高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版西交大数学教研室·东南大学张元林编

九章丛书

工程数学

复变函数·积分变换

西安交大第四版　　东南大学第四版

（第四版）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

·知识点窍　·逻辑推理　·习题全解

·全真考题　·名师执笔　·题型归类

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

复变函数·积分变换（第四版）同步辅导及习题全解

主　编　苏志平　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内　容　提　要

本书是根据多年的教学经验编写的，与西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》（第四版）以及东南大学数学系张元林编写的《积分变换》（第四版）相配套的辅导用书。

本书通过详细的解题过程、独特而华丽的技巧、经典的概括和阐述来帮助读者掌握复变函数和积分变换这一数学理论。

本书可作为正在学习该课程的理工科大学生，考研学生的学习用书，也可作为教授该课程的青年教师的教学参考书。此外，本书也有益于数学相关专业的学生与广大数学爱好者熟悉这一课程所呈现出的各种思想和解题技巧。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数·积分变换（第四版）同步辅导及习题全解 / 苏志平，郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2013.5
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-0893-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①苏… ②郭… Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教学参考资料②积分变换－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第107410号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：田新颖　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 复变函数·积分变换（第四版）同步辅导及习题全解
作　　者	主　编　苏志平　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京蓝空印刷厂
规　　格	170mm×227mm　16 开本　16.5 印张　373 千字
版　　次	2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	22.80 元

前言

《复变函数·积分变换》是高等院校工科各专业开设的一门基础理论课。它的理论和方法广泛应用于微分方程、概率论、计算数学、流体力学、热传导理论、电磁学、弹性理论、天体力学等学科，并且已经成为解决众多理论与实际问题的强有力工具。西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》(第四版)和东南大学数学系张元林编的《积分变换》(第四版)。以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《复变函数·积分变换同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书除了具有传统辅导书的解题过程外，还具有以下特点：

1. 考试要求：简单扼要地说明本章的学习目标，明确学习任务。

2. 知识点归纳：该部分包含有知识结构、基本概念、主要内容三个小部分，对本章的基本概念、定理、公式等进行了归纳总结，便于读者掌握本章知识要点。

3. 典型例题与解题技巧：该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题，对所给例题先进行分析，再给出详细解答，并在最后作出点评，意在抛砖引玉。

4. 课后习题全解：该部分对每一道习题做了知识点窍、逻辑推理、解题过程的分析，希望读者能够掌握解题的思路、方法和技巧，从而能举一反三，以不变应万变。

由于编者水平有限和时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正。

编者

2009 年 8 月

目 录
contents

第一章

复数与复变函数

知识网络图

- 复数与复变函数
  - 复数的定义与代数运算
    - 复数的定义
    - 复数的四则运算
    - 共轭复数
  - 复数的几种表示方法
    - 复数的坐标表示
    - 复数的向量表示
    - 复数的三角表示
    - 复数的指数表示
    - 复球面
  - 复数的乘幂与方根
    - 积与商
    - 乘幂
    - 方根
  - 复变函数及其极限与连续
    - 平面点集
    - 复变函数的概念
    - 复变函数的极限与连续性

学习导引

本章首先在中学阶段学过的复数的基础上做了简要的复习和补充，然后介绍了复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数理论和方法奠定必要的基础.

知识点归纳

一、复数的定义与代数运算

1. 复数的定义

设 x,y 都是实数，我们把形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的表达式称为复数. 其中 i 称为虚数单位，且具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$，x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z).$$

(1) 当 $x=0,y\neq0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数.

(2) 当 $y=0$ 时，$z=x+0\cdot\mathrm{i}$ 视为实数 x.

(3) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则 $z_1=z_2$，当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$.

(4) 当 $x=y=0$ 时，称 $z=0$.

2. 复数的四则运算

(1) 加(减)法

两个复数的加(减)法，定义为实部与实部相加(减)及虚部与虚部相加(减)，即

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2).$$

(2) 乘法

两个复数相乘按多项式乘法法则相乘并注意 $\mathrm{i}^2=-1$，即

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).$$

(3) 除法

若 $z_2\neq0$，将满足 $z_2\cdot z=z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商，记为 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

3. 共轭复数

设 $z=x+\mathrm{i}y$，称 $x-\mathrm{i}y$ 为复数 z 的共轭复数，记为 $\overline{z}$，即 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$，它有如下性质：

① $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq0)$；

② $\overline{\overline{z}}=z,z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

③ $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z}),\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$.

