数学奥林匹克

初中练习册

一年级·上

北京数学奥林匹克学校 主编

北京师范大学出版社

数学奥林匹克初中练习册

（一年级·上）

北京数学奥林匹克学校　主编

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克初中练习册　一年级・上/北京数学奥林
　匹克学校主编。
—北京:北京师范大学出版社,1994.6
ISBN　7-303-03544-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.北…　Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 10985 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875　北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787×1092　1/16　　印张:6.75　　字数:161 千
1994 年 5 月北京第 1 版　1996 年 1 月北京第 2 次印刷
印数:20001—30000 册
定价:5.70 元

《数学奥林匹克初中练习册》

编辑委员会

使用说明

北京数学奥林匹克学校(BMOS)成立于1985年,是全国第一家数学奥林匹克学校。它创立十年来在北京市教育局、北京市科协、北京数学会的关心支持和领导下,为丰富北京市中小学生的课外活动,促进教育教学改革,培养各类人才进行了积极的探索并取得了可喜的成绩。北京数学奥林匹克学校培养的中小学生在全国小学数学奥林匹克、全国初中数学联赛、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克(暨全国中学生数学冬令营)等全国性数学竞赛,以及北京市的各类数学竞赛中均取得了优异的成绩,并且有九人次入选国际数学奥林匹克(IMO)中国代表队,为国家争得了荣誉。

北京数学奥林匹克学校云集了一批来自科研单位、高等院校、教研部门以及中小学的骨干教师,他们经验丰富,积累了大量的资料并形成了有效的训练方法,这套《数学奥林匹克初中练习册》即是该校初中部的全体教练员根据中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》以及初中部教学计划集体编写而成的。

本套《练习册》共包括六个分册,分别供初一年级上、下学期,初二年级上、下学期和初三年级上、下学期使用。初一上下册、初二上下册及初三上册每册包括15个训练课题和5套综合练习。训练课题尽量以课内教学顺序为基础,力争与课堂教学同步进行,综合练习的题目则围绕15个课题选配,教师在指导学生使用时,可根据具体情况适当调整。初三下册包括10个训练课题、5套综合练习以及5套模拟试题(即近五年全国初中联赛试题),目的是为参加初中联赛的学生提供一个综合训练的机会。

由于时间仓促,练习册这种形式对我们来讲也是一种尝试,其中错误疏漏之处难免,希望广大的教师和同学们批评指正,以便我们修订时予以补救。

目　录

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习一　计算技巧

数学竞赛中的许多问题都离不开计算，而计算准确就不是一件容易办到的事，计算既迅速又准确是人人追求的目标．因此，在计算过程中寻求快捷的技巧，对于那些表面上看起来很繁杂，项数多，次数高，数值很大的题目，找到其中的规律，就需要我们细心的观察和大胆的探索．这部分内容涉及到的基础知识包括：

1．有理数的运算法则，运算顺序，运算律．

2．差相等的一列数通常采用倒序相加求和的方法．规律：如，$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots,a_2-a_1=a_3-a_2\cdots=a_n-a_{n-1}=d$，$S_n$ 表示前 n 项的和，$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$，n 表示项数，a_1 为第一项，a_n 为最后一项或第 n 项．

3．比相等的一列数，求和时采用错位相减的方法．如 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,S_n=\frac{a_1(1-q^n)^2}{1-q}$.

4．有些特殊的分式或整式的运算可以采用拆项相消的方法．如，

$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$；

$\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$；

$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$；

$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$.

以下可依此类推．

5．某些乘法公式的应用．如，

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，可变形为：$a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$.

6．其他常用的公式．如，

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n^2)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

一、选择题

1. 计算：$\dfrac{(-2)^3\times(-1)^5-13\div[-(\frac{1}{2})^2]}{0.125\times8+[1-3^2\times(-2)]}=($　　$)$.

(A)$\dfrac{26}{9}$；　(B)$\dfrac{19}{80}$；　(C)3；　(D)$\dfrac{1}{20}$.

2. 计算：$1+7+13+19+25+\cdots+409+415=($　　$)$.

(A)14352；　(B)14560；　(C)14768；　(D)14976.

3. 计算：$(1-\dfrac{1}{11^2})(1-\dfrac{1}{12^2})(1-\dfrac{1}{13^2})\cdots(1-\dfrac{1}{1994^2})=($　　$)$.

(A)$\dfrac{9975}{10956}$；　(B)$\dfrac{9975}{10967}$；　(C)$\dfrac{9985}{10967}$；　(D)$\dfrac{9965}{10967}$.

