信息光学理论与应用

习题详解

王仕璠　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

信息光学理论与应用习题详解

王仕璠　编著

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是根据王仕璠所编著的教材《信息光学理论与应用》(第 3 版)各章中的思考题和习题所做的详尽解答。原教材第 2 版曾被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材，并被教育部评为“2009 年度普通高等教育精品教材”，受到使用本教材的广大师生的欢迎。在原教材第 2 版中，习题解答是作为附录列在书末的，这次准备第 3 版时，将习题解答部分从教材中剥离出来，并作了适当的添加和完善，同时补充了思考题解答，独立成书。考虑到基本内容的完备性，各章又适当添加了信息光学的基本原理和相关公式。全书共 10 章，内容包括：二维傅里叶分析、标量衍射理论、光学成像系统的频率特性、部分相干理论、光学全息照相、空间滤波、相干光学处理、非相干光学处理、信息光学在计量学和光通信中的应用等。

本书概念清晰，对问题分析透彻，有助于读者深入领会教材中所讨论的内容，并用于解决具体问题，是对教材《信息光学理论与应用》的一本很好的补充读物。

本书读者对象为光学、光学工程、光信息科学与技术、应用物理、精密仪器等专业的高年级本科生和研究生，本书也可供相关专业的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信息光学理论与应用习题详解/王仕璠编著. --北京：北京邮电大学出版社，2013. 4

ISBN 978-7-5635-3420-3

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①信息光学—高等学校—题解 Ⅳ. ①O438-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 029667 号

书　　　名：信息光学理论与应用习题解答
著作责任者：王仕璠　编著
责 任 编 辑：李欣一
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发　行　部：电话：62282185　传真：62283578
E-mail：publish@bupt. edu. cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：北京鑫丰华彩印有限公司
开　　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　　张：12. 25
字　　　数：317 千字
印　　　数：1—3 000 册
版　　　次：2013 年 4 月第 1 版　2013 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3420-3　　定　价：25. 00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

本书是为作者撰写的教材《信息光学理论与应用》(第3版)各章中的思考题和习题所做的详尽解答。原教材第2版曾被列入普通高等教育"十一五"国家级规划教材,并被教育部评为"2009年度普通高等教育精品教材",受到使用本教材的广大师生的欢迎。在原教材第2版中,习题解答是作为附录列在书末的,这次准备第3版时,根据作者近几年的教学实践,并接受了读者的建议,将原教材的习题解答部分从教材中剥离出来,作了适当的添加和完善,同时补充了思考题解答,独立成书。考虑到基本内容的完备性,各章又适当添加了信息光学的基本原理与相关公式。总体格调和布局与教材各章一致。希望这样做有助于读者深入领会教材中所讨论的内容,并用于解决具体问题,使其成为教材《信息光学理论与应用》的一本很好的补充读物。

作者在多年的教学过程中以及撰写本书时,曾参考了国内外专家已出版的多部相关教材和习题集,并从中获得很多教益。在此,特向这些教材和习题集的作者们(恕不一一列出)致以深切的谢意!

最后,衷心感谢北京邮电大学出版社对本书出版给予的支持!衷心感谢采用《信息光学理论与应用》一书做教材的各兄弟高校的同行们!衷心感谢多年来听我讲授过"信息光学"课程的学生们!是你们孜孜不倦的求知精神,激发了我的教学和写作热情。

书中缺点和错误,恳请使用本书的读者批评指正!

