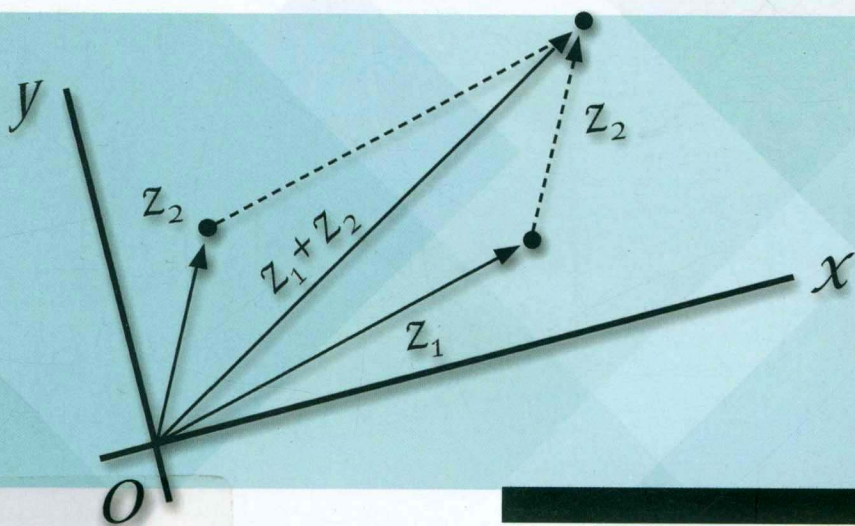


工程数学

— 复变函数 (第三版)

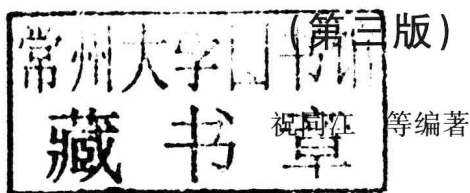
Advanced Engineering Mathematics
Function of Complex Variable

祝同江 等编著



工程数学——

复变函数



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书前两版经过了北京许多高校近 20 年的教学实践,第三版按照原国家教委新审定的有关基本要求,根据目前教学改革的需要,重新对全书内容进行精细、系统地研读和修订. 全书包括复变函数及其极限和连续性、解析函数、复积分、复级数、留数及保角映射等内容. 书中还对重点、难点进行了详细的解释. 在各节的后面附有习题和习题答案,供读者自检.

本书适于高等学校理工科类学生,以及工程技术人员阅读.

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容.
版权所有,侵权必究.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学. 复变函数/祝同江等编著. —3 版. —北京: 电子工业出版社, 2012. 6
ISBN 978-7-121-17376-9

I. ①工… II. ①祝… III. ①工程数学—高等学校—教材②复变函数—高等学校—教材 IV. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 129996 号

策划编辑: 陈晓莉

责任编辑: 陈晓莉

印 刷: 北京市海淀区四季青印刷厂

装 订: 三河市鹏成印业有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 850×1 168 1/32 印张: 7.25 字数: 200 千字

印 次: 2012 年 6 月第 1 次印刷

印 数: 4000 册 定价 25.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

第三版修订版前言

本书自 1993 年出版以来,连续使用将近 20 年,受到许多教学第一线教师的好评. 现在又按照这些教师的教学实践需求,以及原国家教委批准印发的《复变函数课程教学基本要求》(工程数学部分),对第 3 版进行修订.

修订过程中,我们对原书进行了精细、系统的研读,修正原书中存在的错误或缺点;吸取第一线教学教师的建议,补充了许多典型例题及其解法说明,对读者易错之处给出了某些注释,对个别习题答案补充了证明,使全书文字叙述更简明,其理论系统更严谨、更完整,也更便于教师使用及学生的自学阅读. 同时,依据国家标准对书中不规范的单位、数学符号进行了订证.

本书修订过程中得到电子工业出版社陈晓莉先生,北京理工大学数学学院方丽萍教授,讲授该课程的王一夫教授、彭明文先生及曹春雷先生的大力支持,蔡果兰、王洪莉、李楨、任群等先生都对该书的编写或修订提出过许多宝贵意见和建议,参与了本次教材的修订,在此表示衷心感谢.

希望读者对本书多提宝贵意见或建议,以便进行进一步修订.

为了便于教学,特为本书制作了多媒体教学课件,有需求者可登录:<http://www.hxedu.com.cn> 索取.

