普通高等学校“十一五”精品规划教材

复变函数与积分变换

FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

(修订版)

主　编　马柏林　李丹衡　晏华辉

普通高等学校“十一·五”精品规划教材

复变函数与积分变换

（修订版）

主　编　马柏林　李丹衡　晏华辉

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换(修改版)/马柏林,李丹衡,晏华辉主编.
—上海:复旦大学出版社,2007.4(2008.5 重印)
(新锐丛书)
ISBN 978-7-309-05412-5

Ⅰ.复… Ⅱ.①马…②李…③晏… Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材
②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.O174.5 O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 029996 号

复变函数与积分变换(修改版)
马柏林 李丹衡 晏华辉 主编

出版发行 复旦大学 **出版社** 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@ fudanpress. com http://www. fudanpress. com

责任编辑 范仁梅
出 品 人 贺圣遂

印　　刷 浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本 787 × 960 1/16
印　　张 15
字　　数 266 千
版　　次 2009 年 2 月第二版第三次印刷

书　　号 ISBN 978-7-309-05412-5/O・390
定　　价 26.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社发行部调换。

内 容 简 介

本书介绍复变函数与积分变换的基本概念、理论和方法. 内容包括: 复数及复平面、解析函数、复积分、解析函数的级数理论、留数理论、共形映射理论、傅里叶变换、拉普拉斯变换和快速傅里叶变换. 每一章给出本章的小结, 并配有一定数量的习题, 附录中给出习题的答案, 便于读者复习和总结.

本书可作为高等学校理工科专业复变函数与积分变换课程的教材, 也可供工程技术人员参考.

前　　言

复变函数与积分变换的理论和方法已被广泛地应用于自然科学的众多领域,如电子工程、控制工程、理论物理、流体力学、热力学.随着计算机科学的飞速发展,数字化已成为现代科学发展的一个重要的方向,数字信号处理应用的领域会越来越广,对数字信号处理的理论和技术也就有更多的要求.因此,复变函数与积分变换的基本理论和方法是高等院校理工科类学生必须具备的数学基础知识之一.

本书要求的预备知识是微积分的全部内容.本书主要介绍复变函数与积分变换的基本的概念、理论和方法.在引入复变函数的极限概念时,我们采用了严格的定义.当阅读关于极限的一些定理证明比较困难时,可以先不要看这些证明,有关定理的结论,可以通过比较一元或多元微积分中对应的定理来理解.因为柯西-古萨定理的证明比较困难,所以本书没有涉及.对于涉及分析中比较深的内容,例如关于共形映射的黎曼定理等,我们都没有写入本书,如读者有兴趣,可以从参考书中找到相关的内容.关于单位脉冲函数,我们尽可能让问题变得容易理解,因此从数学定义和物理背景上都作了解释.积分变换的应用主要是线性时不变系统中的应用,但是基于本书的篇幅,没有涉及太多,读者可以从所列的参考书中找到这类的应用.我们第一次将离散傅里叶变换和快速傅里叶变换写入书中,因为它们是数字信号处理的基础,考虑课时的限制,写得比较简略.对这些内容的学习,要考虑计算机的实现作为一个主要目标.书中带星号的为比较难的内容,可以不放在课堂上讲,带星号的练习题不要求做.

本书由马柏林、李丹衡、晏华辉主编,第一章、第七章和第八章由马柏林编

写,第二章和第三章由晏华辉编写,第四章、第五章和第六章由李丹衡编写,第九章由邓浏睿编写.廖茂新、刘修生对本书的部分内容进行了审查和修改.本书的编写是很多教师多年的教学实践的结晶,他们付出了大量的辛勤劳动;本教材在编写过程中得到湖南大学数学与计量经济学院的大力支持,此书的出版得到了许多同行们很好的建议及出版社等方面的大力支持和帮助,在此一并表示真诚的感谢.

教材编写过程中疏忽在所难免,不妥之处希望使用本教材的教师和学生提出宝贵的意见.

编　者

2007 年 1 月

目　　录

第一章　复数和复平面

本章介绍复数的定义、运算，复平面点集和扩充复平面，为后面的复变函数的研究作准备.

§1.1　复　　数

1. 复数的概念

形如

$$z = a + \mathrm{i}b \text{ 或 } z = a + b\mathrm{i}$$

的数称为**复数**，其中 a 和 b 为实数，i 称为**虚单位**，即是满足 $\mathrm{i}^2 = -1$. 全体复数的集合称为复数集，用 **C** 表示.