作者谨识　2013年1月

目　　录

第 1 章　二维傅里叶分析

1.1　基本原理与相关公式

1.1.1　一些常用的非初等函数

1. 矩形函数

一维情形(如图 1.1.1 所示)

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant a/2(\text{设 } a>0)\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.1}$$

二维情形(如图 1.1.2 所示)

$$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant\dfrac{a}{2},|y|\leqslant\dfrac{b}{2}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\text{设 } a,b>0) \tag{1.1.2}$$

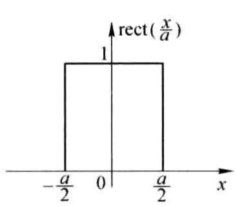


图 1.1.1　一维矩形函数

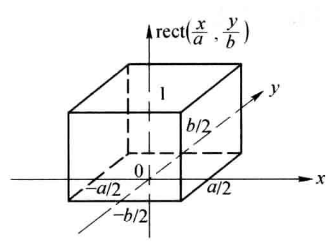


图 1.1.2　二维矩形函数

应用:各表示单缝和矩孔的透过率。

2. sinc 函数

一维情形(如图 1.1.3 所示)

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a} \tag{1.1.3}$$

二维情形(如图 1.1.4 所示)

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\mathrm{sinc}\left(\frac{y}{b}\right) \tag{1.1.4}$$

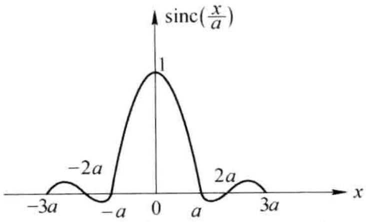


图 1.1.3　一维 sinc 函数

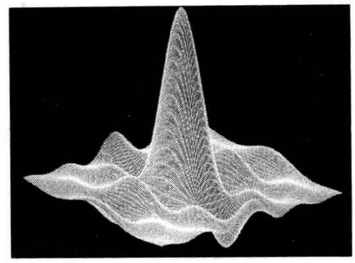


图 1.1.4　二维 sinc 函数

应用：表示单缝（一维情形）或矩孔（二维情形）夫琅和费衍射的光场振幅分布，其平方表示衍射图样。

3. 阶跃函数

一维情形（如图 1.1.5 所示）

$$\operatorname{step}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1 & x/a>0\\ 1/2 & x/a=0 \quad (\text{设 } a>0)\\ 0 & x/a<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

二维情形（如图 1.1.6 所示）

$$f(x,y)=\operatorname{step}(x) \tag{1.1.6}$$

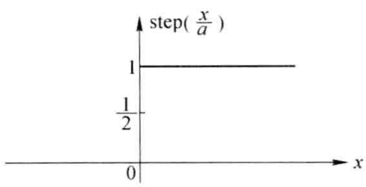


图 1.1.5　一维阶跃函数

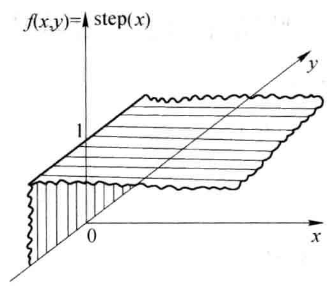
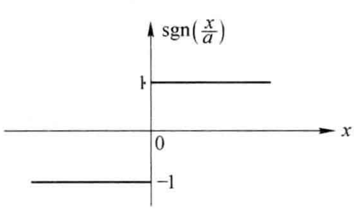


图 1.1.6　二维阶跃函数

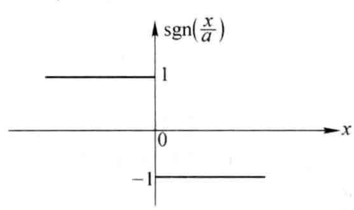
应用：开关功能，可在某点开启或关闭另一函数，或描述光学直边（或刀口）的透过率。

4. 符号函数（如图 1.1.7 所示）

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}+1 & x/a>0\\ 0 & x/a=0\\ -1 & x/a<0\end{cases} \tag{1.1.7}$$