二、复数的几种表示方法

1. 复数的坐标表示

每一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 确定平面上一个坐标为 (x,y) 的点，反之亦然，这意味着复数集与平面上的

点之间存在一一对应关系. 由于这个特殊的一一对应存在,我们常把以 x 轴为实轴,y 轴为虚轴的平面称之为复平面.(x,y) 为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的坐标表示形式,称为点 z.

2. 复数的向量表示

记复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 在平面上确定的点为 P,原点为 O. 设复数 z 对应向量$\overrightarrow{OP}$. 这也是一个特别的一一对应. 为此我们称向量$\overrightarrow{OP}$ 为复数 z 的向量表示式.

向量$\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值,记为 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.

我们有结论:

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

当 $z\neq 0$ 时,以正实轴为始边,向量$\overrightarrow{OP}$ 为终边所确定的角 θ,称为复数 z 的辐角,记为

$$\mathrm{Arg}z=\theta.$$

$\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 称满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ 为幅角的主值,记为 $\arg z$. 从而有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

当 $z=0$ 时,辐角不确定.

辅角主值 $\arg z(z\neq 0)$ 可由 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系确定

$$\arg z(z\neq 0)\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & \text{当 } x>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & \text{当 } x<0,y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & \text{当 } x<0,y<0\\ \pi & \text{当 } x<0,y=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,y>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{当 } x=0,y<0\end{cases}$$

利用复数的向量表示法对任意复数 z_1,z_2,三角不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

的意义为三角形的一边不大于两边之和. 不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$$

表示三角形的一边不小于两边之差的绝对值.

3. 复数的三角表示

设 $z\neq 0$,r 是 z 的模,θ 是 z 的任意一个辐角,则

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).$$

4. 复数的指数表示

在三角表示式中,利用欧拉公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 可得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

称为复数 z 的指数表示式.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异，它们各有其特点. 复数及其运算的几何解释可以从向量表示法得到，复数运算中模与幅角的变化规律可以由三角或指数表示法得到.

5. 复球面

一个球与复平面相切于原点 S，过原点作垂直平面的直线交球于 N 点，则 S,N 分别称为球的南极与北极. 由于这样的球与扩充的复平面存在特别的一一对应，常称此球面为复球面.

扩充复平面是指在复平面中加进无穷远点 ∞ 后的集合.

三、复数的乘幂与方根

1. 积与商

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，

则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (r_2 \neq 0)$.

即

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} (z_2 \neq 0)$；

(2) $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2, \operatorname{Arg}(\dfrac{z_1}{z_2}) = \operatorname{Arg}z_1 - \operatorname{Arg}z_2$.

注意：(i) 正确理解等式(2) 的含义；(ii) 乘积与商的几何解释.

2. 乘幂

设 $z = re^{i\theta}$，则 $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

棣莫弗(DeMoive) 公式：$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 及其应用.

3. 方根

设 $z = re^{i\theta}$，则$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n})(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$.

注意：$\sqrt[n]{r}$ 的 n 值性及几何解释.

四、复变函数及其极限与连续

1. 平面点集

(1) z_0 的 $\delta-$ 邻域：满足关系 $|z-z_0| < \delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 $\delta-$ 邻域，而满足 $0 < |z-z_0| < \delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 $\delta-$ 邻域.

(2) 内点：设 G 是一平面点集，$z_0 \in G$，若存在 z_0 的某个邻域也包含于 G，则称 z_0 为 G 的内点.

(3) 开集：若 G 的每个点都是内点，则称 G 为开集.

(4) 连通集：若平面点集 G 中任意两点都可以用完全属于 G 的折线连接起来，则称该集合 G 为连通集.

(5) 区域：连通的开集叫区域.

(6) 边界：若 z_0 点的任意一个邻域内既有区域 G 中的点，又有不属于 G 中的点，则 z_0 称为区域 G 的一个边界点. 由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界.

(7) 闭区域：区域 G 及其边界一起构成闭区域，记为 G.

(8) 简单闭曲线：设曲线 C：$z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$. 当 $x(t)$ 与 $y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线. 对 $a < t_1 < b$，$a \leqslant t_2 \leqslant b$，当 $t_1 \neq t_2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点. 没有重点的连续曲线 C，称为简单(或 Jardan) 曲线. 如果简单曲线 C 的两个端点重合，则 C 称为简单闭曲线.

