

HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS

数学史与数学教育

刘超 代瑞香 陆书环 等著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社



HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS

数学史与数学教育

刘超 代瑞香 陆书环 等著



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学史与数学教育 / 刘超等著. —杭州:浙江
大学出版社, 2013. 6
ISBN 978-7-308-11581-0

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学史
②数学教学—教学研究 IV. ①011 ②01-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 115092 号

数学史与数学教育

刘 超 代瑞香 陆书环 等著

责任编辑 吴伟伟 weiweiwu@zju.edu.cn
文字编辑 杨 茜
封面设计 十木米
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址: <http://www.zjupress.com>)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 杭州日报报业集团盛元印务有限公司
开 本 710mm×1000mm 1/16
印 张 25.5
字 数 500 千
版 印 次 2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-11581-0
定 价 66.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式 (0571)88925591; <http://zjdxcs.tmall.com>

前 言

众所周知,早在 19 世纪,数学史与数学教育之间的关系已经受到欧美数学家和数学教育家们的关注。1972 年,在英国爱塞特召开的第二届国际数学教育大会上,成立了数学史与数学教学关系国际研究小组(International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics, HPM)。该小组从 1976 年开始隶属于国际数学教育委员会,它的成立动机是出自对于数学教与学的强烈关怀,希望借由数学史与数学教育的互动,提升数学教师的教学质量与学生的学习成效。从此以后,数学史与数学教育成为数学教育的重要研究领域之一。

数学史与数学教育研究自 20 世纪 70 年代进入我国以来,国内专家学者也积极地开展了相关研究。总体来看,我国的数学史与数学教育研究主要包括数学史教育功能的探索、数学史与数学教育整合方式的研究、数学史与教材整合的研究、HPM 案例开发的理论与实践研究、教师数学史素养研究等多个方面。在此基础上,国内高校也陆续设置数学史与数学教育硕士、博士研究生专业,培养了一大批该领域的专门人才。遗憾的是,国内还尚无一本真正意义上的数学史与数学教育研究著述。本书即是在这一背景下写作的,我们衷心希望本书能起到抛砖引玉之用,期待更多的数学教育专家学者投入该领域进行研究,产出更多、更好的研究成果。

具体而言,本书结合已有研究文献,对已有研究进行了较为系统的梳理和归类,也对数学史与数学教育的一些崭新领域作了一点尝试性的探索工作,包括以下几个方面:

一是系统梳理国内外数学史与数学教育的研究发展历程。国际上主要以国际 HPM 组织的发展为主线进行介绍,也包括对美国、英国、法国等国家 HPM 研究现状的介绍;对于我国数学史与数学教育研究,主要介绍了我国大陆以及台湾地区的研究概况。

二是系统梳理数学史与数学教育的基本理论,包括:数学史与数学教育整合的基础及途径、数学史与数学教育的研究内容与方法等多个方面。

三是基于数学史的教师专业发展研究。主要从数学教师的数学史素养内涵、数学史素养现状及提升策略等方面进行了探讨。

四是研究了中外数学教材中的数学史内容,并就中外数学教材中的数学史内容进行了对比分析。

五是研究了 HPM 教学案例的开发与实践。从案例开发的重要性出发,通过对目前我国 HPM 案例开发现状的叙述,分析 HPM 案例开发的重要意义,进而探索 HPM 教学案例的基本特征、开发方式以及开发过程中应注意的一些问题。

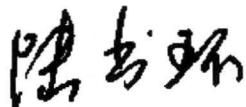
六是探讨了当前国内外数学史与数学教育的一些热点议题。包括:基于数学史的教学模式的探索、基于数学史的教科书编写、基于数学史的问题解决教学、古代算经及其算法与数学教育的整合等。

七是探讨了少数民族数学史与数学教育的整合问题。少数民族数学史的一个重要载体是民俗数学,本书较为系统地探讨了多元文化数学教育理论、民俗数学案例开发与使用等多个方面的内容。

本书的最后一部分内容对数学史与数学教育研究的未来进行了展望,我们认为,应建立数学史与数学教育研究的中国范式,数学作为中国古代最发达的科技门类之一,其数学思想在世界古代数学史上都具有重要的地位和鲜明的特色。针对当前我国基础教育阶段对于我国古代优秀的数学文化应用甚少的现状,我们理应建立数学史研究的中国范式,将我国古代数学所蕴含的优秀的数学思想应用于今天的课堂教学。