(a) $a>0$



(b) $a<0$

图 1.1.7　符号函数

应用：表示函数极性发生翻转（孔径一半嵌入 π 位相版）。

阶跃函数与符号函数的关系：

$$\operatorname{sgn}(x)=2\operatorname{step}(x)-1 \tag{1.1.8}$$

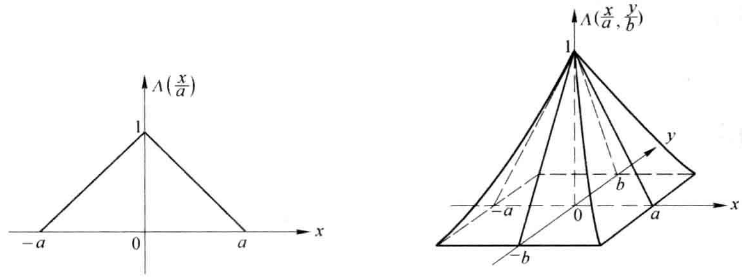
5. 三角形函数

一维情形〔如图 1.1.8(a)所示〕

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1-|x|/a & |x|/a<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.9}$$

二维情形〔如图 1.1.8(b)所示〕

$$\Lambda\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\Lambda\left(\frac{y}{b}\right)=\begin{cases}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)\left(1-\frac{|y|}{b}\right) & \frac{|x|}{a},\frac{|y|}{b}<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.10}$$



(a) 一维情形　　(b) 二维情形

图 1.1.8　三角形函数

应用:二维三角形函数表示光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数。

6. 高斯函数

一维情形〔如图 1.1.9(a)所示〕

$$\mathrm{Gauss}\left(\frac{x}{a}\right)=\mathrm{e}^{-\pi(x/a)^2} \tag{1.1.11}$$

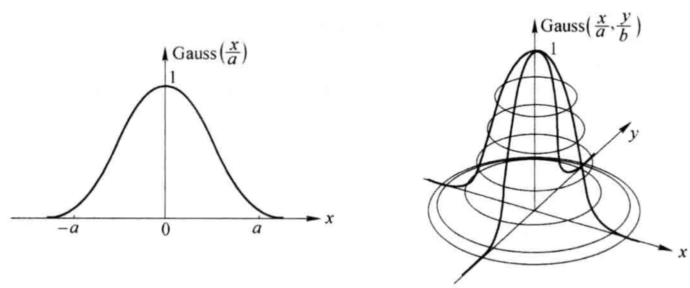
二维情形〔如图 1.1.9(b)所示〕

$$\mathrm{Gauss}\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)=\exp\left\{-\pi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]\right\} \tag{1.1.12}$$

$$\xrightarrow{a=b=1}\mathrm{Gauss}(x,y)=\mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)} \tag{1.1.13}$$

或令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,有

$$\mathrm{Gauss}(r)=\mathrm{e}^{-\pi r^2} \tag{1.1.14}$$



(a) 一维情形　　(b) 二维情形

图 1.1.9　高斯函数

应用:描述激光器发出的高斯光束,有时也用于光学信息处理中的“切趾术”。

7. 圆域函数(如图 1.1.10 所示)

$$\mathrm{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right)=\begin{cases}1 & r=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant r_0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1.1.15}$$

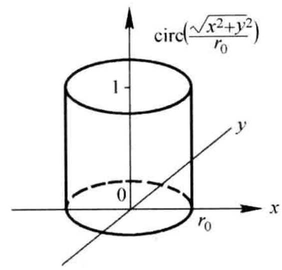


图 1.1.10 圆域函数

应用：表示圆孔的透过率。

1.1.2 δ函数

1. δ函数的定义

定义 1（积分表达式）

$$\begin{cases}\delta(x-x_0,y-y_0)=\begin{cases}\infty & x=x_0,y=y_0\\ 0 & 其他\end{cases}\\ \iint_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{cases}\tag{1.1.16}$$

定义 2（函数序列表达式）

若存在函数序列 $f_N(x,y)$，且满足条件：

$$\begin{cases}\lim\limits_{N\to\infty} f_N(x,y)=\begin{cases}\infty & x=0,y=0\\ 0 & 其他\end{cases}\\ \lim\limits_{N\to\infty}\iint_{-\infty}^{\infty} f_N(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{cases}\tag{1.1.17}$$