对于复数 $z = a + \mathrm{i}b$，a 与 b 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$a = \mathrm{Re}\, z,\ b = \mathrm{Im}\, z.$$

当且仅当虚部 $b = 0$ 时，$z = a$ 是实数；当且仅当 $a = b = 0$ 时，z 就是实数 0；当虚部 $b \neq 0$ 时，z 叫做**虚数**；当实部 $a = 0$ 且虚部 $b \neq 0$ 时，$z = \mathrm{i}b$ 称为**纯虚数**.

显然，实数集 **R** 是复数集 **C** 的真子集.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，我们称这两个复数相等. 这样，一个复数等于零，当且仅当它的实部和虚部同时等于零. 一般情况下，两个复数只能说相等或不相等，而不能比较大小.

2. 复数的向量表示和复平面

根据复数相等的定义，我们知道，任何一个复数 $z = a + \mathrm{i}b$，都可以由一个有序实数对 (a, b) 惟一确定；我们还知道，有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点是一一对应的. 由此，可以建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应.

如图 1.1 所示，点 z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 可用点 $z(a,b)$ 表示，这个建立了用直角坐标系表示的复数的平面称为复平面，x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴. 显然，实轴上的点表示实数；除了原点外，虚轴上的点表示纯虚数. 今后，我们说点 $z(a,b)$，与复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 表示同一意义.

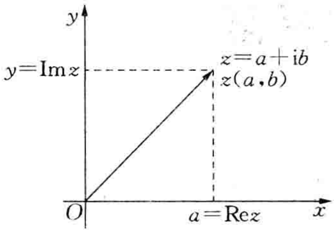

图 1.1

当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**. 复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示，即是如果 $z=a+\mathrm{i}b$，则 $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$. 当复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的虚部 $b=0$ 时，有 $z=\bar{z}$，即是任一实数的共轭复数仍是它本身.

在复平面上，复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 还可以用由原点引向点 z 的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示，这种表示方式建立了复数集 **C** 与平面向量所成的集合的一一对应（实数 0 与零向量对应）. 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$ 或 r，因此有

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0. \tag{1.1}$$

显然，$|\operatorname{Re}z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|$，$|\operatorname{Im}z|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|$.

3. 复数的运算

设复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$，$z_2=c+\mathrm{i}d$，则加法由下式定义：

$$z_1+z_2=(a+c)+\mathrm{i}(b+d). \tag{1.2}$$

容易看出，这样定义后，复数的加法就可以按照向量的平行四边形法则来进行，如图 1.2 所示. 规定复数的减法是加法的逆运算，即是把满足

$$(c+\mathrm{i}d)+(x+\mathrm{i}y)=a+\mathrm{i}b$$

的复数 $x+\mathrm{i}y$，称为复数 $a+\mathrm{i}b$ 减去复数 $c+\mathrm{i}d$ 的差，记作 $(a+\mathrm{i}b)-(c+\mathrm{i}d)$. 容易得到

$$x+\mathrm{i}y=(a-c)+\mathrm{i}(b-d). \tag{1.3}$$

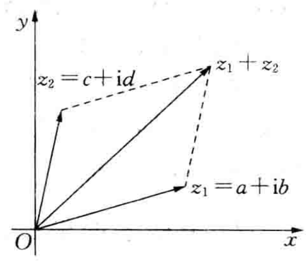

图 1.2

复数的乘法定义如下：

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= ac+\mathrm{i}bc+\mathrm{i}ad+\mathrm{i}^2bd \\ &= (ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad). \end{aligned} \tag{1.4}$$

由乘法的定义，容易得到 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. 这样，当 $z_2 \neq 0$ 时，除法作为乘法的逆运算，可以定义为：

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} \\ &= \frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

容易验证，加法和乘法满足结合律、交换律及乘法对加法的分配律. 所以，全体复数在定义上述运算后称为复数域. 在复数域内，我们熟悉的一切代数恒等式仍然成立，例如

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

等等.

复数的模和共轭复数有下面的性质，其证明留给读者.

(1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$;

(2) $\overline{(z+w)} = \bar{z}+\bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}\bar{w};\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}\ (w \neq 0)$;

(3) $|zw| = |z|\,|w|$;

(4) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$;

(5) $|\bar{z}| = |z|$.