总体来看,本书力争反映当前国际、国内数学史与数学教育研究的最新成果,从理论和实践两个视角对数学史与数学教育的相关议题作了较充分的论述。本书的一个重要特色是着力凸显案例研究,在各章均呈现了为数不少的数学史与数学教育案例,这些案例有的是出自本书作者的原创,也有一部分案例是借鉴国内其他研究者的成果(包括部分我国台湾地区的学者)。我们的主要意图是期望数学教育工作者和一线教师能基于这些已有案例,了解和学习数学史与数学教育案例制作的流程、方法以及基本范式,进而使得教师能在课堂教学中自主研发、使用数学史与数学教育案例,并最终使得开发和使用数学史案例成为教师的自觉行动和习惯。

鉴于国内目前尚无数学史与数学教育领域的专门著述,本书致力于勾勒出较完整的数学史与数学教育研究的概貌,故本书的研究只能算是一个开端,并且由于时间仓促和能力所限,书中难免存在错误和不当之处,恳请广大读者及专家同行们批评指正。



山东省数学教育研究会理事长
全国数学史学会常务理事

目 录

第一章 数学史与数学教育的历史	(1)
第一节 数学史与数学教育的历史渊源	(1)
第二节 国际 HPM 组织的产生及其发展历程	(11)
第三节 世界各国和各地区数学史与数学教育研究概述	(28)
第四节 我国数学史与数学教育研究概况	(34)
第二章 数学史与数学教育的基本理论	(63)
第一节 数学史与数学教育整合的意义	(63)
第二节 数学史与数学教育整合的理论基础	(77)
第三节 数学史与数学教育的研究内容与方法	(89)
第四节 数学史与数学教育整合的路径	(120)
第三章 HPM 与数学教师专业发展	(134)
第一节 数学教师专业发展研究	(134)
第二节 数学史对于数学教师的重要性分析	(138)
第三节 数学教师数学史素养内涵探讨	(146)
第四节 数学教师数学史素养现状研究	(149)
第五节 数学教师数学史素养的提升策略	(152)
第四章 中外数学教材中的显性数学史内容调查分析	(156)
第一节 我国数学教材中的显性数学史内容调查分析	(158)
第二节 国外数学教材中的显性数学史内容调查分析	(184)
第三节 数学史融入数学教材的国际比较	(194)
第五章 HPM 教学案例开发研究	(213)
第一节 HPM 教学案例开发的意义	(214)
第二节 HPM 教学案例开发过程分析	(216)

第六章 数学史与数学教育的一些基本课题	(247)
第一节 基于“数学史融入数学课程”的教科书编写研究	(247)
第二节 基于数学史的数学问题解决教学研究	(257)
第三节 古代算经与数学教育的整合研究	(287)
第四节 古典算法与数学教育整合的案例研究	(296)
第七章 少数民族数学史(民俗数学)与数学教育	(318)
第一节 少数民族数学史(民俗数学)研究概论	(318)
第二节 新疆少数民族数学教育史研究	(323)
第三节 数学史与人类文化数学	(337)
第四节 基于少数民族数学史(民俗数学)的多元文化整合数学教育研究	(344)
第五节 基于民俗数学的情境教学案例开发研究	(356)
第六节 民俗数学情境教学案例赏析	(370)
第八章 数学史与数学教育研究展望	(380)
参考文献	(396)
索引	(401)
后记	(403)

第一章 数学史与数学教育的历史

第一节 数学史与数学教育的历史渊源^①

一、19 世纪的先驱者：从泰尔凯到卡约黎

1742 年,德国数学家海尔布罗纳(J. C. Heilbronner)出版了《世界数学史》,1758 年,法国数学家蒙蒂克拉(J. E. Montucla)出版了《数学史》,标志着数学史作为一个独立研究领域的出现。而随着该领域研究的深入和普及,数学史对数学教育的意义也被一些西方数学家所认可。早期的两种为数学教育服务的数学杂志——法国数学家泰尔凯(O. Terquem)创办于 1842 年的《新数学年刊》(Nouvelles Annales de Mathematiques)、德国数学家格鲁纳(J. A. Grunert)创办于 1841 年的《数学物理档案》(Archiv der Mathematic und Physic)都以大量篇幅刊登数学史、数学文献类的文章,即证明了这一点。

《新数学年刊》主要面向官方学校,如高等师范学校、综合工科学校、军事学校、海运学校等的教师、数学专业班学生以及投考这些学校的学生。1855 年,泰尔凯又在《新数学年刊》后增加附录《数学历史、传记和文献通报》(Bulletin d' Histoire, de Biographie et de Bibliographie Mathematiques),极大地激发了法国人对数学史的研究兴趣。^② 这个附录成为历史上第一种数学史专业刊物。