由以上定义知，简单曲线自身不相交，简单闭曲线则只有起点与终点重合.

(9) 光滑曲线：曲线 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$，当 $x'(t)$ 与 $y'(t)$ 连续且$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ 时，称为光滑曲线. 由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为按段光滑曲线.

(10) 单连通域：若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称 G 为单连通域. 否则称为多连通域.

2. 复变函数的概念

复变函数是高等数学中一元实变函数概念的推广，二者定义的表述形式几乎完全一样，只要将定义中的“实数(或实数集)”换为“复数(或复数集)”就行了. 但对下面几点应多加注意：

(1) 实变函数是单值函数，而复变函数有单值函数和多值函数之分.

(2) 复变函数 $\omega = f(z)$ 是从 z 平面上的点集 G 到 ω 平面上的点集 G^* 的一个映射，因此，它不但可以把 z 平面上的点映射(或变换)为 ω 平面上的点，而且可以把 z 平面上的曲线或图形映射为 ω 平面上的曲线或图形，实现两个不同复平面上的图形之间的有趣的变换，为简化或研究某些问题提供了可能.

(3) 由于一个复变函数 $\omega = f(z)$ 对应着两个二元实变函数：

$$u = u(x, y), v = v(x, y),$$

所以，可以将对复变函数的研究转化为对两个二元实变函数的研究. 这是研究复变函数的常用思想方式之一.

3. 复变函数的极限与连续性

(1) 定义：设函数 $\omega = f(z)$ 在 z_0 点的去心领域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0 (0 < \delta \leqslant \rho)$，当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 A 为 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为：

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

若 $f(z)$ 在 z_0 点有定义，且 $f(z_0) = A$，则称 $f(z)$ 在点 z_0 连续.

若 $f(z)$ 在区域 G 内每一点都连续，我们称 $f(z)$ 在 G 内连续.

(2) 设 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，$A = u_0 + \mathrm{i}v_0$，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$，

那么

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=v_0\end{cases} \qquad ①$$

由此可见,复变函数极限的定义虽在形式上与一元实函数的极限定义相似,但实质上却相当于二元实变函数的极限.这导致了第二章用极限定义的复变函数的导数的概念较之一元实变函数的导数概念,其要求要苛刻得多.

(3) 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,那么

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)]=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(4) 由定义及式 ① 易得连续的充要条件:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=u(x_0,y_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=v(x_0,y_0)\end{cases}.$$

典型例题与解题技巧

例 1 将复数 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(2+2\mathrm{i})}$ 化为三角形式与指数形式.

分　析　本题的关键在于求出该复数的模与辐角的主值.先将 z 化成代数形式 $z=x+\mathrm{i}y$,再利用 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 与反正切公式分别求出它的模与主辐角.本题中由于 z 的分子与分母互为共轭复数,而复数与其共轭复数的模相等,利用复数商的模公式求出 $|z|$.至于主辐角除可用反正切公式求得外,也可以利用关于乘积与商的辐角公式来求.下面给出两种解法,便于读者分析比较.

解题过程　〈解法一〉将 z 的分子与分母同乘以$(\sqrt{3}+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})$,得 $z=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}{|\sqrt{3}+\mathrm{i}|^2}\cdot\dfrac{(2-2\mathrm{i})^2}{|2-2\mathrm{i}|^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,所以 $|z|=1$,$\arg z=\arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{\pi}{6}$.从而得到 z 的三角形式与指数形式:

$$z=\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}.$$

〈解法二〉由于分子与分母恰为一对共轭复数,故其模相同,于是

$$|z|=\frac{|(\sqrt{3}+i)(2-2i)|}{|(\sqrt{3}-i)(2-2i)|}=1$$

$$\operatorname{Arg}z=2[\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i)+\operatorname{Arg}(2-2i)]=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

例 2 设 z_1,z_2 为复平面上任意两点，证明不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

分　析　这个不等式的几何意义为以 z_1,z_2,z_1-z_2 为边的三角形，一边的长度($|z_1-z_2|$)不小于两边的长度之差的绝对值($||z_1|-|z_2||$). 可以利用三角不等式证明这个不等式.