4. 计算：$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{3\times5}+\cdots+\dfrac{1}{18\times20}=($　　$)$.

(A)$\dfrac{531}{380}$；　(B)$\dfrac{1062}{380}$；　(C)$\dfrac{29}{40}$；　(D)$\dfrac{531}{760}$.

5. 计算：$1+\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\cdots+\dfrac{2\times1993+1}{2^{1993}}=($　　$)$.

(A)$6-\dfrac{3991}{2^{1993}}$；　(B)$3-\dfrac{3991}{2^{1994}}$；　(C)$6-\dfrac{3991}{2^{1994}}$；　(D)$3-\dfrac{3991}{2^{1993}}$.

6. 计算：$6\times7\times8+7\times8\times9+8\times9\times10+\cdots+20\times21\times22=($　　$)$.

(A)52710；　(B)210840；　(C)26355；　(D)105420.

7. 计算：$-1+3-5+7-9+11-\cdots-1989+1991-1993=($　　$)$.

(A)997；　(B)-996；　(C)996；　(D)-997.

8. 计算：$(1+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17})\times(\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{19})-(1+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{19})\times(\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17})=($　　$)$.

(A)$\dfrac{1}{11}$；　(B)$\dfrac{1}{13}$；　(C)$\dfrac{1}{17}$；　(D)$\dfrac{1}{19}$.

二、填空题

1. $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})}+\dfrac{\frac{1}{4}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{1993}}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{1993})}=$________.

2. 已知：$a=1993x+1994$，$b=1993x+1993$，$c=1993x+1992$. 求：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=$________.

3. 设 $a=1$，$b=19$，$c=199$，$d=1993$，则$(a+b+c-d)+(a+b-c+d)+(a-b+c+d)+(-a+b+c+d)=$________.

4. 设$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+\cdots+a_1x+a_0$，求 $a_5+a_3+a_1=$________.

5. 计算：$\underbrace{99\cdots9}_{n个}{}^2+1\underbrace{99\cdots9}_{n个}=$________.

6. 计算：$\left.1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cdots1-\cfrac{113}{355}}}}}\right\}1995层=$________.

7. 计算：$1991\times1992\times1993\times1994+1-(1992^2+1991)^2=$________.

8. 计算：$1994^2-1993^2+1992^2-1991^2+\cdots+101^2-100^2=$________.

三、解答题

1. * 表示一种运算符号，它的含义是 $x*y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+A)}$.

已知：$2*1=\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{(2+1)(1+A)}=\frac{2}{3}$，那么，1998 * 1999 的值是多少？

2. 计算：$1\frac{1}{3}+5+3\frac{1}{3}+7+5\frac{1}{3}+9+\cdots+1993\frac{1}{3}+1997$.

3. 四个连续自然数的倒数之和等于$\frac{19}{20}$，求这四个自然数的两两乘积之和.

4. 已知：$x^2-x+1=0$. 求 $x^{10}+x^{20}+x^{30}$的值.

5. 已知：a,b,c 为非负有理数且满足 $a^2+b^2+c^2=1$，$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=-3$. 求 $a+b+c$ 的值.

6. 已知：$x+\frac{1}{x}=a$. 求 $x^{14}+\frac{1}{x^{14}}$的值.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习二　有理数与绝对值

进入中学，引入负数，把数的概念扩充到有理数范围，整数和分数的统称叫有理数. 任何一个有理数都可以表示为一个既约分数$\frac{m}{n}$($n\neq0$，m、n 均为整数且互质). 有理数可以表示在数轴上，而数轴是规定了原点、正方向和长度单位的一条直线，所以在数轴上右边的点所表示的有理数总比左边的点所表示的有理数大，显示了有理数的有序性. 在任意两个有理数点之间还有无数多个有理数点. 有理数加、减、乘、除、乘方运算结果仍为有理数，在运算的过程中，满足加法和乘法的运算律.

绝对值是初一数学中非常重要的一个概念，因此它的变化就成为数学竞赛中经常出现的题目，一个数的绝对值记作$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$由定义可知，任何一个数的绝对值总是非负的，从几何上看，若数 a 在数轴上对应的点是 A，则$|a|$就是 A 点到原点的距离.

绝对值有如下的一些重要性质：

1. $|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant -a$.

2. 若$|a|=|b|$，则 $a=b$(a，b 同号)，$a=-b$(a，b 异号)或 $a=b=0$.

3. $|ab|=|a|\cdot|b|$，$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$. ($b\neq0$)

4. 若 $a>0$，$|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$.

$|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$.