泰尔凯深知,数学家的专辑、轶闻、故事可以启发学生的人格成长。因此,他在杂志上发表了大量的数学家传记,如固灵(Ludolf van Ceulen)、费罗(S. del Ferro)、费拉利(L. Ferrari)、纳皮尔(J. Napier)、卡瓦列利(B. Cavalieri)、牛顿、莱布尼茨、马克劳林(C. Maclaurin)、高斯、勒让德(A. M. Legendre)、伽罗瓦(E. Galois)、阿贝尔

^① 张维忠、汪晓勤:《文化传统与数学教育现代化》,北京大学出版社 2006 年版,第 142—158 页。

^② E. Prouhet. Notice sur la vie et les Travaux d'Olry Terquem. Bulletin d'Histoire, de Biographie et de Bibliographie Mathematiques, 1862, 6(8): 81-90.

(N. H. Abel)、柯西(L. Cauchy)、雅可比(C. Jacobi)、德沙格(G. Desargues)、索菲·热尔曼(S. Germain),等等。泰尔凯是出色的故事叙述者,甚至对当时学术地位低下的女性数学家生平事迹也不惜笔墨。且看一段他所叙述的18至19世纪法国著名女数学家索菲·热尔曼年轻时的经历:

在极度痛苦之中,这位年轻的先知在抽象世界中寻求解脱。她浏览蒙蒂可拉的《数学史》,研究裴蜀(E. Bézout,1730—1783)的著作,甚至在1793年血腥的农神节期间,闭门不出。她整天沉浸于对勒让德和居森(Cousin)著作中数论和微积分的思索,成了隐居者。她进步神速。1801年,她借用巴黎综合工科学校一男生的名字开始了与高斯的通信来往,讨论高斯刚出版的《算数研究》和其他内容。在1804年的战役中,热尔曼家的朋友、炮兵将军佩尔内蒂(Pernetty)在布伦瑞克把这个冒名的“学生”的真名告诉了这位数学大家。从未怀疑过这位通信者性别的高斯吃惊不小。他在后来的通信中对这位年轻法国人深刻敏慧的心智表示钦佩,由于战争,当时这位德国教授平静的书斋生活被打破,感情上受到了伤害,对我们国家产生了厌恶感,在这种情况下,他对热尔曼的钦佩就越发显得真诚了。^①

可以想见,泰尔凯的那些数学家故事激励了多少数学学习者!

泰尔凯十分关注与数学教学密切相关的数学史专题,如圆锥曲线焦点以及焦曲线的历史、三角函数(正弦、正矢、正割、正切、余切)的简史、负数的历史、指数的历史、笛卡尔(R. Descartes)符号法则的历史、牛顿二项式定理的发现、线性方程组消元法的历史、变分法的历史、费马(P. Fermat)大定理的历史文献、对数的发明、球面三角形求积的历史、倍立方问题的历史、三次方程求解的历史、行列式的起源、莫若里克(F. Maurolico)的圆面积实验求法、丢番图(Diophantus)的墓志铭、 π 的历史,以及大量古代东西方数学文献的题解等。《数学历史、传记与文献通报》还发表了其他作者的许多数学史文章。泰尔凯还十分重视数学符号或术语的起源,在《数学历史、传记与文献通报》上,他介绍了“+、-、=、>、<”等符号以及“正弦”“瞬”“零”等词的起源,这些也是后世数学史家们感兴趣的历史问题。

这些都是服务于数学教学的历史专题。不论从历史研究,还是从教学的角度看,这些专题在今天都有现实意义。如16世纪意大利数学家莫若里可的圆面积求法:在底面直径和高均为 $2R$ 的圆柱中倒满水,然后将水倒入边长为 $2R$ 的立方体中,测出水的高度为 h ,以直径 $2R$ 乘以 h ,即得到圆柱底面积。^②这种实验方法仍

^① O. Thruquem. Sophie Germain. Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques, 1860, 4(6).

^② O. Terquem. Moyen Hydrodynamique pour Trouver l'aire d'un Cercle. Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathématiques, 1860, 4(6): 47-48.