祝同江

2012 年 5 月于北京

第三版前言

本书是按照原国家教委批准印发的《复变函数课程教学基本要求》(工程数学部分)进行修订的. 原版书经过近 20 年的教学实践, 受到许多使用该书教师的欢迎与好评. 现在又对其进行了精细的研读, 吸取教学一线教师的建议修正原版的错误或缺点、补充其不足, 使全书文字叙述更简明, 其理论逻辑系统更严谨、更完整, 也更便于教师的课堂教学及学生的自学阅读. 下面就修改较大的内容, 做重点说明.

1. 修改了第 3 章复积分 3.1 节中积分估值性质的证明, 使其更便于自学阅读.

2. 对第 3 章 3.3 节定理 3, 补充了新的结论, 且重新给出了其证明, 使其理论更系统、更丰满, 也更便于应用.

3. 修改了第 5 章 5.3 节中定理 2 和定理 3 中的条件, 使其应用更广泛、更简便. 另外给出的新证明也更简洁易懂又便于教学.

4. 考虑到全国教学体制改革后, 该课程课内教学的学时数压缩到只剩 28~32 学时, 大部分高等学校有关专业不会安排最后一章内容的教学, 故本次修订将该书第 6 章列为星号内容.

本书在修订过程中得到北京理工大学数学系方丽萍教授和王一夫教授的大力支持, 讲授过该课程的教师彭明文、曹春雷、任群等先生曾经对该书提出过许多宝贵意见或建议, 在此表示衷心感谢.

参加本次修订工作的还有, 蔡果兰、李桢及王洪莉先生.

希望读者在使用本书过程中多提宝贵意见或建议, 以便进一步修订.

祝同江

2008 年 8 月于北京

第二版前言

根据原国家教委 1987 年批准印发的《复变函数课程教学基本要求》(工程数学部分),这一版中我们对全书各章节内容重新进行了检查和编写,超出上述基本要求的内容都标以“*”号或“**”号.该书编写力求:

1. 全书文字叙述简明易懂,前后内容安排系统性强、有较好的自封性,例题丰富便于自学.

2. 对基本概念、定理和公式的介绍或推导,其叙述语言要准确严谨且条理清楚,具有较好的科学性.定理和公式的证明尽可能采用更简便的方法,使它更适合课堂教学和自学.

3. 贯彻教学中突出重点、分散难点的原则,对基本概念和定理中的难点的介绍或引入,多采用启发式,并且精选例题进行说明.

于是这一版中除增加了许多例题和说明外,另外还增加了引言,且对其内容系统的安排作了许多调整.章节之间的调整,例如,由于平面向量场的复势是在平面调和场中给出的,求已知平面向量场的复势需要用到复积分来计算,因此原书放在第 2 章中介绍,其叙述方法和应用都受到了很大限制.现在把它放到第 3 章复积分的最后一节来介绍,这之前已经叙述了“解析函数的导数仍然是解析函数”和“调和函数”的有关知识,然后引出平面调和场(即无源无旋场)的复势也比较自然.

另外还对许多定理和公式给出了新的叙述或证明,使其证明更简便,也更便于教学.如在 4.2 节中补充了两个引理,使 Taylor 级数展开定理和 Laurent 级数展开定理的证明都变得非常简单,并且补充给出了 Laurent 级数展开式的唯一性定理及其严格证明.又如,2.1 节中函数可导的充要条件、3.1 节中复积分的计算公式和估值性质、

5.3 节定理1、5.4 节定理 1 和 6.2 节定理 3 等都给出了新的证明,6.4 节还补充了定理 1a 等.

最后对全书的习题和答案再次进行了审核,改正了错误,并且将每节中的一些思考题放到了后面的习题中,以便给出其答案;对习题也略有补充;对标有“ \triangle ”的内容也略有调整.

我们衷心期望使用和关心该教材的同志,对本书提出宝贵意见或建议,指出其缺点、错误或不妥之处.