解题过程

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

因为 $|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leqslant|z_1-z_2|+|z_2|$

所以 $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|$　①

因为 $|z_2|=|z_2-z_1+z_1|\leqslant|z_2-z_1|+|z_1|$

所以 $|z_2|-|z_1|\leqslant|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$　②

利用 ① 与 ② 得所要证明的不等式

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

例 3 设复数 α 满足 $|\alpha|<1$，试证

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|^2\begin{cases}=1, & \text{当 } |z|=1\\ <1, & \text{当 } |z|<1\\ >1, & \text{当 } |z|>1\end{cases}$$

分　析　比较 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ 与 1 的大小等价于比较 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2$ 与 1 的大小，亦等价于比较 $|z_1|^2$ 与 $|z_2|^2$ 的大小. 常用公式有 $|z|^2=z\overline{z}$，$|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm2\operatorname{Re}(\overline{z}_1z_2)$ 以及三角不等式.

解题过程　由等式

$$|z-\alpha|^2=|z|^2+|\alpha|^2-2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}z)$$

$$|1-\overline{\alpha}z|^2=1+|\overline{\alpha}|^2|z|^2-2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}z)$$

可知

$$|z-\alpha|^2-|1-\overline{\alpha}z|^2=(|z|^2-1)(1-|\alpha|^2)$$

由于 $|\alpha|<1$，可得

$$|z-\alpha|^2-|1-\overline{\alpha}z|^2\begin{cases}=0, & |z|=1\\ <0, & |z|<1\\ >0, & |z|>1\end{cases}$$

从而

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right|^2=\frac{|z-\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2}\begin{cases}=1, & |z|=1\\ <1, & |z|<1\\ >1, & |z|>1\end{cases}$$

由此即得要证明的结论.

例 4 函数 $\omega=\dfrac{1}{z+1}$ 将 z 平面上的下列曲线变成 ω 平面上的什么曲线?

(1) $x^2+y^2=1$； (2) $y=x+1$； (3) $y=1$.

分　析 利用公式

$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),\qquad y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}),$$

及映射

$$\omega=\frac{1}{z+1},z=\frac{1}{\omega}-1.$$

解题过程 令 $\omega=u+\mathrm{i}v$

(1) 由 $x^2+y^2=1$

有 $\dfrac{1}{4}(z+\overline{z})^2-\dfrac{1}{4}(z-\overline{z})^2=1$

得 $z\overline{z}=1$

$$(\frac{1}{\omega}-1)(\frac{1}{\overline{\omega}}-1)=1$$

$$\frac{(1-\omega)\cdot(1-\overline{\omega})}{\omega\overline{\omega}}=1$$

$$(1-\omega)\cdot(1-\overline{\omega})=\omega\overline{\omega}$$

$$\omega+\overline{\omega}=1$$

即 $u=\dfrac{1}{2}$

所以圆 $x^2+y^2=1$ 被映射成了直线 $u=\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $y=x+1$

知 $\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})=\dfrac{1}{2}(z+\overline{z})+1$ ①

将 $z=\dfrac{1}{\omega}-1$ 代入式 ① 得

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\overline{\omega}})=\frac{1}{2}(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}-2)+1$$

两边同乘以 $2\mathrm{i}\omega\overline{\omega}$

得 $\overline{\omega}-\omega=\mathrm{i}(\omega+\overline{\omega})$ ②

由前设 $\overline{\omega}=u-\mathrm{i}v$ 知

$$\overline{\omega}-\omega=-2\mathrm{i}v$$

$$\omega+\overline{\omega}=2u$$

代入式 ② 得

$$u=-v$$

所以直线 $y=x+1$ 被映射成了直线 $u=-v$.

(3) 由 $y=1$

知 $$\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})=1$$

$$z-\bar{z}=2\mathrm{i}$$

有 $$\frac{1}{\omega}-1-\left(\frac{1}{\bar{\omega}}-1\right)=2\mathrm{i}$$

$$\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}=2\mathrm{i}$$

$$\bar{\omega}-\omega=2\mathrm{i}\omega\bar{\omega}$$

即

$$2\mathrm{i}(u^2+v^2)=-2\mathrm{i}v$$

$$u^2+v^2+v=0$$

所以直线 $y=1$ 被映射成了圆 $u^2+v^2+v=0$.

例 5 **判断下列函数在给定点处的极限是否存在. 若存在,试求出极限的值.**

(1) $f(z)=\dfrac{z\mathrm{Re}(z)}{|z|},z\to 0$;　　(2) $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2},z\to 0$;

(3) $f(z)=\dfrac{z-\mathrm{i}}{z(z^2+1)},z\to \mathrm{i}$.