4. 复数的三角表示和复数的方根

考虑复平面 $\mathbf{C}$ 的不为零的点 $z = x + \mathrm{i}y$. 如图 1.3 所示，这个点有极坐标 (r, θ)：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. 显然 $r = |z|$，θ 是正实轴与从原点 O 到 z 的射线的夹角，称为复数 z 的**辐角**，记为

$$\theta = \operatorname{Arg} z.$$

显然有 $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

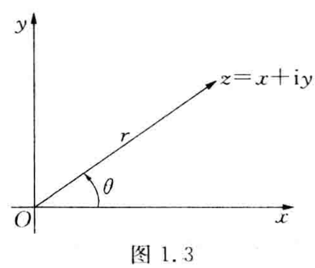

图 1.3

任一非零复数 z 的辐角有无限多个值，这些值相差 2π 的整数倍. 通常把满足条件

$$-\pi < \theta \leqslant \pi \tag{1.6}$$

的辐角 θ 称为 $\text{Arg}\, z$ 的主值，记为 $\theta = \arg z$，于是有

$$\theta = \text{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots. \tag{1.7}$$

利用极坐标表示，复数 z 可以表示为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.8}$$

(1.8)式称为复数的**三角表示**. 再应用欧拉(Euler)公式：$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，又可以将复数 z 表示成**指数形式**

$$z = re^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.9}$$

例 1.1 求 $\text{Arg}(-3-\mathrm{i}4)$.

解 由(1.7)式可知

$$\text{Arg}(-3-\mathrm{i}4) = \arg(-3-\mathrm{i}4) + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

再由 $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$，点 $-3-\mathrm{i}4$ 位于第三象限知，

$$\arg(-3-\mathrm{i}4) = \arctan\frac{(-4)}{(-3)} - \pi = \arctan\frac{4}{3} - \pi,$$

所以有

$$\text{Arg}(-3-\mathrm{i}4) = \arctan\frac{4}{3} + (2k-1)\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

例 1.2 计算 $z = e^{\mathrm{i}\pi}$.

解 因为 $e^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$，所以

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1.$$

例 1.3 把复数 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 表示成三角形式和指数形式.

解 $r = \sqrt{3+1} = 2$，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为与 $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限，所以 $\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6}$. 于是

$$\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

于是可得指数表示形式为

$$\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}.$$

下面利用复数的三角表示，讨论复数乘法的几何意义. 设复数 z_1，z_2 分别写成三角形式

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

根据复数的乘法法则及正弦、余弦的三角公式，有

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))\\&=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_2+\theta_2)).\end{aligned}$$

上面我们得到的三角形式的公式，用指数形式表示出来，可得

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.10}$$

由此得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{1.12}$$

图 1.4 说明了复数相乘的几何意义，两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于这两个复数的辐角的和.

注　式(1.12)式不能写成是 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$，这是因为该式两边表示都是辐角的主值，而(1.12)式表示的是两个无穷的集合相等.

由(1.11)式、(1.12)式可得

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,\ \operatorname{Arg}z_1=\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}+\operatorname{Arg}z_2,$$

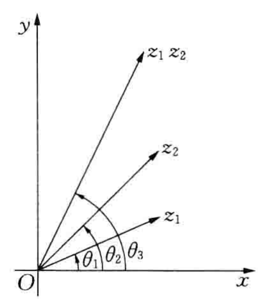

图 1.4

即是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2. \tag{1.13}$$

由此可见，两个复数的商的模等于它们模的商，商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角的差.

现在我们来讨论复数的乘方和开方问题. 设复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，它的 n 次幂可利用(1.10)式由归纳得

$$\begin{aligned} z^n &= (r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta))^n \\ &= r^n(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n \\ &= r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \\ &= r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

从而有

$$|z^n| = |z|^n,$$

其中 n 为正整数. 当 $r = 1$ 时,得棣莫拂(de Moivre)公式

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1.15}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算. 下面我们介绍复数的 n 次方根的定义和求法.

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是已知的复数,n 为正整数,则称满足方程

$$\omega^n = z$$

的所有的复数 ω 为 z 的 n 次方根,并且记为

$$\omega = \sqrt[n]{z}.$$

我们用复数的指数表示来讨论复数的 n 次方根. 步骤是:先假定有 n 次方根,再找出这些根.