则

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty} f_N(x,y)$$

几种表示 δ 函数的函数序列列于表 1.1.1。

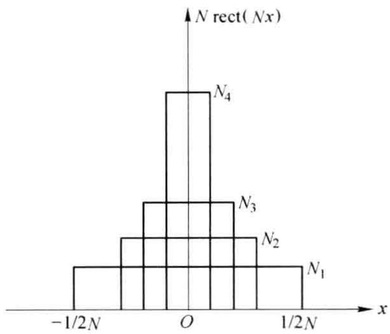
表 1.1.1 几种表示 δ 函数的函数序列

函数	一维	二维
矩形函数	$\delta(x)=\lim\limits_{N\to\infty}N\mathrm{rect}(Nx)$	$\delta(x,y)=\lim\limits_{N\to\infty}N^2\mathrm{rect}(Nx)\mathrm{rect}(Ny)$
高斯函数	$\delta(x)=\lim\limits_{N\to\infty}N\exp(-N^2\pi x^2)$	$\delta(x,y)=\lim\limits_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)$
sinc 函数	$\delta(x)=\lim\limits_{N\to\infty}N\mathrm{sinc}(Nx)$	$\delta(x,y)=\lim\limits_{N\to\infty}N^2\mathrm{sinc}(Nx)\mathrm{sinc}(Ny)$
圆域函数		$\delta(x,y)=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{N^2}{\pi}\mathrm{circ}(N\sqrt{x^2+y^2})$
贝塞尔函数		$\delta(x,y)=\lim\limits_{N\to\infty}N\frac{\mathrm{J}_1(2\pi N\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

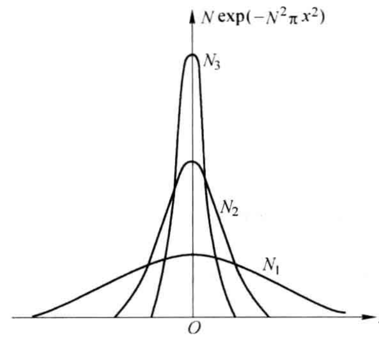
图 1.1.11 绘出两种表示 δ 函数的函数序列图形。随着 N 的增大，所取的矩形函数和高斯函数对应的曲线变得越来越窄，峰值则越来越高，而曲线覆盖的面积始终保持等于 1。当 $N\to\infty$时，函数曲线趋于无穷大。

2. δ函数的物理意义

表示单位光通量的点光源的面发光度或平行光通过透镜后，在后焦面上的照度分布。



(a) 矩形脉冲序列



(b) 高斯脉冲序列

图 1.1.11　两种表示 δ 函数的函数序列图形

3. δ 函数的性质

① 筛选特性　若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则有

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0,y_0) \tag{1.1.18}$$

② 可分离变量　在直角坐标系下，有

$$\delta(x-x_0,y-y_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{1.1.19}$$

在极坐标下

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r}\cdot\delta(\theta-\theta_0) \quad r_0>0,0<\theta_0<2\pi \tag{1.1.20}$$

同时有

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\delta(r-r_0)\mathrm{d}r=1 & r_0>0\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\delta(\theta-\theta_0)\mathrm{d}\theta=1 & 0<\theta_0<2\pi\end{cases} \tag{1.1.21}$$

③ 乘法性质　若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则有

$$f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0) \tag{1.1.22}$$

推论：

- $f(x,y)\delta(x,y)=f(0,0)\delta(x,y)$；　$x\delta(x)=0$
- $\delta(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)=0 \quad (x_0\neq 0,y_0\neq 0)$
- $\delta(x,y)\delta(x,y)$　无定义

