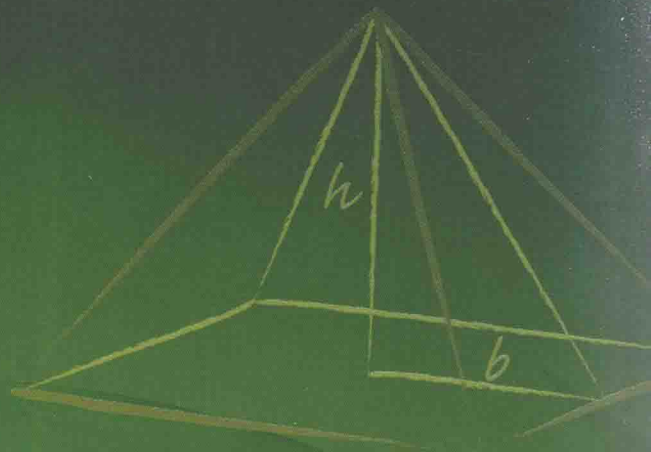


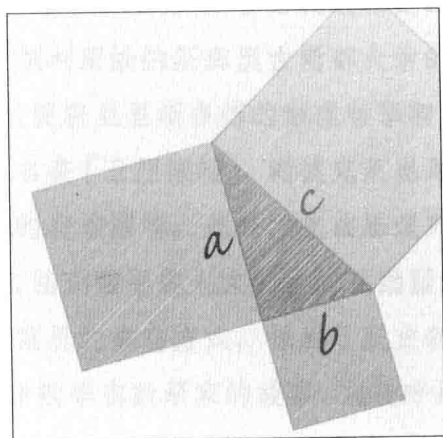


當數學 遇見文化

洪萬生 英家銘 著
蘇意雯 蘇惠玉
楊瓊茹 劉柏宏

當數學遇見文化

洪萬生 英家銘 蘇意雯
蘇惠玉 楊瓊茹 劉柏宏 著



國家圖書館出版品預行編目資料

當數學遇見文化 / 洪萬生, 英家銘, 蘇意雯, 蘇惠玉, 楊瓊茹, 劉柏宏著. -- 初版三刷. -- 臺北市: 三民, 2011

面; 公分. -- (世紀文庫: 科普005)

含索引

ISBN 978-957-14-5129-9 (平裝)

1. 數學 2. 歷史 3. 通俗作品

310.9

97022958

◎ 當數學遇見文化

著 作 人 洪萬生 英家銘 蘇意雯

蘇惠玉 楊瓊茹 劉柏宏

總 策 劃 林黛嫻

發 行 人 劉振強

發 行 所 三民書局股份有限公司

地址 臺北市復興北路386號

電話 (02)25006600

郵撥帳號 0009998-5

門 市 部 (復北店) 臺北市復興北路386號

(重南店) 臺北市重慶南路一段61號

出版日期 初版一刷 2009年1月

初版三刷 2011年7月

編 號 S 300160

行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

有著作權，不准侵害

ISBN 978-957-14-5129-9 (平裝)

<http://www.sanmin.com.tw> 三民網路書店

※本書如有缺頁、破損或裝訂錯誤，請寄回本公司更換。

自序

本書各篇文章都曾刊載於《科學月刊》「在文化裡遇見數學」專欄。當初，我籌畫此一專欄時，很自然地聯想到已故的數學史家克萊恩 (Morris Kline, 1908–1992)。1985 年以前，我的科普數學的書寫方式，就常以他的著述為範本。我相信他的數學文化史取向，對於許多數學家或數學教師仍具吸引力。

克萊恩早期出版了相當博雅的《西方文化中的數學》(Mathematics in Western Culture)。該書給我最深刻的印象，莫過於克萊恩分別利用維納斯與奧古斯都大帝的大理石塑像，來比喻柏拉圖與亞里斯多德的數理哲學觀點。至於畢卡索立體主義名畫「三個樂師」，則被克萊恩用以說明數學與繪畫藝術的密切關聯。此外，克萊恩還列舉了西方數學史的例證，強調數學與人文社會的互動關係。

