z}$  可以取  $n$  个不同的值,它们沿中心在原点、半径为  $\sqrt[n]{r}$  的圆周而等距地分布着.

## 7. 复球面与无穷远点

复数的另一种几何表示,就是建立复平面与球面上的点的对应.

把一个球放在复平面上,球以南极  $S$  跟复平面相切于原点,通过  $O$  点作一垂直于  $z$  平面的直线与球面交于  $N$  点, $N$  称为球的北极,在复平面上任取一点  $z$ ,它与球的北极  $N$  的连线跟球面相交于  $P(z)$ ,这样就建立起复平面上的有限远点跟球面  $N$  以外的点的一一对应,这个球称为**复数球**(图 1.3).

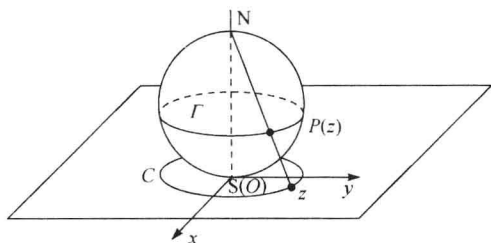


图 1.3

考察复平面上一个以原点为心的圆周  $C$ ,在球面上对应的也是一个圆周  $\Gamma$ (即纬线),当圆周  $C$  的半径越来越大时,圆周  $\Gamma$  就越趋于北极  $N$ .因此,我们可以把北极  $N$  与平面上的一个模为无穷大的假想点相对应,这个假想点称为**无穷远点**,并记为  $\infty$ .无穷远点的辐角没有明确意义.复平面加上点  $\infty$  后,称为**扩充平面**(或**闭平面**,**全平面**),与它所对应的就是整个球面,称为**复球面**,原来的复平面称为**开平面**.

**讨论** (1) 复平面上的无穷远点( $z=\infty$ ),只有一点,即当  $r \rightarrow \infty$  时  $z=re^{i\theta}$  的极限点(不论  $\theta$  取何值),所以  $z \rightarrow \infty$  是指沿任意方向趋于  $\infty$ .

(2) 无穷远点  $\infty$  的运算与实变函数中的无穷大量  $\infty$  的运算相似.例如

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \quad (a \neq \infty), \quad a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \quad (a \neq 0),$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \quad (a \neq \infty), \quad \frac{\infty}{a} = \infty \quad (a \neq \infty), \quad \frac{a}{0} = \infty \quad (a \neq 0), \quad \frac{0}{0} \text{ 仍为不定型.}$$

对于  $\infty \pm \infty, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$  我们不规定其意义.

**注** 在本书以后各处,所谓“复平面”指的是开平面,如果涉及闭平面,一定强调这个“闭”字.

## 1.2 复变函数的基本概念

下面讨论复变数及复变函数问题.复变函数的基本概念是实变函数基本概念的推广,因此我们所叙述的复变函数的概念、极限概念、函数连续与可微等概念与高等数学中的概念叙述相似.

与实变数一样,复变数也有自己的变化范围,经常遇到的变化范围为区域.首先,我们讨论区域的有关概念.

## 1. 区域与若尔当曲线

### 1) 区域的概念

区域的定义: 设有非空平面点集  $D$ , 如果满足

(1) 开集性: 在  $D$  中的每一点  $z$ , 都必有以  $z$  点为圆心的一个充分小的圆全含于  $D$  内(即该圆内的每点都是  $D$  内的点);

(2) 连通性:  $D$  内任意两点都可以用一条由  $D$  内的点所构成的折线连接, 则称  $D$  为区域(图 1.4).

最简单的区域就是邻域, 所谓点  $z_0$  的  $\varepsilon$  邻域, 是指满足  $|z - z_0| < \varepsilon$  的点所组成的集合, 即以  $z_0$  为心,  $\varepsilon$  为半径的圆的内部(图 1.4).

无穷远点的邻域定义为以原点为心的某圆周的外部, 即

$+\infty$  的  $\varepsilon$  邻域是指合乎条件的  $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$  的点集.