编 者
2000 年 7 月

第一版前言

本书由北京多所高等院校的六位数学教师通过多年的教学实践，共同编写而成。全书共分6章，第1章复变函数及其极限和连续性，由北京邮电学院杨延齐编写；第2章解析函数，由北京轻工业学院章栋恩编写；第4章复级数，由北京计算机学院唐兢编写；第3章复积分、第5章留数及其在积分计算中的应用、第6章保角映射，分别由北京理工大学刘泊涵、林民辉和祝同江编写。本书前4章由祝同江审稿，第5、6章分别由北京理工大学应用数学系葛渭高教授、张学莲教授审稿。

根据全国许多高等院校“工程数学——复变函数”教学的实际情况和教育改革的需要，按照1980年6月在北京举行的高等学校工科数学教材编审委员会扩大会议审定的工程数学教学大纲(草案)，我们对本书各章的重点和难点进行过反复讨论，对超出上述大纲要求的内容标以“*”号。考虑到该课程通常安排在工科大学第二学年讲授，它是工科大学生最后一年数学课程之一，在教学中应当注意学生阅读能力的培养。针对该课程内容多、计划学时少的实际情况，本书有些定理、公式的证明和有关例题将作为学生的课外或课内的自学阅读内容处理，这些内容标以“ Δ ”号，并且在每一节末附有阅读思考题、习题和答案，以便加深学生对有关内容的理解。其中有些习题也标以“ Δ ”号，可作为学生预习的习题超前布置下去，用来检查学生的自学阅读情况。

另外，为了便于读者自学阅读，本书除对内容的重点和难点增加了一些必要的解释和例题进行说明外，对基本概念、定理和公式的叙述及其证明也力求简便和严谨。与同类教材相比有许多不同之处，具体说明如下：

1. 本书对泰勒(Taylor)级数展开定理中所给级数的收敛半径、留

数定理、初等函数所构成保角映射的一一对应性及其解析表达式进行了比较严格的叙述或讨论。

2. 为了使本书在理论叙述上自成体系,第1章中除增加了“在有界闭区域上(或闭曲线上)连续函数的模一定有界”定理外,还对辐角的多值性及其有关等式进行了更细致的讨论。这些内容在复积分和复级数许多定理的证明中,以及对辐角原理、保角映射概念的叙述都经常用到。

3. 考虑到许多非重点工院校不在计划学时内介绍保角映射的理论,可是他们也需要几种简单分式线性映射的有关知识。本书将把4种简单分式线性映射及其保圆性放到第1章作为映射(复变函数的几何解释)的例题和后续内容给出,以便有关专业选用。

4. 针对许多学生经常把“函数 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微,并且满足柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程”错误地理解为函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 解析的充要条件,本书将把该条件作为函数 $f(z)$ 在一点可导的充要条件,放到2.1节导数定义之后给出。由此可以直接看出“函数在一点可导一定连续”的结论仍然成立。在此基础上,对函数解析的概念和解析的充要条件进行了更深入的讨论,以便读者对有关内容,以及对复变函数中将区域定义为连通的开集有进一步的理解。

5. 考虑到复积分与对坐标曲线积分的内在联系和后续定理证明的需要,本书第3章在复习对坐标曲线积分与路径无关的几种充要条件的基础上,引出了柯西-古萨(Cauchy-Goursat)基本定理。然后给出了该定理的另一种叙述形式,并且对复闭路定理、柯西积分公式和高阶导数公式的条件进行了更简单的叙述。这些叙述便于读者理解和在计算中应用。另外,考虑到积分和式的极限不同于普通极限,对积分模的不等式的性质给出了比较严格的简单证明。

6. 本书分别从函数的极限和数列极限的定义出发直接得到了两个类似的定理。这些定理便于学生理解和应用,使复变函数极限和复数列极限存在的充要条件的证明变得非常简单,也为许多定理的证明

在文字叙述上提供了方便。

在复级数中,利用阿贝尔(Abel)引理直接得到了一个新定理,该定理描述了复数项幂级数与实数项幂级数收敛半径之间的内在联系。从它不仅可以看出复数项幂级数收敛半径的存在性,而且还可以直接看出求实数项幂级数收敛半径的检比法和检根法,对复数项幂级数仍然成立。