可用于今天的数学教学。又如丢番图的墓志铭：^①

行人啊,请稍驻足
 这里埋葬着丢番图
 上帝赋予他一生的六分之一,享受童年的幸福
 再过十二分之一,两颊长胡
 又过了七分之一,燃起结婚的蜡烛
 贵子的降生盼了五年之久
 可怜那迟暮的宁馨儿
 只活到父亲寿命的半数
 便进入冰冷的坟墓
 悲伤只有通过数学来消除
 四年后,他自己也走完了人生的旅途

这实际上也成为今天许多国家和地区的数学课本中一元一次方程的实例。

19世纪,法国实证主义哲学家、社会学创始人孔德就提出,对孩子的教育方式和顺序都必须符合历史上人类的认知过程。换言之,个体知识的发生过程与历史上人类知识的发生过程必然是一致的。瑞士著名教育家裴斯泰洛奇(J. Pestalozzi)、德国教育家福禄倍尔(F. Froebel)等都持有相似的观点,这种观点对于后世的数学教育家产生了重要的影响,这是因为,如果孔德的理论是正确的话,那么数学史对于数学教学来说就是一种十分有效、不可或缺的工具。^②

19世纪英国著名数学家德摩根不仅强调数学史对数学研究的重要性,^③而且也强调数学教学中的历史次序,如德摩根认为,教师在教代数时不应该一下子就把新符号都解释给学生,而应该让学生像最初发明这些符号的人那样从完全的书写方法到简写的顺序学习符号。^④如学生应先使用 aa 、 aaa ,而不是 a^2 、 a^3 ,直到他们不再混淆 $2a$ 与 a^2 、 $3a$ 与 a^3 。德摩根的这种观点与我们今天所说的发生教学法的思想是一致的。

丹麦著名数学家和数学史家邹腾(H. Zeuthen)早在1876年的一篇数学史论文中就强调数学专业的学生学习数学史的必要性,认为“学生不仅获得了一种历史

① O. Terquem. Diophante. Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie Mathematiques, 1860, 6: 71-72.

② F. Cajori. A History of Elementary Mathematics. New York: Macmillan, 1917: 117.

③ 汪晓勤、德摩根:《19世纪数学名师、数学家和讲学史家》,《自然辩证法通讯》2001年第1期。

④ G. Howson. A History of Mathematical Education in England. Cambridge: Cambridge University Press, 1982: 87-92.

责任感,而且,通过从新的角度看数学学科,他们将对数学产生更敏锐的理解力和鉴赏力”^①。实际上,邹腾在课堂教学中经常讲述数学史。

英国著名数学家格莱歇尔(J. Glaisher)在其整个数学研究生涯中,一直爱好并研究数学历史,他认为:“在任何著作或高等(数学)教材中都有必要参考原始论文,并且如果可能的话,给出简短的历史评论”,“如果试图将一门学科和它的历史割裂开来,那么没有哪门学科会比数学的损失更大”。^②

在美国,早在19世纪90年代,即有人提倡将数学史作为工具引入数学教学之中。美国学者海波尔(G. Heppel)在1893年改进几何教学协会(Association for the Improvement of Geometrical Teaching)会议上宣读的一篇论文中,^③引用了下面的诗句来说明当时内容枯燥的数学课本:

如果又一场洪水暴发
请飞到这里来避一下
即使整个世界被淹没
这本书依然会干巴巴

海波尔认为,要让学生不再觉得数学枯燥乏味,教师就必须告诉他:他正在学习的算术、几何、代数和三角是如何为满足人们的需求和愿望而进步的。^④

美国著名数学史家、历史上第一个数学史教授卡约黎在出版于1893年的《数学史》前言中强调数学史对数学教师的重要价值:

需要历史研究的另一个原因是历史知识对于数学教师的价值。如果用历史回顾和历史轶事点缀枯燥的问题求解和几何证明,学生的学习兴趣就会大大增加。算术课上学生乐于听巴比伦人和印度人的工作以及印度人“阿拉伯数码”的发明;他们会惊叹:经过了数千年,人们才想到把哥伦布鸡蛋——零引入数学记号;令他们惊奇的是,发明一个他们今天一个月就能学会的记号竟要花费如此漫长的时间。在学生学习了如何二等分角后,告诉他们许许多多徒劳用初等几何方法解决看起来十分简单的三等分角问题的尝试,会让他们感到惊讶。当他们知道了如何作一个正方形,使其面积等于给定正方形的两倍后,告诉他们倍立方问题及其神话中的起源——只有造一个两倍于给定祭坛的立方祭坛,太阳神阿波罗才会息怒,以及数学家是如何长期冥思苦想,孜孜

① S. L. Kleiman. Hieronymus Georg Zeuthen. Contemporary Mathematics, 1991, 123(2):1-13.

