中学生练习册（修订本）

代数

高中 第二册

四川省中小学教材审查委员会审定

四川教育出版社

中学生练习册（修订本）

代 数

高中第二册

四川省中小学教材审查委员会审定

四川教育出版社

1989年·成都

中学生练习册　　高中代数第二册

四川教育出版社出版　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　　内江新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张8.5　字数178千
1989年4月第二版　　1989年4月第一次印刷
印数：1—94,000册

ISBN7—5408—0483—1/G·466　定价：1.97元

说　明

为了加强基础知识教学和基本技能训练，由省内一批富有教学经验的教师和教学研究人员，按照修订后的现行教学大纲规定的内容和要求，编写了一套配合教学使用的《中学生练习册（试用本）》，供我省中学生学习时使用，亦供教师教学时参考。

《中学生练习册（试用本）》，包括高、初中各年级的语文、数学、物理、化学、英语等五门学科。这套练习册由四川省教育科学研究所主编，四川省教育委员会组织审定。四川教育出版社在组稿过程中做了大量的工作。本书由刘智银、王健熙、裔瀚声、李泰良等同志编写，刘智银同志统稿，罗大纾同志审定。

编审时，既注意减轻学生的过重负担，又适当兼顾了学有余力的学生的需要，不仅对练习量做了控制，在深难度上也有不同层次的要求。各地教师在指导学生使用练习册时，可从所教学生的实际情况出发，做灵活的处理。

这本代数（高中第二册）练习册，是按高中课本代数第二册（甲种本）的体系编写的，为便于选用甲种本或乙种本教科书的学生都能使用，特将练习册中各章的复习参考题分为A、B两组，A组习题不超出中学数学教学大纲的要求，B组习题不超出中学数学教学大纲的较高要求。其中打“*”的，是教学大纲规定的选学内容或较高要求。

本练习册出版后，经过一段时间的试用，广大教师、学生和教研员反映良好，同时也提出了一些意见，再版时作者已根据这些意见作了初步修改。

编写与教学配套的学生练习册，是一项新的工作，限于水平、经验和时间。疏漏之处仍在所难免，恳请读者批评、指出，以便修订时进一步改正。

1989年1月

目　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

本章内容是在高中代数第一册各章的基础上，进一步研究三角函数的逆映射，建立反三角函数的概念，进而学习有关反三角函数的性质及运算等问题，并由此学习最简单三角方程的解集和简单三角方程的解法，从而完成了在中学阶段对五种函数（即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数）的性质与运算（微、积分运算除外）的初步研究，也为今后进一步学习奠定基础。

学习要求

1. 理解反三角函数的概念，特别是掌握记号$\arcsin x$、$\arccos x$、$\mathrm{arctg}\,x$、$\mathrm{arcctg}\,x$的定义；并能运用反三角函数的定义、性质解决诸如求反三角函数的定义域、值域，反三角函数的三角运算、代数运算以及三角函数的反三角运算等问题。

2. 掌握最简单三角方程解集的推导，并能熟练地写出最简单的三角方程的解集；掌握简单三角方程的四种类型和五种基本解法。

3. 加深对函数、反函数等概念的理解，提高灵活运用三角公式解决问题的能力。

一 反三角函数

教材辅导

1. 反三角函数的概念

（1）我们曾学过，只有当确定函数$y=f(x)$的映射f：$A\to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射时，这个映射才有逆映射，函数$f(x)$才有反函数。因为确定三角函数的映射不是从定义域到值域上的一一映射，所以在整个定义域上，三角函数没有反函数。

（2）我们知道，三角函数都有各自的单调区间。以正弦函数$y=\sin x$为例，它在每一个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in Z$）上，都从$-1$增大到1，是增函数；在每一个闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$（$k\in Z$）上，都从1减小到$-1$，是减函数。上述的任一区间，若把它当作集合$A$，它到集合$B$(闭区间$[-1, 1]$)上的映射都是一一映射，从而$y=\sin x$，在上述任一单调区间上都有反函数。

（3）为了应用的方便，对于$y=\sin x$，我们选取上述单调区间中包含所有锐角在内的那个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，称它为主值区间。显见，$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的，图像是连续的，函数$y$可以取得$[-1, 1]$上的

一切值（见教材*第2页图1-2）。这就说明$y=\sin x$是从$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$到$[-1, 1]$上的一一映射，且主值区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的选取也将给今后的应用带来方便。于是我们把$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数定义为反正弦函数，并记作$y=\arcsin x$($x\in[-1, 1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$且$\sin y=x$)。