④ 坐标缩放　设 a、b 为任意实常数，则有

$$\delta(ax,by)=\frac{1}{|ab|}\delta(x,y) \tag{1.1.23}$$

推论：

- $\delta(ax-x_0)=\dfrac{1}{|a|}\delta\left(x-\dfrac{x_0}{a}\right)$　(1.1.24)
- $\delta(-x)=\delta(x)$　(1.1.25)

故 δ 函数是偶函数。

⑤ 积分形式

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega,\quad \delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.1.26}$$

⑥ 微分形式　引入符号 $\delta^{(m)}(x)=\dfrac{\mathrm{d}^{(m)}\delta(x)}{\mathrm{d}x^m}$，则有

$$\delta^{(1)}(x)=0 \tag{1.1.27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(1)}(x)\mathrm{d}x=0 \quad\rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(m)}(x)\mathrm{d}x=0 \quad m>0 \tag{1.1.28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(1)}(x)f(x)\mathrm{d}x=-f^{(1)}(0)\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(m)}(x)f(x)\mathrm{d}x=(-1)^m f^{(m)}(0) \tag{1.1.29}$$

式中，$f(x)$有界且在 $x=0$ 处至少可微 m 次。

$$x\delta^{(1)}(x)=-\delta(x) \tag{1.1.30}$$

$$\frac{(-1)^m x^m}{m!}\delta^{(m)}(x)=\delta(x) \tag{1.1.31}$$

4. 梳状函数

一维情形

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{x_0}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{x}{x_0}-n\right)=x_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nx_0) \tag{1.1.32}$$

二维情形

$$\mathrm{comb}\left(\frac{x}{x_0},\frac{y}{y_0}\right)=x_0 y_0\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\delta(x-mx_0,y-ny_0) \tag{1.1.33}$$

5. 梳状函数与普通函数的乘积

$$f(x,y)\mathrm{comb}\left(\frac{x}{x_0},\frac{y}{y_0}\right)=x_0 y_0\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}f(mx_0,ny_0)\delta(x-mx_0,y-ny_0) \tag{1.1.34}$$

应用：表示光栅（一维情形）或针孔面阵（二维情形）的透过率，或对图像做等间隔采样。

1.1.3　卷积与相关

1. 卷积的定义

一维情形

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)h(x-\xi)\mathrm{d}\xi=f(x)*h(x) \tag{1.1.35}$$

二维情形

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=f(x,y)*h(x,y) \tag{1.1.36}$$

2. 卷积的物理意义和几何意义

物理意义：像强度分布是物强度分布与单位强度点光源对应的像强度分布的卷积。

几何意义：采用图解分析法，卷积过程可分为 4 个步骤，即折叠、位移、相乘、积分。

3. 卷积的运算性质

① 线性性质　设 a、b 为任意常数，则

$$\begin{aligned}&[af(x,y)+bh(x,y)]*g(x,y)\\&=af(x,y)*g(x,y)+bh(x,y)*g(x,y)\end{aligned} \tag{1.1.37}$$

② 可分离变量

若 $f(x,y)=f_x(x)f_y(y)$，$h(x,y)=h_x(x)h_y(y)$，则

$$f(x,y)*h(x,y)=f_x(x)*h_x(x)\cdot f_y(y)*h_y(y) \tag{1.1.38}$$

③ 卷积符合交换律

$$f(x,y) * h(x,y)=h(x,y) * f(x,y) \tag{1.1.39}$$

④ 卷积符合结合律

$$[f(x,y) * h_1(x,y)] * h_2(x,y)=f(x,y) * [h_1(x,y) * h_2(x,y)] \tag{1.1.40}$$

⑤ 卷积位移不变性

若 $f(x,y) * h(x,y)=g(x,y)$，则

$$\begin{aligned} f(x-x_0,y-y_0) * h(x,y) &= f(x,y) * h(x-x_0,y-y_0) \\ &= g(x-x_0,y-y_0) \end{aligned} \tag{1.1.41}$$