② J. Fauvel & J. van Maanen(eds.). History in Mathematic Education. Dordrecht; Kluwer Academic Publishers, 2000:36.

③ G. Heppel. The Use of History in Teaching Mathematics. Nature, 1893, 48(1235):16-18.

④ F. Furinghetti. & A. Somaglia. History of Mathematics in School Across Disciplines. Mathematics in School, 1998, 27(4):48.

以求的。在学生学习勾股定理殚精竭虑之后,告诉他们有关其发现的传说——毕达哥拉斯对他的发现如此高兴,以致为缪斯女神献上百牲大祭。当数学训练的价值受到怀疑时,引用哲学家柏拉图学院门口所刻的那句话:“不懂几何者免进。”学习解析几何的学生应了解点笛卡尔,学习微积分的学生又应熟悉牛顿、莱布尼茨、拉格朗日在创造这门学科的过程中所起的作用。在历史的解说中,教师可以让学生明白:数学并不是一门枯燥呆板的学科,而是一门不断进步的生动有趣的学科。

二、20 世纪初的倡导者:从庞加莱到克莱因

到了 20 世纪,数学史的教育价值受到欧美数学家进一步的大力提倡。在 1904 年德国海德堡召开的第三届国际数学家大会上,美国数学史家和数学教育家史密斯,法国著名数学家坦纳里(P. Tannery),德国数学家冯·布劳默(A. von Braunmühl)、兰培(E. Lampe)、西蒙(M. Simon)、斯达克尔(P. Stäckel)、沃尔芬(E. Wölffing),意大利数学史家洛利亚(G. Loria)等在提出的一项决议中称:“数学史在今天已成为一门具有无可否认的重要性的学科,无论从数学的角度还是从教学的角度来看,其作用变得更为明显,因此,在公众教育中给予其恰当的位置乃是不可或缺的事。”^①决议希望在大学里开设精密科学史课,包括数学与天文学史、物理与化学史、自然科学史、医学史四部分。决议还建议在中学课程中介绍精密科学的历史。

史密斯于 1928 年当选为国际数学教育委员会第二任主席。他的两卷《数学史》和一卷《数学原始文献》都是为中学数学教师而写的。史密斯告诉我们,“数学史已被公认为师范教育及大中学校学生自由教育中的重要学科”。长期在大学教数学的经历使他深信:“为了将数学发展与人类发展联系起来,为了揭示数学是一条大河而不是一潭死水,为了强调数学的人文因素,一般的历史介绍是十分必要的。”^②

在英国,早在 1919 年,一份数学报告即指出:“每一个孩子都应该知道他所学习的这门学科的更为人文或个性的一面”,并建议“数学教室中应悬挂大数学家的肖像,数学教师在课堂上应该常提到这些大数学家的生平与数学研究,并解释数学发现对人类文明进步的影响。”

美国数学家哈斯勒(J. Hassler)认为数学史对数学教育的作用有三个方面:一是激发学生学习数学的兴趣;二是丰富和活跃数学教师的教学;三是使教师和学生

① J. Fauvel & J. van Maanen(eds.). History in Mathematics Education. Dordrech: Kluwer Academic Publishers, 2000: 91-92.

② D. E. Smith. History of Mathematics; Vol. I. Boston: Ginn & Company, 1923: 3.

了解数学的价值及其与人类文明发展不可分割的联系。美国数学家米勒(G. A. Miller)认为,对于那些“只追求完全掌握数学本身的人”来说,数学史的作用在于原始文献。他引用美国数学家洛维特(E. Lovett)的话说:“数学的学习者不应相信中间人的话,而应自己去寻找原始文献,寻找大师们自己的东西。二手的思想就像二手的书本和二手的衣服一样充满细菌。”^①

米勒指出,最早发展一门学科的大师往往留下比他们的解释者所传递的更为深刻的思想,而为了查阅原始文献,学习者常常需要了解他所学习的这门学科发展史上的重要步骤。米勒还认为,数学史最大的作用乃是它在该学科的学习中注入更多的活力,它把数学概念从静态转向动态;通过记录数学家们在形成数学思想过程中所产生的影响,数学史使得数学人性化了。米勒还认为,许多重要的数学概念如此缓慢地进入人类的智力生活,并遭遇重重阻挠,这对那些初次遇到这些概念的人,或试图把它们教给他人的人来说是极有意义的。意义何在?美国数学史家琼斯(P. S. Jones)举例说:当学生了解了负数概念的发展并被人们接受、使用和理解经过了漫长的时间后,他就不会因自己也不能理解这个概念而感到特别担心。^②