本書企圖師法克萊恩的書寫方式，採用了歷史敘述的手法，以時間軸貫穿數學與數學家的故事，前後呼應，全書因而有了整體的結構。我們特別擷取幾篇具有代表

性的專欄文章，希望藉此呈現數學 vs. 文化的所有面向。然而，內文除了觸及歷史文化脈絡與數學知識活動的相互影響之外，也希望提供一些至今仍具有意義的數學知識。歷史文化的脈絡意義，誠然一直在更新或改變，但數學知識卻歷久彌新，譬如「畢氏定理」的內容，甚至它的古典證明，也具有永恆不朽的學習價值。透過一些具體實例的呈現，我們希望可以更加「貼近」數學知識成長的歷史意義，從而凝聚出一致的科普數學書寫 (popular mathematics writing) 的主張。

本書呈現給讀者的內容涵蓋了數學文明與數學文化交流，其範圍包含有埃及、希臘、阿拉伯，甚至是中國、韓國與日本，時間軸線大約從西元前 18 世紀到 20 世紀。

各篇文章都有清晰的主題。譬如說吧，〈古埃及文化中的數學〉介紹兩千多年前保存至今的紙莎草數學。〈劉徽的墓碑怎麼刻？〉指出劉徽注《九章算術》對於後世數學的影響。〈可蘭經裡的遺產〉說明回教徒如何將代數應用在遺產分配上。至於〈數學與宗教〉一文，我們則提及《射鵰英雄傳》中的全真教士對於數學甚至也有濃厚的研究興趣。還有，在〈探索日本寺廟的繪馬數學〉中，我們發現日本寺廟祈福的繪馬，竟然在江戶時代是被用來發表數學研究成果。這些文章不僅點綴了數學知識的演化圖像，也幫助讀者欣賞數學文化的多元面貌。

本書內容不僅有歷史、文化、數學知識的演進，同時也包括超越時間、空間的正確可靠知識，因此，本書既可歸屬於數學史敘事，也積極呼應了科普數學的書寫需求。謹為序。

洪弟生



當數學遇見文化

contents

目次

自序 洪萬生

古埃及文化中的數學 英家銘 1

(前 18—前 16 世紀)

古希臘文化中的數學 英家銘 15

(前 6—前 3 世紀)

數學與音樂的對話 劉柏宏 劉淑如 27

(前 6—17 世紀)

西方文化中的歐幾里得 英家銘 41

(前 4—18 世紀)

劉徽的墓碑怎麼刻？ 洪萬生 54

(3 世紀)

求一與占卜 楊瓊茹 72

(5—19 世紀)

《可蘭經》裡的遺產 蘇意雯 84

(7—9 世紀)

數學與宗教 洪萬生 97

(12—13 世紀)

數學與「禮物交換」 英家銘 蘇意雯 110

(16 世紀)

解析幾何的誕生故事之一 蘇惠玉 123

(15—17 世紀)

解析幾何的誕生故事之二 蘇惠玉 141

(17 世紀)

翦管術 vs. 天算頌 楊瓊茹 151

(17 世紀)

數學與意識型態 洪萬生 161

(17—18 世紀)

遺題承繼，串起中日代數史 蘇意雯 172

(17 世紀)

探索日本寺廟的繪馬數學 蘇意雯 184

(17—20 世紀)

人名索引 195

名詞索引 197

本館
立
未
元
一
島
小
園
雅
休
和
印
校
本
山
保
中
上

前 18—前 16 世紀

古埃及文化中的數學

英家銘

一、前言

古埃及文明一直給人神秘的感覺，但從 19 世紀中葉開始，隨著古埃及象形文字的破譯與不斷出土的考古證據，讓我們看見這個文明越來越清晰的圖像。

古埃及人使用一種類似紙的「紙莎草紙」(papyrus) 來書寫，由埃及當地的一種蘆葦所製成。由於紙莎草的耐久度略高於竹簡或紙，所以，埃及文明比起中國留下了更多千年以上的古代文本。這些文本中也包含了一些十分有趣而獨特的數學。

