高中代数

第二册

教法 学法 考法

徐望根
徐建球 静文编著

三环出版社

高中一年二期卷

教法　学法　考法

高中代数　第二册

徐望根　徐建球　静　文　编著

三　环　出　版　社

责任编辑　刘文武
封面设计　苏彦斌

教法　学法　考法

高中代数第二册

徐望根　徐建球　静　文　编著

三环出版社出版
（海口市滨海大道花园新村20号）
新华书店首都发行所发行
河北省乐亭县印刷厂印刷

787×1092mm　1／32　印张12.125　字数252千字
1992年2月第1版　1992年2月第1次印刷
标准书号：ISBN 7-80564-810-7／G·568
印数　1—10000册
定价：5.20元　　高中一年二期总定价：31.50元

前　言

教法、学法、考法是教育界的热点问题，“方法”虽然是一种手段，但却是达到最佳彼岸的桥梁。对此，关心教育的理论界和广大教师，潜心研究探讨，新的认识和理论成果层出不穷。广大学生也经常议论，为了提高学习效果，寄希望于良师的指点。

教法、学法、考法是系统工程，三者是不可分的整体，相互制约，相互依存，相互促进。

教学过程是师生双边活动的统一过程。教学活动的中心是学生，教和学都是为了尽快地增长知识，增长才干。教学活动的主体是学生，学生要经过自己的思维和实践，才能最后牢固地掌握知识，发展思维，提高能力，去认识世界改造世界。因此依据教学对象，选择科学的教学方法，缩短师生认识上的距离，以激发学生学习的积极性和主动性，及时满足全体学生对知识的渴求。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和在学习过程中的心理活动，指导学生的学习方法，使教与学达到和谐统一，教学活动适应于学生的认识规律；学习活动适应于教学规律。考法是教与学的评价手段，最优的考法，无疑能激发师生的积极性，促进教学效果与学习效果的提高。

教学、学习和考试本应是一体的。教学和学习不是为了应考，复习考试也不应当脱离平日的教与学而搞突击。有丰富经验的教师是靠教学目标，形成知识结构和教学结构，靠能力的培养，发展学生的思维，指导学生进行素质和水平的

训练，并不断取得师生双方的反馈，进一步调整和发展教学过程。这些教师所教的学生基本知识扎实，能力较强，能举一反三，善于作知识迁移和应用，因此参加各种合格考试和选拔考试，成绩都是好的、稳定的。本书正是这种教与学方法的指导和研究。

基于上述认识，现组织部分教师，把他们多年的教学经验与理论研讨相融合，孕育出一套《教法·学法·考法》丛书，旨在促进教与学最优状态的形成，帮助学生有效地掌握学习。

该丛书，根据各科特点，按照知识结构顺序分块编写。每块知识内容，设有“教学目标”，“教法研讨”，“学法指导”，“解题方法”“考法探索”等栏目。所有内容都适于广大青少年的自学和阅读。

阅读“教学目标”，能了解学习要求。

阅读“教法研讨”，能了解教师怎样传授知识。

阅读“学法指导”，能知道怎样学习更加有效。

阅读“解题方法”，能知道怎样应用基础知识去分析解答书面问题。

阅读“考法探索”，可以进行学习的自我评价。

该丛书是在特级教师、北京景山学校校长崔孟明同志指导下编写的。作为新课题的尝试，一定有很多不足之处，欢迎同志们指正。

编　者

1991.0 .10

目　录

第二单元　数学归纳法

第三章　不等式

第四章　复　数

目　　录

第一章　反三角函数和简单三角方程

第一单元　反三角函数

〔教学目标〕

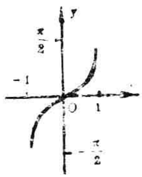
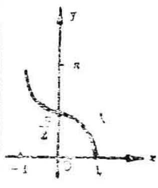
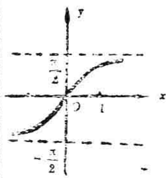
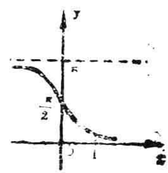
本栏目用知识与能力的双向细目表进行概括。