把科学人性化,这也正是后来科学史家萨顿(G. Sarton)所追求的理想。在1953年的一次演讲中,萨顿这样说:“我说如果你不热爱和了解科学,人们就不会期望你会对他的历史感兴趣;另一方面,科学人性化的教学能使人热爱科学,并且更深刻的理解它。我们有太多的科学家(甚至是最著名的科学家)不过是技术员而已,我们的目标是将科学人性化,而这样做的最佳方法是讲述和讨论科学的历史。如果我们成功了,科学工作者将不再只是技术员而已,而将变成文化人(educated men)。”^③按照萨顿的观点,如果将数学人性化,最佳方法是讲授数学的历史。

20世纪初欧美数学家提倡在教学中直接或间接运用数学史,与19世纪德国生物学家海克尔(E. Haeckel)所提出的生物发生学的定律——“个体发育时重蹈种族发展史”(Ontogeny Recapitulates Phylogeny)有着十分密切的关系。根据这个定律,法国著名数学家庞加莱认为,数学课程的内容应完全按照数学史上同样内容的发展顺序展现给读者。^④他说:“动物学家坚持认为,在一个短时期内,动物胚胎的发育重蹈所有地质年代其祖先们的发展历史。人的思维发展似乎也是如此。教育工作者的任务就是让孩子的思维经历其祖先之所经历,迅速通过某些阶段而

① J. O. Hassler. The Use of Mathematical History in Teaching. *Mathematics Teacher*, 1929,6(22):166-171.

② P. S. Jones. The History of Mathematics as a Teaching Tool. *Mathematics Teacher*, 1957,50(1).

③ F. Swetz. Seeking Relevance? Try the History of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 1984,77(1).

④ E. Harper. Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*,1987,94(18).

不跳过任何阶段。鉴于此,科学应该是我们的指南。”

而德国大数学家和教育学家 M. 克莱因据此也指出:

生物发生学的一项基本定律指出,个体的成长要经历种族成长的所有阶段,顺序相同,只是所经历的时间缩短。我想教授数学和其他任何事情一样,至少在原则上要遵照这项定律。为顾念少年人的天赋才能,要慢慢地指引他们去学习较高一级的观念,最后才教抽象的陈述。这种做法,可以说是遵循人类从简朴原始的情况,奋力达到高级知识水准所经的路径。还需不时将这一原则加以说明,因为常有人效法中世纪的学者,将最普遍的观念放在开始的时候教授并且辩称这是唯一的科学方法。不论支持这种说法的依据是什么,它绝不是真理。科学的教学方法只是诱导人去作科学的思考,并不是一开头就教人去碰冷漠的经过科学洗练的系统。推广这种自然的真正科学教学的主要障碍是缺乏历史知识。为了克服上述障碍……这种做法或理念会使诸位看清一切数学观念的产生是如何迟缓;所有观念最初出现时,几乎常是草创的形式,只是经历长期改进,才结晶为确定的方法,成为大家熟悉的有系统的形式。^①

M. 克莱因的上述观点对于中国老一辈数学家余介石等人产生了深刻的影响。在余介石与倪可权合著的《数之意义》一书中,作者主张:“历史之于数学,不仅在名师大家之遗言轶事,足生后学高山仰止之思,收闻风兴起之效。更可指示基本概念之有机发展情形,与夫心理及逻辑程序,如何得以融合调剂,不至相背,反可相成,诚为教师最宜留意体会之一事也。”^②

他们又指出,“观乎数系完成之历史,中等算学教师有可以借镜者数事”^③:

(1)对学生灌输高度抽象的观念和负数、虚数时,“不可求一蹴而就,必须以实例说明其意义,藉应用以表露其功能,徐徐反覆申述之,能使学生明了其效用与需要,而获得牢固之印象,与透彻之认识”。

(2)“支配各种数之运算之规定,率皆先由经验事实之暗示,更经逻辑法则之整理。换言之,即直觉发其端后,再由推理之力组织之;前者为心理程序,后者为逻辑程序。教者宜察学童程度,而善运用之。”

(3)“教师对于学理,必须考其在历史上发展之象迹以规人心认识之程序与限度,应可因时制宜,善为说理,即不至于使初学难以猝通,亦不至养成谬见或误解。”

这种通过考察历史来获得数学启示的做法至今仍然是 HPM 研究的内容之一。

① M. Kline. Logic Versus Pedagogy. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3).