解题过程　(1) 由于 $|f(z)|=|z|\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\leqslant|z|$,所以,对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<|z|<\delta$ 时,恒有

$$|f(z)-0|=|f(z)|\leqslant|z|<\varepsilon$$

根据极限定义,当 z 趋于 0 时,$f(z)$ 的极限存在,并且其值为 0.

(2) 令 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,从而有

$$u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},v(x,y)=0.$$

令 z 沿直线 $y=kx$ 趋于 0,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}u(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

因为它随 k 的不同而不同,所以,当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $u(x,y)$ 的极限不存在,故 $z\to 0$ 时,$f(z)$ 的极限不存在.

(3) 由于 $f(z)$ 的分子与分母中含有极限为零的因子,消去后得

$$f(z)=\frac{1}{z(z+\mathrm{i})}(z\neq \mathrm{i})$$

即 $$\lim_{z\to \mathrm{i}}f(z)=\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{1}{z(z+\mathrm{i})}=-\frac{1}{2}.$$

课后习题全解

1. 求下列复数 z 的实部和虚部、共轭复数、模与辐角:

1) $\dfrac{1}{3+2i}$; 2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$; 3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$; 4) $i^8-4i^{21}+i$.

解题过程 1) $\dfrac{1}{3+2i}=\dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{3}{13}-\dfrac{2}{13}i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{13};\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{2}{13};\bar{z}=\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$

$|z|=\sqrt{(\dfrac{3}{13})^2+(\dfrac{-2}{13})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

$\arg z=-\arctan\dfrac{2}{3}$

$\mathrm{Arg}z=-\arctan\dfrac{2}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=-i-\dfrac{3i-3}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{3}{2};\mathrm{Im}(z)=-\dfrac{5}{2};\bar{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$

$|z|=\sqrt{(\dfrac{3}{2})^2+(\dfrac{-5}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

$\arg z=-\arctan\dfrac{5}{3}$

$\mathrm{Arg}z=-\arctan\dfrac{5}{3}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}=-\dfrac{7}{2}-13i$

$\mathrm{Re}(z)=-\dfrac{7}{2};\mathrm{Im}(z)=-13;\bar{z}=-\dfrac{7}{2}+13i$

$|z|=\sqrt{(-\dfrac{7}{2})^2+13^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{29}$

$\arg z=\arctan\dfrac{26}{7}-\pi$

$\mathrm{Arg}z=\arctan\dfrac{26}{7}-\pi+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4) $i^8-4i^{21}+i=1-4i+i=1-3i$

$\mathrm{Re}(z)=1;\mathrm{Im}(z)=-3;\bar{z}=1+3i$

$|z|=\sqrt{1^2+(-3^2)}=\sqrt{10}$

$\arg z = -\arctan 3$

$\operatorname{Arg} z = -\arctan 3 + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

2. 当 x, y 等于什么实数时,等式 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$ 成立?

解题过程　由题目中等式可知:

$$x+1+i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2+8i$$

从而有:

$$\begin{cases} x+1=2 \\ y-3=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=11 \end{cases}$$

即 $x=1, y=11$ 时等式成立.

3. 证明虚单位 i 有这样的性质: $-i = i^{-1} = \bar{i}$.

解题过程　因为 $-i = \dfrac{-i \cdot i}{i} = \dfrac{1}{i} = i^{-1}, \bar{i} = -i$,

所以 $-i = i^{-1} = \bar{i}$

4. 证明:

1) $|z|^2 = z\bar{z}$;　2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;　4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} (z_2 \neq 0)$;

5) $\bar{\bar{z}} = z$;　6) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(\bar{z}+z), \operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

解题过程　1) 设 $z = x+iy$,则 $|z|^2 = x^2+y^2, z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$,

所以 $|z|^2 = z\bar{z}$.

2) 设 $z_1 = x_1+iy_1, z_2 = x_2+iy_2$,

则 $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(x_1+iy_1) \pm (x_2+iy_2)}$

$= \overline{(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i}$

$= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i$

$\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 = \overline{(x_1+iy_1)} \pm \overline{(x_2+iy_2)}$

$= (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2)$

$= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)i$

所以 $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$.

3) 设 $z_1 = x_1+iy_1, z_2 = x_2+iy_2$,

则 $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)}$

$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\bar{z}_1\bar{z}_2 = \overline{x_1+iy_1}\ \overline{x_2+iy_2} = (x_1-iy_1)(x_2-iy_2)$