古埃及數學文本的來源有 6 份文件，其中最重要的是《亞美斯紙莎草文書》，在西元前 16 世紀寫成，以它的作者亞美斯 (Ahmes) 書記命名，內容有兩個常用計算列表與 87 個附有解答的問題。其次是《莫斯科紙莎草文書》，在西元前 17 至 18 世紀寫成，因其被收藏於莫斯科

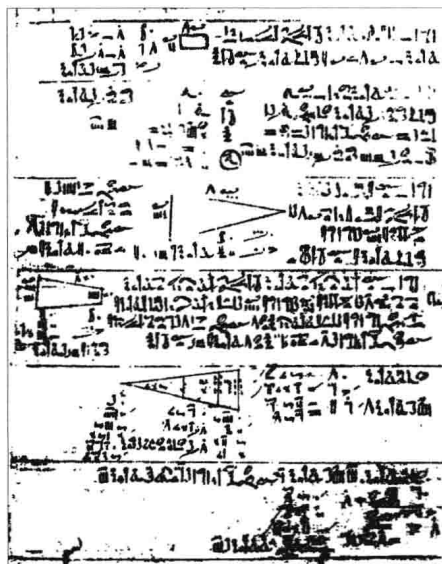


圖 1
《亞美斯紙莎草文書》之一
小部分 (©wikipedia)

美術館而得名，其中有 25 個附有解答的問題。另外還有 1 份《數學皮卷》(Mathematical Leather Roll)，成於西元前 17 世紀，上面是 26 個「單位分數」(unit fraction) 的等式。其餘 3 份文本則包含少量的數學問題。本文將根據這些數學文本所提供的題材，介紹部分古埃及數學獨特的部分以及它們與古埃及文化的關係。

二、古埃及算術中的乘除法

古埃及算數中，有一個非常獨特的系統，就是基於加倍與折半運算的乘除法。這種系統進行乘除法運算時，所需的先備知識只有加法與兩倍乘法表。很明顯地，兩

倍乘法表也只需要加法即可製出。所以他們幾乎只需要用加法就可以進行乘除法。為什麼呢？我們可以先看一個例子：17 乘以 13。計算過程如下：

→ 1	17
2	34
→ 4	68
→ 8	136

$$1 + 4 + 8 = 13 \quad 17 + 68 + 136 = 221$$

表 1

17 乘以 13 的等式列表

在此例中，書記先決定兩數其中之一為被乘數，假定他選擇 17。接著他會不斷將 17 加倍，並把倍數寫在左側，一直到左方出現了 8 倍才停下來，因為下一個倍數 16 就會超過乘數 13。由於 $1 + 4 + 8 = 13$ ，所以 17 的 1 倍加 4 倍加 8 倍，也就是 221，即為所求。這樣的方法之所以適用於所有整數間的乘法，是由於下面的規則：「任何整數都可表為 2 的乘幂之和」。比如 $13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$ ； $25 = 2^0 + 2^3 + 2^4$ 。敏銳的讀者，一定可以看出，這個規則就是現代電腦所遵循的二進位原理。我們沒有明確證據指出古埃及人知道這個規則，但是，從他們讓所有乘法都遵循這個規則來看，他們很可能是知道的。

古埃及的除法運算與乘法過程類似，我們再來看一個例子，184 除以 8。

1	8 ←
2	16 ←
4	32 ←
8	64
16	128 ←

$$1 + 2 + 4 + 16 = 23 \quad 8 + 16 + 32 + 128 = 184$$

表 2
184 除以 8 的等式列表

書記的作法也是不斷地把除數 8 加倍，他算到 16 倍停止，因為 128 再加倍就會超過被除數 184。接著書記要心算，看出右方 $8 + 16 + 32 + 128$ 等於被除數 184，所以將對應左方的倍數 1、2、4、16 加起來即得答案 23。

