初等数学导读丛书

杜毓秀　曹淑勤　李胜利

一元二次方程

CHUDENG SHUXUE DAODU CONGSHU

科学普及出版社

初等数学导读丛书

一 元 二 次 方 程

杜毓秀　曹淑勤　李胜利　编著

科 学 普 及 出 版 社

内 容 提 要

全书共分两章。在第一章中，讲述了一元二次方程的解法、根的判别式、根与系数的关系式及其应用，这些内容都是学好一元二次方程必须掌握的内容；在第二章中，讲述了可以化为一元二次方程的高次方程、分式方程与无理方程，介绍了必须掌握的上述三类方程的基本解法，并补充了一些常见的特殊解法。最后，对代数方程及其解法作了系统的归纳与总结。

（京）新登字 026 号

初等数学导读丛书

一元二次方程

杜毓秀　曹淑勤　李胜利　编著

责任编辑：初炳英

封面设计：赵一东

正文设计：赵丽英

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京昌平长城印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米　1/32　印张：4.625字数：102千字

1993年2月第1版　1993年2月第1次印刷

印数：1—7 000册　定价：2.90元

ISBN 7-110-02648-5/G·737

《丛书》编委会名单

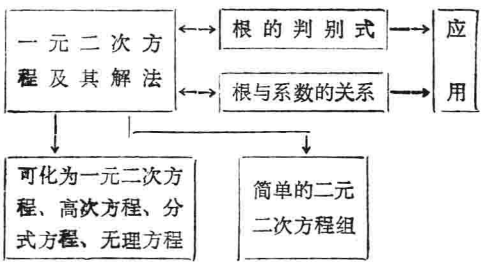
目　录

第一章　一元二次方程

一元二次方程是初中代数中的一个重要内容．一方面，它是中学阶段学习的各类方程的基础，许多方程最终都可归结为解一元二次方程；另一方面，许多应用问题的解决都与一元二次方程有关．它有着广泛的应用．

这一章的内容除包含一元二次方程外，还包含可化为一元二次方程的高次方程、分式方程与无理方程，此外，还包含简单的二元二次方程组．

这一章的知识框图如下：



一、要熟练掌握一元二次方程的四种解法

在初中代数课本中，主要介绍了解一元二次方程的四种解法：直接开平方法、配方法、公式法与因式分解法．为了学好这四种方法，应该注意以下几个问题．

1．配方法与求根公式的推导

用配方法解一元二次方程一般有四步．例如，解方程

$x^2+4x+2=0$:

（1）移项（将常数项 2 移到等号右边），得

$$x^2+4x=-2;$$

（2）配方（等号两边各自加上一次项系数一半的平方，即加上 2^2），得

$$x^2+4x+2^2=-2+2^2,$$

$$(x+2)^2=2;$$

（3）开平方（如果等号右边为正数，可利用平方根的定义），得

$$x+2=\pm\sqrt{2};$$

（4）整理得解

$$x_1=-2+\sqrt{2},\quad x_2=-2-\sqrt{2}.$$

如果方程的二次项系数 $a\neq 1$，则首先把方程化为 $x^2+px+q=0$ 的形式。

例 1 用配方法解方程：

（1）$3x^2+6x=0$；（2）$2x^2-3x+1=0$。

解：（1）方程两边除以 3，得

$$x^2+2x=0; \qquad ①$$

①的两边各加上 1^2，得

$$x^2+2x+1^2=1^2;$$

即

$$(x+1)^2=1; \qquad ②$$

由平方根的意义，由②得

$$x+1=\pm\sqrt{1},$$

即

$$x+1=\pm 1,$$

∴ $x+1=1$ 或 $x+1=-1$。

由 $x+1=1$ 得 $x_1=0$；

由 $x+1=-1$ 得 $x_2=-2$。

(2) 方程两边除以 2，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0;$$

移项，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2};$$

方程两边加上$\left(\frac{3}{4}\right)^2$，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$x^2-2\times\frac{3}{4}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16};$$

即

$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16};$$

开平方，得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$

即

$$x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \quad 或 \quad x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4},$$

∴

$$x_1=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,$$

$$x_2=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}.$$

用配方法解一元二次方程的各步中，最关键的一步是“配方”，即在方程 $x^2+px+q=0$ 的两边各自加上一次项系数一半的平方。

例 2 设$p^2-4q>0$，用配方法解方程 $x^2+px+q=0$ 。

解：移项，得

$$x^2+px=-q;$$

配方，得

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

即
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4},$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4};$$

$\because$
$$p^2-4q>0,$$

$\therefore$
$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}};$$

即
$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

$\therefore$
$$x_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad x_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

有了例 2，用配方法推导一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式就比较容易了．关于公式的推导我们补充几点．

（1）推导的过程分为五步

第一步，方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两边都除以 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

第二步，把常数项移到等号右边，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}; \qquad ①$$

（注：以上两步顺序可以交换，即可“先移后除”．）

第三步，配方，即在①的两边各加上一次项系数的一半的平方，得

$$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

第四步，开方。

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$，当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，由平方根的意义，有