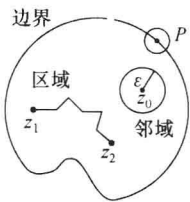


图 1.4

### 2) 界点、边界、闭区域

若点  $P$  不属于区域  $D$ , 但在  $P$  的任意邻域内总包含有  $D$  中的点, 则点  $P$  叫做区域  $D$  的界点.  $D$  的所有界点的集合叫做  $D$  的边界(图 1.4). 区域  $D$  与它的边界一起构成闭区域或闭域, 用  $\bar{D}$  表示. 无穷远点是开平面的界点, 是闭平面的内点. 闭平面是唯一的无边界的区域.

### 3) 简单曲线或若尔当曲线

如果  $x(t)$  和  $y(t)$  是两个连续的实变函数, 则方程组

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.16)$$

代表一条平面曲线, 称为连续曲线, 如果用

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\text{或记为 } z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.17)$$

来表示, 这就是平面曲线的复数表示式. 如果在区间  $\alpha \leq t \leq \beta$  上函数  $x(t)$  和  $y(t)$  具有连续导数, 且  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ , 则称曲线为光滑曲线. 若函数  $x(t)$  和  $y(t)$  具有分段连续导数, 则曲线称为分段光滑曲线.

若曲线  $c: z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$  为一条连续曲线,  $z(\alpha)$  与  $z(\beta)$  分别称为  $c$  的起点与终点. 对于  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1$  与  $t_2$  不同时是  $[\alpha, \beta]$  的端点, 有  $z(t_1) = z(t_2)$ , 则  $z(t_1)$  称为曲线  $c$  的重点. 没有重点的连续曲线称为简单曲线或若尔当曲线. 如果简单曲线  $c$  的起点与终点重合, 即  $z(\alpha) = z(\beta)$ , 则称曲线为简单闭曲线或若尔当闭曲线(图 1.5(a)). 分段光滑的简单闭曲线称为围线. 规定曲线段的方向为从起点到终点. 对于围线, 当观察者绕围线环行时, 如果研究的区域在观察者的左手方, 这方向



为正向,反之为负向.

因此,连续曲线有以下四种情况:

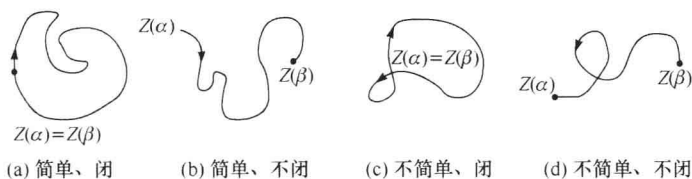


图 1.5

#### 4) 单连通区域与复连通区域

如果在区域  $D$  内任作一条简单闭曲线,而曲线的内部每一点都属于  $D$ ,则称  $D$  为**单连通区域**(图 1.6(a)). 如果一个区域不是单连通区域,则称为**复连通区域**(图 1.6(b)).



图 1.6

单连通区域的重要特征是区域  $D$  内任意一条简单闭曲线,在  $D$  内可以经过连续的变形而缩成一点,而复连通区域不具有这个特征.

## 2. 复变函数的定义

设  $D$  为复数  $z=x+iy$  的集合,如果对于集合  $D$  中的每一个复数  $z$ ,通过一定的对应法则  $f$ ,都有一个或几个复数  $w=u+iv$  与之对应,则称  $w$  为  $z$  的**复变函数**,记为

$$w=f(z) \quad (1.18)$$

$z$  称为**自变量**(或**宗量**), $D$  称为函数的**定义域**,而对应值  $w$  的全体所构成的复数集称为函数的**值域**. 如果  $z$  的一个值只有一个复数  $w$  与之对应,则称为**单值函数**;如果  $z$  的一个值有两个或两个以上的复数  $w$  与之对应,则称为**多值函数**.

把复变函数  $w=f(z)$  的实部和虚部分别记为  $u(x,y),v(x,y)$ ,则

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad (1.19)$$

这就是说,复变函数可以归结为一对二元实函数,因此,实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接推广到复变函数论中,如复变函数的极限和连续性等.

如果要用图形描述  $w=f(z)$ ,可取两张复平面,分别称为  $z$  平面与  $w$  平面,而把复变函数理解为两个复平面上的点集间的对应,如图 1.7 所示. 具体地说,复变