设 $\omega = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则根据复数 z 的 n 次方根的定义和(1.13)式,得

$$\omega^n = \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

记 $\theta_0 = \arg z$, 则有

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

解得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n},\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,$$

其中$\sqrt[n]{r}$是算术根,所以

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1. \tag{1.16}$$

若记 $\omega_0 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_0}{n}}$, 则 ω_k 可表示为

$$\omega_k = \omega_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1. \tag{1.17}$$

这就是说,复数的 n 次方根是 n 个复数,这些方根的模都等于这个复数的模的 n 次算术根,它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0, 1, 2, …, $n-1$ 倍的和的 n 分之一. 在复平面上,这 n 个根均匀分布在一原点为中心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上,它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点,见图 1.5.

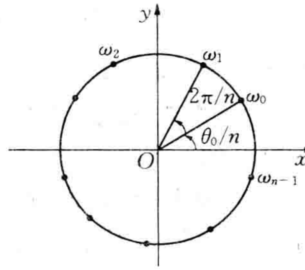

图 1.5

例 1.4　求 $1-\mathrm{i}$ 的立方根.

解　因为 $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$, 所以 $1-\mathrm{i}$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi/4+2k\pi}{3}}=\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi+8k\pi}{12}},\ k=0,\ 1,\ 2.$$

即是 $1-\mathrm{i}$ 的立方根是

$$\sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{7}{12}\pi\mathrm{i}},\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}},\ \sqrt[6]{2}\mathrm{e}^{\frac{23}{12}\pi\mathrm{i}}.$$

例 1.5　计算 n 次单位根.

解　$1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$, (1.16)式给出如下这些根:

$$1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{n}},\ \cdots,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(n-1)\pi}{n}}.$$

特别地,立方单位根是

$$1,\ \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}).$$

§1.2　复平面点集

我们研究的许多对象——解析函数、保角变换等等问题,首先遇到的是定义域和值域的问题,这些都是复平面上的一种点集. 在此,我们先介绍复平面上的点集.

1. 平面点集的几个概念

(1) **邻域.** 集合

$$D(z_0,\ \delta)=\{z:\ |z-z_0|<\delta\}\tag{1.18}$$

称为 z_0 的 δ 邻域,其中 $\delta>0$.

$$D(z_0, \delta)\backslash\{z_0\} = \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

称为 z_0 的去心邻域.

(2) **内点、开集.** 若点集 E 的点 z_0，有一个 z_0 的邻域 $D(z_0, \delta) \subset E$，则称 z_0 为 E 的一个内点；如果点集 E 中的点全为内点，则称 E 为开集.

(3) **边界点、边界.** 如果点 z_0 的任意邻域内，既有属于 E 中的点，又有不属于 E 中的点，则称 z_0 为 E 的边界点；集合 E 所有边界点称为 E 的边界，记作 ∂E.

(4) **区域.** 如果集 E 内的任何两点可以用包含在 E 内的一条折线连接起来，则称集 E 为连通集. 连通的开集称为**区域**.

区域 D 和它的边界 ∂D 的并集称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

(5) **有界区域.** 如果存在正数 M，使得对一切 $z \in E$，有

$$|z| \leqslant M,$$

则称 E 为**有界集**. 若区域 D 有界，则称为**有界区域**.

(6) **简单曲线、光滑曲线.** 设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是实变量 t 的两个实函数，它们在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

或由复值函数

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$$

定义的集合 Γ 称为复平面上的一条曲线，上述方程称为曲线 Γ 的参数方程. 点 $A = z(\alpha)$ 和 $B = z(\beta)$ 分别称为曲线 Γ 的起点和终点. 如果当 $t_1 \in (\alpha, \beta)$，$t_2 \in [\alpha, \beta]$，$t_1 \neq t_2$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，称曲线 Γ 为**简单曲线**，也称为约当(Jordan)曲线. $z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线. 例如圆周

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

就是简单闭曲线. 如图 1.6 所示，用复数表示为

$$|z| = r.$$

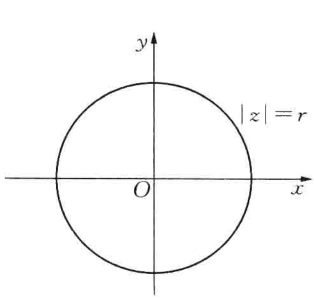

图 1.6

我们容易证明圆 $|z| = r$ 将平面分为两个不相交的区域，由不等式 $|z| < r$ 和 $|z| > r$ 所