知识点	知识与能力双向要求	能力水平		
		记忆理解	应用	分析综合
反三角函数定义与性质	1．从概念的系统中弄清反三角函数的定义	✓		
	2．弄清反三角函数符号的含义	✓		
	3，弄清反三角函数的定义域区间和值域区间	✓	✓	
	4，从定义的理解中记忆恒等式 $\sin(\arcsin x)=x$ 等	✓	✓	
	5，用双重原则理解和记忆奇偶性的四个恒等式	✓	✓	

	6，会结合图象研究反三角函数的性质，并结合图象和性质，解有关基本题	√	
反三角函数计算	1．会求反三角函数的值	√	
	2．会进行反三角函数的三角函数运算解法	√	√
	3．会进行三角函数的反三角函数运算解法	√	√
	4．会求一些与反三角函数有关的综合题		√

〔教法研讨〕

（一）知识脉络

反三角函数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y=\mathrm{arcctg}\,x$
定义	正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数叫反正弦函数	余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数叫反余弦函数	正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数叫反正切函数	余切函数 $y=\mathrm{ctg}\,x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数叫反余切函数
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
图象				
最值	$y_{最小}=-\frac{\pi}{2}$ $(x=-1)$ $y_{最大}=\frac{\pi}{2}$ $(x=1)$	$y_{最小}=0$ $(x=1)$ $y_{最大}=\pi$ $(x=-1)$	无	无
基本关系式	$\sin(\arcsin x)=x$ $(x\in[-1,1])$；$\arcsin(-x)=-\arcsin x$ $(x\in[-1,1])$	$\cos(\arccos x)=x$ $(x\in[-1,1])$；$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$ $(x\in[-1,1])$	$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\,x)=x$ $(x\in R)$；$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x$ $(x\in R)$	$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x)=x$ $(x\in R)$；$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}\,x$ $(x\in R)$
性质	增函数；奇函数	减函数；非奇非偶函数	增函数；奇函数	减函数 非奇非偶函数

（二）教材简析

本单元的重点是：反三角函数的概念、图象和性质。

本单元的难点是：反三角函数概念的建立及其符号的意义。

1．概念的建立

在学习反三角函数时，应重新来分析三角函数的新情况：三角函数都是一个特殊的映射，但在整个定义域上都不是一一映射，因此在整个定义域内都不存在反函数，但如果把定义域限制到一个合适的分区间上，可以使之成为一一映射，而一一映射必有逆映射存在，然后由逆映射来确定反三角函数。

从三角函数到反三角函数的简要过程如下：

三角函数 — 映射 — 一一映射 — 逆映射 — 反三角函数

根据上述过程的共性，教学重点应放在反正弦函数概念的建立上面。

2、分区间的选取

当选取分区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 确定 $y=\sin x$ 的反正弦函数时，它具备了：

（1）对于 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的每一个值，$y=\sin x$ 有唯一的值和它对应。

（2）对于x的不同的值，y有不同的值和x对应。

（3）当x由 $-\frac{\pi}{2}$增大到$\frac{\pi}{2}$时，y由-1增大到$+1$，也就是说，正弦函数可取得它能够取得的一切值。

这三点说明了确定函数$y=\sin x$（$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$）的映射正是区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$到$[-1,1]$上的一一映射。

其实，$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$不过是正弦函数$y=\sin x$的一个单调区间，而具备上述一一映射的单调区间可以有$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$或$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$（$k\in Z$），那么为什么要从中选取$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$呢？这是因为它还具备下面的优点：

（1）是绝对值最小的取值集合；

（2）其中包含一切正锐角。

这两点，对于研究有关的三角问题（如三角方程等）和平面几何中角的表示问题带来方便（钝角可用π减去正锐角或$\frac{\pi}{2}$加上正锐角表示），正因为这样，当确定$y=\sin x$的反函数时，取区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，而不取$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$等。