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \qquad ②$$

（严格地讲，$\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$，由于 $|a|=\pm a$，因此 $\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{\pm2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。）

第五步，将②整理为

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

（2）求根公式的另一种推导方法

将 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）变为

$$ax^2+bx=-c.$$

方程两边都乘以 a，得

$$a^2x^2+abx=-ac. \qquad ③$$

在③的两边都加上 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$，得

$$(ax)^2+2\cdot ax\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2=-ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

即 $$\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant0$ 时，得

$$ax+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}.$$

再移项，得

$$ax=-\frac{b}{2}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}.$$

$\because \quad a\neq 0,$

$$\therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

2．要恰当地选用解一元二次方程的四种方法

给了一个一元二次方程，到底选用哪种方法去解？一律选用公式法求解当然是可以的，但不一定是最好的，为此，可以作如下的考虑：

（1）两种特殊类型的一元二次方程及其解法：

①一次项的系数为零：

$b=0$时，方程$ax^2+c=0\left(\frac{c}{a}<0\right)$可用开平方法求解：

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

②常数项为零：

$c=0$时，方程$ax^2+bx=0$（$a\neq 0$且$b\neq 0$，即$a\cdot b\neq 0$）可用提取公因式法：

$$ax^2+bx=0\ (a\cdot b\neq 0).$$

$$x(ax+b)=0,$$

$$x=0\ 或\ ax+b=0.$$

$$\therefore \quad x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

上面的方法实际上是一种特殊的因式分解法。

例 3 解下列各方程：

(1) $2x^2-1=0$； (2) $\sqrt{2}x^2+2\sqrt{6}x=0$；

(3) $x(1+x)=x(1-x)+x$。

解：(1) 由$2x^2-1=0$，得

$$x^2=\frac{1}{2},$$

解得
$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 由$\sqrt{2}x^2+2\sqrt{6}x=0$，得

$$x(\sqrt{2}x+2\sqrt{6})=0,$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $\sqrt{2}x+2\sqrt{6}=0$。

解 $\sqrt{2}x+2\sqrt{6}=0$，得

$$x=-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{3}.$$

$\therefore$ 方程的解是 $x_1=0$，$x_2=-2\sqrt{3}$。

对于(2)，还可以有下面的简便方法：

由 $\sqrt{2}x^2+2\sqrt{6}x=0$，得

$$\sqrt{2}x(x+2\sqrt{3})=0,$$

$\therefore$ $x=0$ 或 $x+2\sqrt{3}=0$，

$\therefore$ $x_1=0$，$x_2=-2\sqrt{3}$。

例 4 (选择题) 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根中有一个并且只有一个根是零，那么(　　)。

(A) $p=0$，$q=0$ (B) $p=0$，$q\neq0$

(C) $p\neq0$，$q=0$ (D) $p\neq0$，$q\neq0$。

分析： 当 $p=0$，$q=0$ 时，方程变为 $x^2=0$，它的根是 $x_1=x_2=0$，(A)不合要求；当 $p=0$，$q\neq0$ 时，方程变为 $x^2+q=0\ (q\neq0)$，如果 $q>0$，方程没有实根，如果 $q<0$，方程是 $x^2=-q\ (q<0)$，它有两个不等于零的实根 $x=\pm\sqrt{-q}$，所以(B)也不合要求；当 $p\neq0$，$q=0$ 时，方程变为 $x^2+px=0\ (p\neq0)$，它的根是：$x_1=0$，$x_2=-p\neq0$，(C) 合乎要求，对于 $p\neq0$，$q\neq0$，方程的根也不合要求。(此题还可用韦达定理解，请自己思考)

通过上面的分析得知，应该选择 (C)

例 5 解下列各方程：

(1) $(x+1)^2-2=0$；

(2) $(x+1)^2=2(x+1)$。

分析： 如果将方程整理为一般形式 $ax^2+bx+c=0$，解起来就要麻烦一些，如果我们把 $x+1$ 看作一个整体，则(1)属于 $ax^2+c=0$ 型的方程，(2) 属于 $ax^2+bx=0$ 型的方程，这样就可以用特殊方法（开平方法与提公因式法）求它们的根3。

解： (1) 由 $(x+1)^2-2=0$，得

$$(x+1)^2=2,$$

$$\therefore \quad x+1=\pm\sqrt{2},$$

即

$$x=-1\pm\sqrt{2},$$

$$\therefore \quad x_1=-1+\sqrt{2},\ x_2=-1-\sqrt{2}.$$

(2) 由 $(x+1)^2=2(x+1)$，得

$$(x+1)^2-2(x+1)=0,$$

$$(x+1)[(x+1)-2]=0,$$

即

$$(x+1)(x-1)=0,$$

$$\therefore \quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

(2) 一般型的一元二次方程及其解法。

对于非特殊类型的一元二次方程，如 $x^2+5x+6=0$，$x^2+5x+2=0$，$x^2+4x+1=0$，可用因式分解法，公式法或配方法求解

例 6 解下列各方程：

(1) $x^2+5x+6=0$；

(2) $x^2+5x+2=0$；

(3) $x^2+4x+1=0$。

分析：对于(1)，可用因式分解法求解，对于(2)和(3)，试用因式分解法比较困难，可用公式法求解、其中(3)的一次项系数为 4，用配方法也比较方便。

解：(1) 由 $x^2+5x+6=0$，得

$$(x+2)(x+3)=0,$$

$$\therefore \quad x+2=0 \text{ 或 } x+3=0,$$

$$\therefore \quad x_1=-2,\ x_2=-3.$$

(2) $\because$ $a=1$，$b=5$，$c=2$，

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times2=17>0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{-5+\sqrt{17}}{2},\ x_2=\frac{-5-\sqrt{17}}{2}=-\frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