② 洪万生:《数学史与数学教育》,《科学月刊》1984年第5期。

③ 洪万生:《数学史与数学教育》,《科学月刊》1984年第5期。

三、20 世纪中叶的推动者:从 M. 克莱因到弗赖登塔尔

20 世纪 60 年代, 英籍匈牙利小说家和社会哲学家克斯特勒(A. Koestler)批评传统的教学方法, 认为“传统的教学方法让学生面对的不是问题, 而是现成的解答, 这意味着剥夺了他的所有兴奋感、关闭他的创造性动机, 将人的探索过程归结到一堆干巴巴的定理。”^①英国数学史学会在 1917 年创建之初即将“促进数学史在教育中的运用”作为学会目标之一。

在具有数学史研究传统的意大利, 20 世纪著名数学史家洛利亚十分关注数学史的教育价值。洛利亚认为, 数学史是联结中学数学和大学数学的纽带。洛氏还提出数学史在数学与其他学科的关系、发生教学法等方面的作用。^②

在荷兰, 著名数学史家迪克斯特休依斯(E. Jan Dijksterhuis)强调数学史在师范教育中的重要作用:

中学数学教师的主要任务是向新一代传授数学知识, 并且, 如果可能的话, 激起他们对于人类千百年以来在该领域中所取得成就的热爱与崇敬。对于这些师范生来说, 关于这门学科历史演进的知识乃是一种财富, 这种财富不仅是宝贵的, 而且是不可或缺的, 它——自然还需要掌握现代数学知识——将使人们能够令人满意地完成自己的职责。他们经常需要去关心过去数学发展的各个阶段, 他们必须把这些阶段讲得更清晰一些, 对孩子更有吸引力一些。孩子们必须通过这种方式得到数学思维的训练。^③

数学教育中提倡运用数学史的传统在美国一直延续下来。著名数学家和数学史家 M. 克莱因十分强调数学史对数学教育的重要价值。以下是 20 世纪 70 年代亚历山大生(G. Alexanderson)(简称“采访者”)针对克莱因的《为什么教授不会教书: 数学与大学教育的困境》一书对他进行采访时的一段对话:^④

采访者: 您在书中有一处说书的字母符号直到 1600 年左右才开始使用。您在前面的一处又指出, 微积分的逻辑基础是在 19 世纪发展起来的, 约在牛

① I. Grattan-Guinness (ed.). Companion Encyclopedia of History and Philosophy of Mathematical Sciences. London: Routledge, 1994: 11-12.

② F. Furinghetti. The History of Mathematics as a Coupling Link Between Secondly and University Teaching. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 2000, 31(1).

③ J. Fauvel. & J. van Maanen (eds.). History in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000: 91-92.

④ D. J. Albers & G. L. Alexanderson (eds.). Mathematical People: Profiles and Interview. Boston: Birkhauser, 1985: 171.

顿和莱布尼茨 300 年后。但我们期望年轻学生喜爱代数,学生开始学微积分时就明白使用 ϵ 和 δ 的需要。您认为数学教材的编写者应该更加忠实于这门科学历史发展的顺序吗?

克莱因:我肯定相信历史顺序是数学的优秀指南。微积分入门中不该涉及 ϵ 和 δ ,这一严密性属于高等微积分。我们无须完完全全追随历史,但如果大数学家在作出某些创造时遇到困难,我们的学生也必会遇到。

采访者:您提倡每一位未来的(数学)教师都修数学史课程吗?

克莱因:每一位中学和大学数学教师都应该知道数学史。这有许多理由,但最重要的一条理由或许是:数学史是教学的指南。

在 M. 克莱因眼里,数学史的重要程度可谓无以复加。克莱因坚信,历史上大多数数学家所谓的“困难”,正是学生也会经常遇到的学习障碍,因而历史是数学的指南。他举例说,从演绎数学诞生开始,数学家花了 1000 年才得到负数概念,又花了 1000 年才接受负数概念,因此我们可以肯定,学生学习负数时必定会遇到困难。^①