（4）综合上面的（2）、（3）知，确定主值区间的主要依据是：

①在此区间上，三角函数是单调函数；

②在此区间上，三角函数可取得它能够取得的一切值；

③这个区间应包括所有锐角；

④在此区间上的图像应是连续的。

①、②也可合并为：在此区间上从定义域到值域上的映射是一一映射。

于是，仿正弦函数，$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}x$和$y=\mathrm{ctg}x$的主值区间依次可确定为$[0, \pi]$、$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$和$(0, \pi)$。

（5）规定了主值区间以后，那么三角函数在其他非主值区间的各单调区间上的反函数，就不能叫做反三角函数，

*教材指六年制重点中学高中数学课本代数第二册1984年9月第1版，1986年3月成都第二次印刷。

但它可以用反三角函数表示出来。例如$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$上的反函数是$y=2k\pi+\arcsin x$；在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in Z)$上的反函数是$y=(2k+1)\pi-\arcsin x$。这个结果对于我们今后学习最简单三角方程的解集也将是有用的。

（6）为便于理解和应用，我们不妨把反三角函数看成角，把自变量x看成原三角函数的值（一个已知数），这样，对于记号$\arcsin x$、$\arccos x$、$\mathrm{arctg}\,x$、$\mathrm{arcctg}\,x$等就可按下面的三点来理解：

①反三角函数是一个角（弧度数）；（今后凡遇到它们，都可用α、β等字母设出）

②这个角是在特定的主值区间内；

③这个角的三角函数值等于已知数x。

例如：1）$\arcsin x=\alpha$，$\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，且$\sin\alpha=x$，即$\sin(\arcsin x)=x$，$x\in[-1,\ 1]$。

2）$\mathrm{arcctg}\,b=\beta$，$\beta\in(0,\ \pi)$，且$\mathrm{ctg}\,\beta=b$。

3）$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=\gamma$，$\gamma\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，且$\cos\gamma=-\frac{1}{3}$。如果解题需要，还可利用$-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$，把$\gamma$精确到$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$内。

我们可以把②、③看作由任一反三角函数所给出的隐含

的已知条件。

2。 反三角函数的运算

有关反三角函数的运算问题常常可以转化为原三角函数的问题来解，其解题步骤可用“设、写、化”三个字加以概括。即：

（1）把题中的每个反三角函数用α、β、γ等字母设出；

（2）分别写出它们所在的区间和已知的三角函数值；

（3）利用（1）、（2）所给的“已知条件”，把原题转化为过去曾出现并已解决的三角函数问题。

例如：

①求 $\cos\left[2\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)\right]$的值。

分析：这是一道反三角函数的三角运算题。

若设 $\arccos\left(-\frac{12}{13}\right)=\alpha$，

则 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$且$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，因此原题就转化为：

“已知$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，且$\alpha$为钝角，求$\cos2\alpha$的值”。

这就是教材代数第一册，189页第4题。

②求 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}(-2)$的值。

分析：这是一道反三角函数的代数运算题。

设 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\alpha$，$\operatorname{arctg}(-2)=\beta$，

则 $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$且 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$， $\operatorname{tg}\beta$

$=-2$。于是，原题转化为：

"已知 $tg\alpha=\frac{1}{3}$，$tg\beta=-2$，求$\alpha+\beta$的值（其中$0°<\alpha<90°$，$90°<\beta<180°$）。

这就是教材代数第一册，180页例1(2)所解决的问题。

③ 证 $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$。

分析：这是一道证明反三角函数恒等式的题。

设 $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$，$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}=\beta$，$\mathrm{arctg}\frac{1}{8}=\gamma$，

则 $tg\alpha=\frac{1}{2}$，$tg\beta=\frac{1}{3}$，$tg\gamma=\frac{1}{8}$。

因为 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{8}$都小于$\frac{\sqrt{3}}{3}=tg\frac{\pi}{6}$，

所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$。

于是，问题转化为：在给定条件下证明$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$。而这已经是我们曾做过的习题了。证明步骤主要是：

首先证等式两边的角的同名函数值恒等；

再证等式两边的角对所取的三角函数在同一单调区间内（或只有一个角与已知数对应的区间）。

因此，本题宜证明$tg(\alpha+\beta+\gamma)=\cdots\cdots=1$，且因$\alpha+\beta+\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，又在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内正切等于1的角只有$\frac{\pi}{4}$，故得证。

注：本题若不把α、β、γ限制在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$内，则由

$tg(\alpha+\beta+\gamma)=1$和$\alpha+\beta+\gamma\in\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$，将不可能获得确定的答案$\frac{\pi}{4}$，而可能是$\frac{\pi}{4}$或$\frac{5\pi}{4}$。