⑥ 函数 $f(x,y)$ 与 δ 函数的卷积

$$f(x,y) * \delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0) \tag{1.1.42}$$

4. 互相关的定义

两个复函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的互相关定义为

$$f(x,y) \otimes g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi,\eta)g(x+\xi,y+\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.1.43}$$

或

$$f(x,y) \otimes g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi-x,\eta-y)g(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.1.44}$$

应用：表示两个信号间存在多少相似性或关联性的量度。

5. 互相关的运算性质

① 互相关与卷积的联系：

$$f(x)\otimes g(x)=f^*(-x) * g(x) \tag{1.1.45}$$

② 互相关不满足交换律：

$$f(x)\otimes g(x)\neq g(x)\otimes f(x) \tag{1.1.46}$$

但有

$$f(x)\otimes g(x)=g^*(-x)\otimes f^*(-x) \tag{1.1.47}$$

6. 自相关定义

$$f(x,y) \otimes f(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi,\eta)f(x+\xi,y+\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.1.48}$$

或

$$f(x,y) \otimes f(x,y) = \int\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\xi-x,\eta-y)f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1.1.49}$$

应用：表示两个相同函数图像重叠程度的量度。

7. 自相关的性质

① 自相关函数具有厄米特对称性：

$$f(x,y)\otimes f(x,y)=f^*(-x,-y)\otimes f^*(-x,-y) \tag{1.1.50}$$

当 $f(x,y)$ 是实函数时，其自相关是实偶函数。

② 自相关函数的模在原点处有最大值：

$$|f(x,y)\otimes f(x,y)|\leqslant f(0,0)\otimes f(0,0) \tag{1.1.51}$$

1.1.4 傅里叶变换

1. 定义式

复函数 $f(x,y)$ 的傅里叶变换定义为

$$\begin{cases} F(f_x,f_y) = \mathscr{F}\{f(x,y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ f(x,y) = \mathscr{F}^{-1}\{F(f_x,f_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(f_x x+f_y y)}\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \end{cases} \tag{1.1.52}$$

式中，$F(f_x,f_y)$ 叫像函数，$f(x,y)$ 叫原函数，两者构成傅里叶变换对：

$$f(x,y) \leftrightarrow F(f_x,f_y) \tag{1.1.53}$$

2. 傅里叶变换基本定理

① 线性定理　设 a、b 为任意常数，则

$$\mathscr{F}\{af(x,y)+bg(x,y)\} = aF(f_x,f_y)+bG(f_x,f_y) \tag{1.1.54}$$

② 缩放与反演定理

$$\mathscr{F}\{f(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{f_x}{a},\frac{f_y}{b}\right)$$

$$\rightarrow \mathscr{F}\{f(-x,-y)\} = F(-f_x,-f_y) \tag{1.1.55}$$

③ 位移定理

$$\mathscr{F}\{f(x\pm a,y\pm b)\} = F(f_x,f_y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi(f_x a+f_y b)} \tag{1.1.56}$$

$$\mathscr{F}\{f(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}2\pi(\xi x+\eta y)}\} = F(f_x\mp\xi,f_y\mp\eta) \tag{1.1.57}$$

④ 帕色渥定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} |F(f_x,f_y)|^2\ \mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{1.1.58}$$

⑤ 广义帕色渥定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ g^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty} F(f_x,f_y)G^*(f_x,f_y)\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{1.1.59}$$

⑥ 卷积定理

$$\begin{gathered} \mathscr{F}\{f(x,y) * g(x,y)\} = F(f_x,f_y)G(f_x,f_y) \\ \mathscr{F}\{f(x,y)g(x,y)\} = F(f_x,f_y) * G(f_x,f_y) \end{gathered} \tag{1.1.60}$$

⑦ 互相关定理

$$\begin{gathered} \mathscr{F}\{f(x,y)\otimes g(x,y)\} = F^*(f_x,f_y)G(f_x,f_y) \\ \mathscr{F}\{f^*(x,y)g(x,y)\} = F(f_x,f_y)\otimes G(f_x,f_y) \end{gathered} \tag{1.1.61}$$