M. 克莱因批评只注重逻辑严密性的教材,指出:“数学绝对不是课程中或教科书里所谓的那种肤浅观察和寻常诠释。换句话说,它并不是从明显叙述的公式推演出毋庸置疑的结论来。”^②从历史上看,在曾经鼎盛过的数以百计的文明中,只有希腊文明发展起我们今天所崇尚的演绎数学,这就充分说明:抽象的、演绎的数学并不是自然的,它远离一般人的思想、兴趣和行为,它是一门高度复杂、难懂、甚至深奥的学科。因此,我们不应该从学生那里期待太多。^③历史是一面镜子。无理数、负数和复数概念以及微积分等学科的历史都说明:数学家往往更多地是以直观的方法进行思考,因而在数学教学中,直观方法是主要的,而演绎方法则是一个辅助性工具。“新数”教材把数学当作一系列严密的演绎结构,无疑是本末倒置的。他赞同 F. 克莱因的观点,坚信学生学习数学的认识过程与历史发展过程之间的相似性;并以此为依据,对美国的“新数运动”进行了尖锐的批判:

数学家花了几千年时间才理解无理数,而我们竟贸然给中学生将戴德金(R. Dirichlet)分割。数学家花了 300 年才理解复数,而我们竟马上教给学生复数是一个有序实数对。数学家花了一千年才理解负数,但现在我们却只能说负数是一个有序自然数对。从伽利略(G. Galilei)到狄利克雷(P. Dirichlet),数学家一直绞尽脑汁去理解函数的概念,但现在却由定义域、值域和序偶对(第一个数相同时第二个数也必须相同)来弄把戏。从古代埃及人和

① M. Kline. Logic Versus Pedagogy. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3).

② M. Kline & Carl B. Boyer-In Memoriam. Historia Mathematica, 1976, 3(2): 387-394.

③ M. Kline. The Ancients Versus the Moderns: A New Battle of the Books. Mathematics Teacher, 1958, 51(6).

巴比伦人开始直到韦达(F. Viète)和笛卡尔,没有一个数学家能意识到字母可用来代表一类数,但现在却通过简单的集合思想马上产生了集合这个概念。^①

M. 克莱因又指出,数学家所经历的困难、挫折对学生具有很好的教育意义:

通常的一些数学课程也使人产生一种错觉。他们给出一个系统的逻辑叙述,使人们有这种印象:数学家们几乎理所当然地从定理到定理,能克服任何困难,并且这些课程完全经过锤炼,已成定局。学生被湮没在成串的定理中,特别是当他们正开始学习这些课程的时候……课本中字斟句酌的叙述,未能表现出创造过程中的斗争、挫折,以及在建立一个可观的结构之前,数学家所经历的艰苦漫长的道路。而学生一旦认识到这些,他将不仅获得真知灼见,还将获得顽强追究他所攻克的问题的勇气,并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓废。说实话,叙述数学家如何跌跤,如何在迷雾中摸索前进,并且如何零零碎碎地得到他们的成果,应能使科研工作的任何新手鼓足勇气。^②

M. 克莱因还主张,数学教材的编写者应该多添加一些历史知识,诸如帕斯卡(B. Pascal)、开普勒(J. Kepler)、伽利略、牛顿这样的大科学家的有关著作,将教材写得更人性化一些。他举了一个例子,说明科学巨著中的人性化风格。1606年,开普勒写了《关于巨蛇做的新星》一书,解释和讨论了一颗新星的出现和消失。在其中一段他写道:“如果有人问我:什么东西会接踵而来,新星这样出现预示着什么?那么我会毫不犹豫地回答说:首先,众多作者源源不断地出版著作,印刷工人有得忙乎了。”

之后,他说原子的力量与新星的出现毫无关系,还说他妻子芭芭拉·米勒(Barbara Müller)与他所见略同。然后这样写道:一天,他坐下来吃妻子准备的色拉,他问道:“如果从上帝创造世界以来,铁皮、莴苣叶、几粒盐、几滴油和醋以及煮散了的鸡蛋碎块漂浮在空间里,每个方向都有,杂乱无章,今天它们会有可能聚在一起形成色拉吗?我肯定,我妻子一定这样回答:“没这么巧,也没这么好。”^③

众所周知,20世纪的著名数学家和数学教育家也都是数学史的研究者。欧拉的数学著作是匈牙利著名数学家和数学教育家波利亚的数学教育著述的重要素材。波利亚同样持有庞加莱的观点。他指出:“只有理解人类如何获得某些事实或概念的知识,我们才能对人类的孩子应该如何获得这样的知识作出更好的判

① M. Kline. Mathematics Texts and Teachers: A Tirade. Mathematics Teacher, 1956, 49(3).

② M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University University, 1972: iii.

③ M. Kline. Mathematics Texts and Teachers: A Tirade. Mathematics Teacher, 1956, 49(3).