3. 反三角函数的图像和性质

（1）由于函数$y=f(x)$的图像和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称。因此要作反三角函数图像时，只须首先作出它的原函数在相应的主值区间上的一段图像，然后利用关于直线$y=x$的对称关系，即可得到对应的反三角函数的图像。如教材第4页图1-3。

有关反三角函数的性质可以从图像上直观地看出，也可以利用原三角函数的性质推出。以$y=\sin x$为例，它的两个性质可证明如下：

① $y=\arcsin x$在$[-1, 1]$上是增函数。

*证：在$[-1, 1]$上任取x_1、x_2，且$x_1<x_2$，

则 $\sin y_1=x_1$、$\sin y_2=x_2$，而$\sin y_1<\sin y_2$，

$\because$ $y_1\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$y_2\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，又$\sin y$在此区间上是增函数。

$\therefore$ $y_1<y_2$。

故原命题成立。

② $y=\arcsin x$是奇函数。

*证：设$\arcsin(-x)=y$,

则 $\sin y'=-x=-\sin y=\sin(-y)$。

$\because$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$y'\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$且$-y'\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore\quad y' = -y,$

即 $\arcsin(-x) = -\arcsin x$。故$\arcsin x$是奇函数。

（2）有关反三角函数的概念、图像和性质，可用表格加以概括，其内容可包括图像、单调性、奇偶性和重要公式等。建议读者自行编制。

典型例题

这一大节的例题、习题，大致可分为以下两大类：

1. 巩固并加深理解概念的问题。如求已知自变量的反三角函数的值；用反三角函数表示适合某些条件的角；求反三角函数的定义域和值域；化简三角函数的反三角函数等。

2. 反三角函数的运算题。如求反三角函数的三角函数值；证有关反三角函数的恒等式；化简反三角函数的和、差、倍、分以及解简单的反三角函数方程等。

例1 求（1）$2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$；（2）$\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$；（3）$\operatorname{arcctg}(-3)$；（4）$\arccos\frac{\pi}{4}$的值。

答：（1）$\frac{2\pi}{3}$；（2）$-\frac{\pi}{9}$；（3）$180°-18°26'=161°34'$；（4）$\arccos\frac{\pi}{4}=\arccos 0.7854=38°51'$（注意本题不能等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$。为什么？）

例2 （1）由$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$能否写出$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$\frac{2\pi}{3}$？若不能，应怎样修改？

（2）能不能说$|\arcsin x|\leqslant 1$？

（3）由$y=\sin 3x$得$3x=\arcsin y$，$x=\frac{1}{3}\arcsin y$，所以$y=\sin 3x$的反函数是$y=\frac{1}{3}\arcsin x$。这种说法对吗？为什么？

解：（1）不能，$\because \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，

$$\therefore \quad \text{应改为}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}。$$

（2）不能，$\because\ \arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，

$$\therefore\ |\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

故不能说 $|\arcsin x|\leqslant 1$。

（3）不对，$\because x\in R$，$\therefore 3x\in R$，又$y\in[-1,\ 1]$，正弦函数从$(-\infty,\ +\infty)$到$[-1,\ 1]$上的映射不是一一映射，$\therefore y=\sin 3x$在整个定义域上无反函数．若取$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$，则原解法正确．

例3 用反三角函数表示适合下列条件的角．

（1）$\sin x=-\frac{1}{3}$，$\left[x\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)\right]$；（2）$\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\left[x\in\left(-4\pi,\ -\frac{7\pi}{2}\right)\right]$．

解：（1）$\because \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$，由题设$x\in\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore\ x=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$。

说明：①本题不能认为x是第三象限的角，就错误地写上$x=\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$，因$\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$是负锐角，$\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$实际上是钝角。

②本题也不能用$\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}$表示$x$，这是因为$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{3}\right)=-\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\neq-\frac{1}{3}$。

因此，做这类题必须正确运用诱导公式，在保证同名函数相等的条件下，根据角所在的区间选用$\pi\pm\alpha$、$-\alpha$、$2\pi-\alpha$和$2k\pi+\alpha$。

（2）$\because \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$x\in\left(-4\pi,-\frac{7\pi}{2}\right)$，

$$\therefore\quad x=-3\pi-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)。$$

例4 求下列函数的定义域和值域：

（1）$y=\arccos\frac{1}{2-x}$；　　（2）$y=4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$。

解：（1）要使原式有意义，只需

$$\begin{cases}-1\leqslant\frac{1}{2-x}\leqslant 1,\\ 2-x\neq 0。\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}\frac{3-x}{2-x}\geqslant 0,\\ \frac{x-1}{2-x}\leqslant 0,\\ x\neq 2。\end{cases}$$