另外,对幂级数逐项微分、积分定理也给出了证明。并且补充了一个简单引理,使泰勒级数展开定理、洛朗(Laurent)级数展开定理的证明比较简单,也便于工科学生阅读。

7. 鉴于留数与洛朗级数的内在联系,第5章首先介绍函数的孤立奇点及其留数的概念,使对孤立奇点分类深入的讨论变得比较自然;然后对留数计算也叙述得比较详细,针对某些特殊情形给出了简单的计算方法。并且给出了求极限的洛必达(L'Hospital)法则,以便在留数计算中应用。为了加强对洛朗级数的教学 and 实际应用的需要,推广了用留数计算定积分的三个公式的应用范围;并且针对某些特殊情况,增加了用洛朗级数系数的积分表达式来计算留数和积分的方法,其中包括积分闭曲线内含有无穷多个被积函数奇点的情形,这些方法比较简单。另外,对函数在点 ∞ 处留数的计算公式也用函数在该点邻域内的洛朗级数展开式给出了新的证明,其证明方法也非常简单。

8. 为了便于自学和实际应用的需要,第6章中分式线性映射保对称性的证明是作为例题给出的,并且对广义圆周(在扩充复平面上)的各种情形进行了详细讨论。针对一般学生都感到困难的求解——对应的保角映射问题,增加了比较多的例题;还对上半平面映射为上半平面、单位圆映射为单位圆的分式线性映射的应用,进行了举例说明。另外,对多角形映射定理也给出了新的叙述和证明,可供有关读者和工程技术人员阅读。

本书在编写过程中得到北京理工大学应用数学系、北京邮电学院基础部数学教研室、北京轻工业学院数学教研室、北京计算机学院数学

教研室等单位的许多同志的大力支持,他们对本书的编写提出过许多修改意见和建议,借此表示衷心感谢.

由于我们学识水平所限,书中一定还有许多缺点和错误,殷切期望广大读者批评指正.

编者

1993年4月于北京

目 录

引言	(1)
第 1 章 复数和复变函数及其极限	(2)
1.1 复数及其运算	(2)
1.1.1 复数的概念及其表示法	(2)
1.1.2 [△] 复数的代数运算	(4)
1.1.3* 扩充复平面与复球面	(7)
习题 1.1	(8)
习题 1.1 答案	(10)
1.2 复平面上曲线和区域	(11)
1.2.1 [△] 复平面上曲线方程的各种表示	(11)
1.2.2 [△] 连续曲线和简单曲线与光滑曲线	(13)
1.2.3 平面点集与区域	(13)
习题 1.2	(16)
习题 1.2 答案	(17)
1.3 复变函数与整线性映射	(18)
1.3.1 [△] 复变函数的概念	(18)
1.3.2 复映射——复变函数的几何意义	(19)
1.3.3 整线性映射及其保圆性	(21)
习题 1.3	(22)
习题 1.3 答案	(23)
1.4 复变函数的极限和连续	(24)
1.4.1 [△] 复变函数的极限	(24)
1.4.2 复变函数的连续性	(25)

习题 1.4	(28)
习题 1.4 答案	(28)
第 2 章 解析函数	(30)
2.1 复变函数的导数	(30)
2.1.1 [△] 导数的概念及其求导法则	(30)
2.1.2 微分的定义及其可微的充要条件	(32)
习题 2.1	(35)
习题 2.1 答案	(36)
2.2 函数的解析性和指数函数	(36)
2.2.1 函数解析的概念和充要条件	(36)
2.2.2 解析函数的运算性质	(38)
2.2.3 [△] 指数函数 $\exp(z) = e^z$	(38)
习题 2.2	(40)
习题 2.2 答案	(41)
2.3 初等解析函数	(42)
2.3.1 对数函数	(42)
2.3.2 幂函数	(44)
2.3.3 三角函数和双曲函数	(45)
2.3.4 [△] 反三角函数和反双曲函数	(47)
习题 2.3	(50)
习题 2.3 答案	(51)
第 3 章 复积分	(53)
3.1 复积分的概念及其性质	(53)
3.1.1 复变函数积分的概念	(53)
3.1.2 复积分的存在性及其一般计算公式	(54)
3.1.3 [△] 复积分的简单性质	(57)
习题 3.1	(59)
习题 3.1 答案	(60)