如果右方的數字組合無法得到被除數，也就是無法整除，此時就必須引入分數，而且採取「折半」的策略來計算。古埃及人對分數的認知與現代人截然不同，下面讓我們介紹古埃及的「單位分數」。

三、單位分數的應用與古埃及文化

古埃及數學最獨特的部分，應該是「單位分數」的系統，因為這種系統完全不見於其他文明的數學傳統中。

單位分數，從現代分數表示法的觀點來看，是指分子為 1 的分數。古埃及書寫這種分數的方法，是將某個整數符號的上方加上一個橢圓形的記號，來代表這個整數的倒數。因此，下文中我們用 $\bar{2}$ 代表 $1/2$ ， $\bar{3}$ 代表 $1/3$ ，以此類推。除了有代表 $2/3$ 的特殊符號之外（我們用 $\bar{\bar{3}}$ 代表它），所有的古埃及分數都是某個整數的倒數，似乎在他們的想法中，所有小於 1 的（正）數，只能是某個整數的倒數或是某些整數倒數的和，比如我們現在所說的 $8/15$ ，他們會寫成 $\bar{3} + \bar{5}$ 。請各位讀者注意，我們如此形容古埃及人心中的分數，並非假設他們瞭解「倒數」或是現代分數表示法，而是純粹戴著現代數學的「眼鏡」，去形容他們心中分數的可能圖像。

在《亞美斯紙莎草文書》中，第一部分就是俗稱“ $2/n$ ”的列表，包含將 2 除以 n 所得的結果，其中 n 為 3 至 101 的奇數。接下來，書記還列出了數字 1 至 9 除以 10 的結果列表，這兩個表中的數值當然都是以一個或數個單位分數之和來表示。筆者 10 年前初次接觸埃及數學時，直覺地認為用單位分數表示全部有理數並無太大困難，因為只要將 n/m 表為 n 個 $\bar{m}$ 相加即可。但研讀過古埃及數學的專書之後，我發現古埃及人為了不明的原因，是禁止將計算的結果表示成相同單位分數之和的。所以 2 除以 n 不能表示成 $\bar{n} + \bar{n}$ 。在“ $2/n$ ”列表中的結

果，有比較簡單的等式，例如 $2 \div 5 = \overline{3} + \overline{15}$ ，也有複雜如 $2 \div 97 = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}$ 的等式。任何一個有理數表成單位分數的方式可能是不唯一的，比如 $2 \div 17 = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68} = \overline{9} + \overline{153}$ ，而埃及人如何在不同的表示法中選擇，數學史家間仍有歧見。無論如何，能製作出這樣一張表，顯示出古埃及數學從業人員高度的計算能力。

前面提到的《數學皮卷》，其實就是一張表，包含了 26 個單位分數等式，例如 $\overline{10} + \overline{40} = \overline{8}$ 或 $\overline{5} + \overline{20} = \overline{4}$ 等。從這一張單位分數等式列表，以及《亞美斯紙莎草文書》中兩個除法列表的存在，我們可推知，他們當時的計算需要常常參考這些單位分數的公式。

當古埃及人進行除法運算且無法整除時，折半的策略就會出現。現在我們舉一個例子，它是《亞美斯紙莎草文書》第二十四題的一部分，需要將 19 除以 8。

1	8
→ 2	16
$\overline{2}$	4
→ $\overline{4}$	2
→ $\overline{8}$	1
$19 \div 8 = 2 + \overline{4} + \overline{8}$	$16 + 2 + 1 = 19$

表 3
19 除以 8 的等式列表

此題中書記先將 8 加倍至 16，但發現繼續加倍下去無法找到答案，於是他就將 8 不斷折半，直到右方部分數字之和能達到 19 為止。

古埃及人對分數的重視其來有自，原因是古埃及的社會不使用貨幣。他們所有的交易都是以物易物，所以，對分數的精確計算能力確有其必要，特別在食物與土地的分配，以及在混合不同穀物以製作麵包與啤酒的過程中。下面我們舉一個例子來看單位分數的使用。