同样，当确定$y=\cos x$、$y=\mathrm{tg}\,x$、$y=\mathrm{ctg}\,x$的反函数时，分别取区间$[0,\pi]$、$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、$(0,\pi)$，

而不取 $[-\pi,\ 0]$、$(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2})$、$(-\pi,\ 0)$ 等。

3．符号的含义

符号 $\arcsin x$ 的含义：

（1）这里的 x 应适合 $|x| \leqslant 1$。

例如式子 $\arcsin\frac{3}{4}$ 有意义，而 $\arcsin\frac{4}{3}$ 无意义。

（2）当 $|x| \leqslant 1$ 时，$\arcsin x$ 表示一个角。

例如等式 $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ 成立。

（3）当 $|x| \leqslant 1$ 时，角 $\arcsin x$ 的弧度数应属于区间 $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$，即 $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$。

例如当写成 $\arcsin x = m$ 时，应想到

$|x| \leqslant 1$　且 $m \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$。

又如存在 x，使 $\arcsin x=\frac{3}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$；不存在 x，使 $\arcsin x = 2$，因为 $2 \notin [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$。

（4）根据反正弦函数的定义，当 $|x| \leqslant 1$ 时，这个角 $\arcsin x$ 的正弦等于 x，即

$$\sin(\arcsin x)=x。$$

例如等式 $\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是成立的，而等式 $\sin(\arcsin\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 是无意义的。

同样，对于符号 $\arccos x$、$\operatorname{arctg} x$、$\operatorname{arcctg} x$ 的意义

可作相应的解释。

4．图象的功用

在课本上反三角函数的基本性质是从反三角函数的图象中归纳出来的，不少问题还可以通过图象来理解，可见掌握反三角函数的图象是十分重要的。

我们知道，函数的图象与其反函数的图象是关于直线 $y=x$ 对称的，因此，通过三角函数的图象可以画出反三角函数的图象。由此看出：

（1）从曲线的变化范围可归纳出反三角函数的定义域和值域；

（2）从曲线的上升和下降可归纳出反三角函数的单调性；

（3）从曲线关于 y 轴或原点的对称性可归纳出反三角函数的奇偶性。至于下列等式：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,$$

$$\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x,$$

$$\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}\,x,$$

可以通过证明，也可以通过在图象上直接验证而加深理解。

（三）教法建议

可采用单元教学法，以反正弦函数的概念为重点，带动其他三个反三角函数。对于反正弦函数的教学 要以旧带新，逐步引深，旧内容是映射、一一映射、逆映射、反函数和正弦函数，新内容是反正弦函数的概念，按正弦函数——一一映射——逆映射——反正弦函数这条主线的顺序进行，在

教学中，要沿着主线顺序，逐步展开引深，以建立反正弦函数概念，并自始自终要做到形数结合，利用图象进行讲解。

本单元的教法简述如下：

1．反三角函数概念的建立

以反正弦函数为例，从正弦函数不存在反函数出发，按照上面主线的顺序，建立反正弦函数的概念，并引进反正弦函数的符号$\arcsin x$及恒等式$\sin(\arcsin x)=x$。通过比较对照，再建立其他三个反三角函数。

（1）在建立反正弦函数概念的过程中，要顺次复习有关的旧内容，用提问方式来启发学生。

（2）做到形数结合：从$y=\sin x$的图象出发，重点讲清"确定函数$y=\sin x$（$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$）的映射是区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$到$[-1,1]$上的一一映射，所以这个映射有逆映射，因此函数$y=\sin x$（$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$）有反函数"这句关键性的话，其中包括为什么要选取区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$。

（3）要弄清符号的含义，用提问的方式选编浅易的正反两方面的例子进行对照，以加深对符号$\arcsin x$的认识。

（4）安排好板书位置及预先画好图象，通过比较、对照三角函数的四个图象，用彩色粉笔勾出图象的关键部分：

$$y=\sin x\ \left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right),$$