(3) $\because$ $a=1$，$b=4$，$c=1$，

$$\Delta=4^2-4\times1\times1=12,$$

$$\therefore \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3},$$

$\therefore\quad x_1=-2+\sqrt{3},\ x_2=-2-\sqrt{3}$.

另解（配方法）：由 $x^2+4x+1=0$，得

$$x^2+4x=-1,$$

$$x^2+4x+4=-1+4,$$

即
$$(x+2)^2=3,$$

$\therefore$
$$x+2=\pm\sqrt{3},$$

$\therefore$
$$x_1=-2+\sqrt{3},\ x_2=-2-\sqrt{3}.$$

上面三个方程分别用了因式分解法、公式法与配方法，这也正是我们遇到一个非特殊型的一元二次方程时，选用哪种方法求解的思考顺序：先试用因式分解法求解，若有困难（请注意，这里使用的字眼是"有困难"，而不是"不能解"，因为从理论上讲，任何一个一元二次方程，当 $\Delta\geqslant 0$ 时，都可以用因式分解法求解，只是有时易有时难，而难易程度又与解答者的水平有关），则用求根公式求解，特别当 $a=1$，b 是偶数时，用配方法也比较简单。

通过上面的种种分析，我们可以回答下面的问题：遇到一个一元二次方程，到底选用哪种方法求解，从理论上讲，公式法、配方法与因式分解法（此时要求 $\Delta\geqslant 0$）都可以用，但我们应该选择较为简捷的办法，为此，先判断方程的类型，是特殊型的还是非特殊型的，如果是特殊类型的（$ax^2+c=0$，$ax^2+bx=0$），则用特殊方法（开平方法或提公因式法），如果是非特殊类型的，则先试用因式分解法，如有困难，则用公式法，有时用配方法。

把上面的思考与论述用框图表示如下：

- 一元二次方程的解法
  - 特殊型 b、$c=0$ ($b=0$或$c=0$)
    - ($b=0$) $ax^2+c=0(ac<0)$, 开平方法得: $$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$
    - ($c=0$) $ax^2+bx=0\ (ab\neq 0)$，提公因式法得: $$x_1=0，\ x_2=-\frac{b}{a}$$
  - (换元法) $a(x+m)^2+c=0\quad(ac<0)$, $a(x+m)^2+b(x+m)=0\quad(ab\neq 0)$
  - 一般型 ($abc\neq 0$)
    - 因式分解法($\Delta\geqslant 0$): $$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0,$$ 其中 $a_1a_2=a$，$c_1c_2=c$，$a_1c_2+a_2c_1=b$
    - 公式法($\Delta\geqslant 0$): $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
    - 配方法: $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\ (\Delta\geqslant 0)$$

例7 解下列各方程:

(1) $(3x+5)x-x=4(x+1)$;

(2) $3x(2x+1)=7(2x+1)$;

(3) $3x(x+1)=2(1-x)$;

(4) $2(x+1)^2=3-x$。

分析: 对于(1)、(3)、(4)三个方程，先整理为$ax^2+bx+c=0$的形式，看它们是属于特殊型还是非特殊型，再决定选取哪种解法。

解: (1) 将方程整理，得

$$3x^2+5x-x=4x+4,$$
$$3x^2=4,$$
$$\therefore \quad x^2=\frac{4}{3}.$$

（属于特殊型：$ax^2+c=0$，用开平方法求解）

解方程，得

$$x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3},$$
$$\therefore \quad x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

（2）将$2x+1$看作一个整体，分解因式，得

$$3x(2x+1)-7(2x+1)=0,$$
$$(2x+1)(3x-7)=0,$$
$$\therefore \quad 2x+1=0 \text{ 或 } 3x-7=0,$$
$$\therefore \quad x_1=-\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{7}{3}.$$

（3）将方程整理为

$$3x^2+3x=2-2x,$$
$$3x^2+5x-2=0.$$

（属于非特殊型，先试用因式分解法——十字相乘法）

把方程的左边分解为

$$(3x-1)(x+2)=0,$$
$$\therefore \quad 3x-1=0 \text{ 或 } x+2=0,$$
$$\therefore \quad x_1=\frac{1}{3}, \quad x_2=-2.$$

（4）将方程整理为

$$2(x^2+2x+1)=3-x,$$
$$2x^2+4x+2=3-x,$$