《亞美斯紙莎草文書》的前六個問題，就是實際的食物分配問題，計算如何將 n 條麵包分配給 10 個人，其中 n 分別為 1、2、6、7、8、9。我們以第三題為例。題目是：將 6 條麵包分給 10 個人。在現今我們馬上知道 1 個人可得 $3/5$ 條，所以我們要怎麼分配？我們或許會將 6 條麵包各切下 $3/5$ 條分給 6 個人，另外取 2 份 $2/5$ 條的麵包，將它們切成一半，於是我們有 4 份 $1/5$ 條與 4 份 $2/5$ 條的麵包，剛好可均分給其餘 4 人。前面 6 個人只拿到 1 份，而後面 4 個人雖拿 2 份，但是因為切割的次數較多，或許會有損失，雙方可能都有理由不滿。古埃及人的方法避免了這種感覺上的落差。這一題書記並未寫出計算過程，大概是因為在同一份文書中，已經有 1 至 9 除以 10 的結果列表，最後的結果是每人分配到 $2 + \frac{1}{10}$ 條麵包。據此，分配可以這樣進行：

先將 6 條麵包都切成一半，得到 12 份半條的麵包，分給每人半條，還剩 2 份半條的麵包，接著將這 2 份再各切成 5 份，得到 10 份 $1/10$ 條的麵包，均分給 10 個人。於是，每個人拿到麵包的質與量都完全相同，都是 1 份半條與 1 份 $1/10$ 條。公平的分配不但能做到，還能「被看到」！也許有讀者會懷疑，真的有必要為了表面上的公平大費周章嗎？其實我們不能僅用我們觀念中的「公平」來看待他們，因為不同的社會觀念中的所謂「公平」可能是不同的，即使在現代亦是如此。比如大學入學制度。我想所有人都同意應該用「公平」的方法決定誰能接受高等教育。然而，有的社會覺得應該由大學教授審查高中生的在校表現與社區服務來決定，也有的社會認為需要以統一筆試的分數來決定，孰為公平？見仁見智。

牽涉到分數的四則運算，在古埃及單位分數表示法的限制之下，除了使用加倍與折半的方法之外，還需參考上述三份等式列表，以及一些特殊技巧才能完成。在此不詳細說明。下面我們看與金字塔有關的數學。

四、古埃及文明的頂峰：金字塔與古埃及幾何

一般認為，古埃及文明的「巔峰代表作」，就是金字塔的建造。古埃及人依照天空星座決定金字塔的方位與

相對位置，所以他們等於是「將天堂建造於地面」。金字塔是古埃及國王的陵墓，全數位於尼羅河西岸，因為西方是前往來世的方向。既然金字塔作為王陵，而且也代表古埃及人的來世信仰，所以建造必然馬虎不得。從金字塔的存在，我們可以獲知古埃及人在天文、工程與數學方面的能力，而與金字塔有關的數學知識，也許是古埃及數學中最重要的成就之一。我們先幫讀者複習一些立體幾何的知識。我們所說的金字塔，其實是一個如圖 2 的「四角錐」，底面 $ABCD$ 為一個正方形，四個側面都是三角形，從四個三角形共同的頂點 V 往底面做垂直線，就是這個四角錐的高 h 。

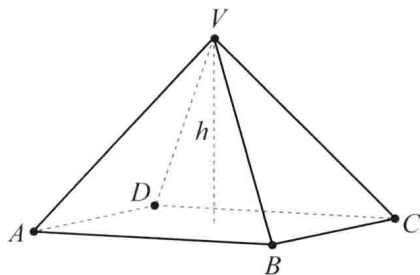


圖 2
金字塔

我們不知道古埃及人是否能計算金字塔的體積，但是在《莫斯科紙莎草文書》的第十四題，我們發現古埃及人能計算「截頂方錐」(truncated pyramid) 的體積。所