⑧ 自相关定理

$$\begin{gathered} \mathscr{F}\{f(x,y)\otimes f(x,y)\} = |F(f_x,f_y)|^2 \\ \mathscr{F}\{|f(x,y)|^2\} = F(f_x,f_y)\otimes F(f_x,f_y) \end{gathered} \tag{1.1.62}$$

⑨ 积分定理

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{f(x,y)\} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{f(x,y)\} = f(x,y) \tag{1.1.63}$$

⑩ 迭次变换定理

$$\mathscr{F}\mathscr{F}\{f(x,y)\} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}^{-1}\{f(x,y)\} = f(-x,-y) \tag{1.1.64}$$

⑪ 微分变换定理

$$\begin{gathered} \mathscr{F}\{f^{(m,n)}(x,y)\} = (\mathrm{i}2\pi f_x)^m\cdot(\mathrm{i}2\pi f_y)^n F(f_x,f_y) \\ \mathscr{F}^{-1}\{F^{(m,n)}(f_x,f_y)\} = (-\mathrm{i}2\pi f_x)^m\cdot(-\mathrm{i}2\pi f_y)^n f(x,y) \end{gathered} \tag{1.1.65}$$

⑫ 积分变换定理

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f_x}F(f_x)+\frac{F(0)}{2}\delta(f_x) \tag{1.1.66}$$

⑬ 共轭变换定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{f^*(x,y)\}&=F^*(-f_x,-f_y)\\ \mathscr{F}^{-1}\{F^*(f_x,f_y)\}&=f^*(-x,-y)\end{aligned} \tag{1.1.67}$$

推论：若 $f(x,y)$ 是非负的实函数，则有

$$F(f_x,f_y)=F^*(-f_x,-f_y) \tag{1.1.68}$$

具有上述特性的函数称为厄米特函数。

3. 傅里叶-贝塞尔变换(圆对称函数)

$$G_0(\rho)=\mathscr{B}\{g_r(r)\}=2\pi\int_0^{\infty} r g_r(r)\mathrm{J}_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r \tag{1.1.69}$$

$$g_r(r)=\mathscr{B}^{-1}\{G_0(\rho)\}=2\pi\int_0^{\infty}\rho G_0(\rho)\mathrm{J}_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}\rho \tag{1.1.70}$$

式中 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}^{-1}$ 分别表示傅里叶-贝塞尔变换和逆变换。

4. 常用函数的傅里叶变换对表

常用函数的傅里叶变换对如表 1.1.2 所示，其中有一些可直接从傅里叶变换定义式求解，另一些则由傅里叶变换的基本定理导出。

表 1.1.2　常用函数的傅里叶变换对

原函数↔频谱函数		原函数↔频谱函数	
1	$\delta(f_x,f_y)$	$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)$	$\mathrm{sinc}(f_x)\mathrm{sinc}(f_y)$
$\delta(x,y)$	1	$\Lambda(x)\Lambda(y)$	$\mathrm{sinc}^2(f_x)\mathrm{sinc}^2(f_y)$
$\delta(x-x_0,y-y_0)$	$\exp[-\mathrm{i}2\pi(f_xx_0+f_yy_0)]$	$\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)$	$\mathrm{comb}(f_x)\mathrm{comb}(f_y)$
$\exp[\mathrm{i}2\pi(ax+by)]$	$\delta(f_x-a,f_y-b)$	$\mathrm{step}(x)$	$\frac{1}{2}\delta(f_x)+\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f_x}$
$\cos(2\pi f_0x)$	$\frac{1}{2}[\delta(f_x-f_0)+\delta(f_x+f_0)]$	$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_x^2+f_y^2)]$
$\frac{1}{2}[\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)]$	$\cos(2\pi f_xx_0)$	$\mathrm{circ}(\sqrt{x^2+y^2})$	$\frac{\mathrm{J}_1(2\pi\sqrt{f_x^2+f_y^2})}{\sqrt{f_x^2+f_y^2}}$
$\sin(2\pi f_0x)$	$\frac{1}{2\mathrm{i}}[\delta(f_x-f_0)-\delta(f_x+f_0)]$	$\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$	$\frac{1}{\mathrm{i}\pi f_x}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}\pi f_y}$
$\frac{\mathrm{i}}{2}[\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)]$	$\sin(2\pi f_xx_0)$	$\exp[\mathrm{i}\pi(x^2+y^2)]$	$\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\exp[-\mathrm{i}\pi(f_x^2+f_y^2)]$