3.2	积分与其路径的无关性	(61)
3.2.1	复积分与其积分路径无关的条件	(62)
3.2.2	解析函数的原函数和在积分计算中的应用	(63)
3.2.3 [△]	复闭路定理和闭路变形原理	(65)
习题 3.2		(67)
习题 3.2 答案		(68)
3.3	Cauchy 积分公式和高阶导数公式	(69)
3.3.1	解析函数的 Cauchy 积分公式	(69)
3.3.2	解析函数的高阶导数定理	(71)
3.3.3 [△]	解析函数的实部和虚部与调和函数	(75)
习题 3.3		(79)
习题 3.3 答案		(80)
3.4*	平面调和场及其复势	(81)
3.4.1	平面向量场的旋度和散度与平面调和场	(81)
3.4.2	平面调和场的复势及其有关等式	(85)
3.4.3	平面流速场和静电场的复势求法及其应用	(86)
习题 3.4		(90)
习题 3.4 答案		(90)
第 4 章	复级数	(91)
4.1	复数项级数和幂级数	(91)
4.1.1	复数项级数的收敛性及其判别法	(91)
4.1.2	复数项级数的收敛性及其判别法	(92)
4.1.3	幂级数及其收敛半径	(94)
4.1.4 [△]	幂级数的运算性质	(99)
习题 4.1		(101)
习题 4.1 答案		(103)
4.2	Taylor 级数	(104)
4.2.1	有关逐项积分的两个引理	(104)

4.2.2	Taylor 级数展开定理	(106)
4.2.3	基本初等函数的 Taylor 级数展开式	(107)
4.2.4 [△]	典型例题及其说明	(109)
习题 4.2		(113)
习题 4.2 答案		(114)
4.3	Laurent 级数	(115)
4.3.1	Laurent 级数展开定理	(115)
4.3.2	Laurent 级数的性质	(117)
4.3.3 [△]	用 Laurent 级数展开式计算积分	(119)
习题 4.3		(124)
习题 4.3 答案		(125)
第 5 章	留数及其应用	(126)
5.1	函数的孤立奇点及其分类	(126)
5.1.1	函数孤立奇点的概念和分类	(126)
5.1.2	函数各类孤立奇点的充要条件	(127)
5.1.3	用函数的零点判别极点的类型	(129)
5.1.4*	函数在无穷远点的性态	(132)
习题 5.1		(134)
习题 5.1 答案		(135)
5.2	留数和留数定理	(136)
5.2.1 [△]	留数的定义和计算	(136)
5.2.2	留数定理	(140)
5.2.3*	函数在无穷远点处的留数	(143)
习题 5.2		(144)
习题 5.2 答案		(145)
5.3	留数在定积分计算中的应用	(147)
5.3.1 [△]	形如 $I_1 = \int_0^{\alpha} f\left(\cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}, \sin \frac{2\pi\theta}{\alpha}\right) d\theta$ 的积分	(147)

5.3.2 形如 $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的积分 (149)

5.3.3 形如 $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\beta x} dx (\beta > 0)$ 的积分 (151)

习题 5.3 (154)

习题 5.3 答案 (155)

5.4** 辐角原理及其应用 (155)

5.4.1 对数留数 (155)

5.4.2 辐角原理 (157)

5.4.3 Rouché'定理 (158)

习题 5.4 (161)

习题 5.4 答案 (161)

第 6 章* 保角映射 (162)

6.1 保角映射的概念 (162)

6.1.1 曲线的切线方向和两条曲线的夹角 (162)

6.1.2 解析函数导数的几何意义 (163)

6.1.3 保角映射的概念和定理 (165)

习题 6.1 (167)

习题 6.1 答案 (168)

6.2 分式线性映射及其性质 (168)

6.2.1 在扩充复平面上的保圆性 (169)

6.2.2 在扩充复平面保持交比的不变性 (170)

6.2.3 对扩充复平面上圆周的保对称性 (174)

6.2.4 对有向圆周和直线的保侧性 (175)

6.2.5 三种特殊的分式线性映射 (179)

习题 6.2 (184)

习题 6.2 答案 (185)

6.3 几个初等函数所构成的映射 (185)

6.3.1 对数映射 $w = \ln z$ 和指数映射 $w = e^z$ (185)

6.3.2	幂映射 $w=z^n$ 及其逆映射($n=2,3,\dots$)	(187)
6.3.3*	儒柯夫斯基(Н. Е. Жуковский)函数	(195)
习题	6.3	(198)
习题	6.3 答案	(199)
6.4**	保角映射几个一般性定理及其应用	(200)
6.4.1	保角映射的几个一般性定理	(200)
6.4.2	Schwarz-Christoffel 映射——多角形映射	(202)
6.4.3	用保角映射解 Laplace 方程边值问题	(211)
习题	6.4	(214)
习题	6.4 答案	(215)
参考文献		(216)