在有理数范围内，a^2 与$|a|$一样，同样具有非负性. 非负数在解题中经常使用如下的性质：

1. 有限个非负数之和仍然是非负数.

2. 有限个非负数之和为零，则每一个非负数都等于零.

一、选择题

1. a 为有理数，下列说法中正确的是(　　).

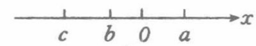
(A)$(a+\frac{1}{2})^2$ 是正数；　　(B)$a^2+\frac{1}{2}$是正数；

(C)$-(a-\frac{1}{2})^2$ 是负数；　　(D)$-a^2+\frac{1}{2}$的值不小于$\frac{1}{2}$.

2. 一个正分数的分子比分母小 1，若分母和分子都减去 1，则所得分数为小于$\frac{6}{7}$的正数，则这种分数共有(　　).

(A)5 个；　　(B)6 个；　　(C)7 个；　　(D)8 个.

3. 设有理数 a,b,c 在数轴上的对应点如下图所示，则 $|b-a|+|a+c|+|c-b|=$ (　　).



(A)$2c$；　　(B)$2a$；

(C)$-2c$；　　(D)$-2b$.

4. 已知 $|ab|+1-|a|-|b|=0$. 则(　　).

(A)$a=\pm 1$，b 为任意实数；

(B)$b=\pm 1$，a 为任意实数；

(C)$a=\pm 1$，b 为任意实数；或 $b=\pm 1$，a 为任意实数；

(D)a,b 的值不能确定.

5. 已知：$|x-1|+|x-5|=4$，则 x 的取值范围是(　　).

(A)$1\leqslant x\leqslant 5$；　　(B)$x\leqslant 1$；　　(C)$1<x<5$；　　(D)$x\geqslant 5$.

6. a,b,c 中至少有两个互为相反数，可表示为(　　).

(A)$a+b+c=0$；　　(B)$a^2=b^2=c^2$；

(C)$(a+b)(b+c)(c+a)=0$；　　(D)$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=0$.

7. n 是正整数，x 和 y 互为相反数，则下列各组数中，两个数仍然是互为相反数的是(　　).

(A)x^n 和 y^n；　　(B)x^{2n}和 y^{2n}；

(C)x^{2n-1}和 y^{2n-1}；　　(D)x^n和 y^{-n}.

8. 比较 $m=\dfrac{3^{1994}+1}{3^{1995}+1}$和 $n=\dfrac{3^{1995}+1}{3^{1996}+1}$的大小(　　).

(A)$m=n$；　　(B)$m>n$；　　(C)$m<n$；　　(D)不能确定.

二、填空题

1. 已知：$|x-y|=y-x$ 且 $|x|=3$，$|y|=4$，那么 $(x+y)^3=$________.

2. 如果 $y=|x+1|-2|x|+|x-2|$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 2$，那么，y 的最大值是________.

3. 已知：$|x-3|+(2x-y)^2=0$. 则 $\dfrac{x^2+xy-y^2}{2x^2+xy+3y^2}=$________.

4. 若 $x<0$，则 $\dfrac{||x|-2x|}{3}=$________.

5. 已知：m 是有理数，则 $|m-2|+|m-4|+|m-6|+|m-8|$ 的最小值为________.

6. 不论 x 取什么数，若分式 $\dfrac{ax+3}{bx+5}$(分母不为零)的值都为同一个定值，则 a,b 应满足的条件是________.

7. 化简：$(x+|x|)+(x-|x|)+x\cdot|x|+\dfrac{x}{|x|}=$________.

8. 已知：$|ab|+|a+b|-1$，则整数对 (a,b) 的个数是________.

三、解答题

1. 化简：$||x-1|-2|+|x+1|$.

2. 7个学生面朝南站成一排，(1)若每次准许3个学生向后转，最少转几次，可使7个学生都面朝北？(2)若每次只有4个学生向后转，经过有限次后，能否使7个学生都面朝北？

3. 有一无穷小数$A=0.a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}a_{a+2}\cdots$，其中$a_i(i=1,2\cdots)$是数字，并且$a_1$是奇数，$a_2$是偶数，$a_3$等于$a_1+a_2$的个位数，$a_4$等于$a_2+a_3$的个位数，……$a_{n+2}$等于$a_n+a_{n+1}(n=1,2,\cdots\cdots)$的个位数. 求证：$A$是有理数.

4. 已知：$|2y-a|=axy-x^2-\frac{x^2y^2}{4}$.

(1)求证：不论 a 为何值时，总有 $y^2=x$ 成立.

(2)当 a 为何值时，$|x|=|y|$ 成立？

5. 解方程：$||||x|-2|-1|-2|=2$.