5. 傅里叶变换计算举例

【例 1】 求下列函数的傅里叶变换：

① $f(x)=A\cos^2(2\pi f_0x)$

② $f(x)=A\sin^2(2\pi f_0x)$

【解】 ①由于 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，且 $\cos\alpha=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}$，故有

$$\begin{aligned}F(f_x)&=\mathscr{F}\{A\cos^2(2\pi f_0x)\}=\frac{A}{2}\mathscr{F}\{1+\cos(4\pi f_0x)\}\\ &=\frac{A}{2}\delta(f_x)+\frac{A}{4}\delta(f_x-2f_0)+\frac{A}{4}\delta(f_x+2f_0)\end{aligned}$$

②由于 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，故有

$$F(f_x)=\mathscr{F}\{A\sin^2(2\pi f_0 x)\}=\frac{A}{2}\mathscr{F}\{1-\cos(4\pi f_0 x)\}$$
$$=\frac{A}{2}\delta(f_x)-\frac{A}{4}\delta(f_x-2f_0)-\frac{A}{4}\delta(f_x+2f_0)$$

1.1.5 线性系统与线性空间不变系统

1. 系统的算符表示

可以广义地把“系统”定义为一种变换或映射，把对系统的输入称为激励，而系统对此产生的输出则称为响应，并用算符 $\mathscr{S}$ 将两者联系起来（如图 1.1.12 所示）：

$$g(x_2,y_2)=\mathscr{S}\{f(x_1,y_1)\} \tag{1.1.71}$$

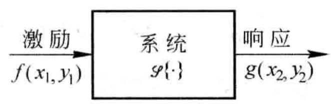


图 1.1.12　系统的算符表示

2. 线性系统的意义

设函数 $f(x_1,y_1)=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x_1,y_1)$ 代表对系统的激励，函数 $g(x_2,y_2)=\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(x_2,y_2)$ 代表系统相应的响应，a_i 是任意复常数；如果有

$$g_i(x_2,y_2)=\mathscr{S}\{f_i(x_1,y_1)\} \tag{1.1.72}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i g_i(x_2,y_2)=\mathscr{S}\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(x_1,y_1)\right\} \tag{1.1.73}$$

则称此系统为线性系统。线性所带来的最大好处是：系统对任意输入的响应能够用它对此输入分解成的某些基元函数的响应表示出来。

3. 脉冲响应函数与叠加积分

光学中常用的基元函数有三种：

① δ 函数（点基元）；

② 复指数函数（平面波基元）；

③ 余弦函数。

现以 δ 函数为例来说明线性系统的分解和综合过程。

由 δ 函数的筛选特性，输入函数可写成：

$$f(x_1,y_1)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\ \text{（输入函数的分解式）} \tag{1.1.74}$$

输出可以写成

$$\begin{aligned}g(x_2,y_2)&=\mathscr{S}\{f(x_1,y_1)\}=\mathscr{S}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)\mathscr{S}\{\delta(x_1-\xi,y_1-\eta)\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\eta)h(x_2,y_2;\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\quad\text{（叠加积分）}\end{aligned} \tag{1.1.75}$$

式中