6. 解不等式：$||x+3|-|x-1||>2$.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习三　一元一次方程

方程是代数中的重要内容，在竞赛中常会有各种方程的变形问题. 但不管多么复杂的方程问题都要通过消元、换元、因式分解等方法，使之最后化为一元一次方程或一元二次方程. 因此，熟练地掌握一元一次方程的解法显然是很重要的，除解方程外，在竞赛中还常遇到关于方程的讨论问题，一次方程的最简形式为：$ax=b$.

(1)当 $a\neq0$ 时，方程有唯一解，$x=\dfrac{b}{a}$；

(2)当 $a=0,b=0$ 时，解为一切实数；

(3)当 $a=0,b\neq0$ 时，方程无解.

一、选择题

1. 方程 $x-1=4$ 与方程 $2x=10$ 是同解方程是指(　　).

(A)这两个方程的解法相同；

(B)这两个方程相等，可用等号连接起来；

(C)每一个方程的解都是另一个方程的解；

(D)第一个方程的解都是第二个方程的解.

2. 如果 a,b 为不超过 10 的自然数，那么能使方程 $ax=b$ 的解大于$\dfrac{1}{3}$而小于$\dfrac{1}{2}$的 a、b 的值是(　　).

(A)3 组；　(B)4 组；　(C)5 组；　(D)6 组.

3. 方程$|x-7|-|3x+5|=2$ 的解有(　　).

(A)1 个；　(B)2 个；　(C)3 个；　(D)无数多个.

4. 如果实数 x 满足方程$|2-x|=2+|x|$，那么$|2-x|$等于(　　).

(A)$\pm(x-2)$；　(B)1；　(C)$2-x$；　(D)$x-2$.

5. 方程$|2x-1|+|x-2|=|x+1|$的实数解的个数是(　　).

(A)0；　(B)2；　(C)3；　(D)无穷多.

6. 若关于 x 的方程$||x-2|-1|=a$ 有三个整数解，则 a 的值是(　　).

(A)0；　(B)1；　(C)2；　(D)3.

7. $[x]$表示取数 x 的整数部分，如$[\dfrac{15}{4}]=3$ 等，若 $y=4(\dfrac{x+[u]}{4}-[\dfrac{x+[u]}{4}])$且当

$x=1,8,11,14$ 时，$y=1$；

$x=2,5,12,15$ 时，$y=2$；

$x=3,6,9,16$ 时，$y=3$；

$x=4,7,10,13$ 时，$y=0$.

则表达式中的 u 等于(　　).

(A)$\frac{x+2}{4}$;　　(B)$\frac{x+1}{4}$;　　(C)$\frac{x}{4}$;　　(D)$\frac{x-1}{4}$.

8. 方程 $px+q=333$ 的解是 1,且 p,q 为质数,$p<q$,则 p 等于(　　).

(A)2;　　(B)3;　　(C)7;　　(D)13.

二、填空题

1. 已知方程 $2(x+1)=3(x-1)$ 的解为 $a+2$,求方程 $2[2(x+3)-3(x-a)]=3a$ 的解为________.

2. 方程 $|x-|2x+1||=3$ 的所有解之和是________.

3. 若 $x^2-x-1=0$,则 $1995+2x-x^3=$________.

4. 若 n 为自然数,则使 $\frac{n(n+1)}{2}-1$ 的值是质数的 n 的值为________.

5. 若 x,y 只能取 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 中的数且 $3x-2y=1$,则代数式 $10x+y$ 可以取到____个不同的值,其值为________.

6. 方程 $|x-2|+|x|=6$ 的解为________.

7. 设 $x=8$ 是方程 $3x-2=\frac{x}{4}+2a$ 的解,a 又是方程 $x-\frac{1}{3}[x-\frac{1}{3}(x-b)]=\frac{1}{9}(x+b)$ 的解,则 b 的值是________.

8. 金块放水里称重时,要减轻本身重量的 $\frac{1}{19}$,银块放在水里称重量时要减轻本身重量的 $\frac{1}{10}$,一块金与银的合金重 530 克,在水里称重时,减轻了 35 克,则这块合金含有金________克,银________克.

三、解答题

1. 解关于 x 的方程 $(mx-n)(m+n)=0$.

2. 如果方程$(m-4)x+n=-nx+m-2$有无穷多个解，求m、n的值.

3. 求关于x的方程$2(a-1)(a-2)x+4(3a-1)x=a^2+6a$的解.

4. 若方程$||x-2|-1|=a$，①有两个解，②有三个解，③有四个解. 试分别求出a值或a的取值范围.