高等代数

孙　立　汪士元　主编
孙　立　汪士元　伍金芬
蓝　堉　吴使钧　吴　斌　合编

广东教育出版社

高等代数

孙　立　汪士元　主编

孙　立　汪士元　伍金芬
蓝培安　吴伟钧　吴　斌　合编

广东教育出版社

高等代数

孙　立　汪士元　伍金芬
蓝培安　吴伟钧　吴　斌　合编

广东教育出版社出版发行
广东封开人民印刷厂印刷
787×1092毫米32开本 13,875印张 287,700字
1988年9月第1版 1988年9月第1次印刷
印数1—3,000册
ISBN7—5406—0624—X/G·623
定价：3.20元

前言

本书是根据中学教师进修高等师范数学专科、高等师范专科学校数学专业的高等代数教学大纲和我们多年来讲授高等代数的教学实践，以及吸收不同特点教材的内容进行整理编写而成。

编写中我们尽量使本书具有师范性，对内容取舍并不强求理论上的完整及形式上的严谨，而注重基础理论和基本方法训练，注重培养思考问题和解决问题的能力，对于与初等数学有关的内容，注意衔接、联系和适当加深，例如在多项式一章中加了“因式分解方法选讲”一节，在多项式带余除法定理中，对商式的系数采用一类特殊行列式表达等。在内容安排上注意循序渐进，把多项式这一难点放在行列式、矩阵、线性方程组之后，而矩阵内容提前到方程组之前，使矩阵方法能贯穿全书。对于线性相关概念，分二次讲，先讲了具体的 n 维向量空间的线性相关性，再在一般的线性空间中讲，从而抽象出线性相关的概念。本书采用了讲稿式的编写方法，对于基本概念中值得注意及易于忽视的地方加注说明，每章之后有内容提要，每节，每章之后还有难易搭配适当的习题利于学生自学。

使用本书教学约需180学时（含习题课），对打星号内容可酌情删减。

本书可供教育学院、师范专科学校数学系作高等代数教学用书，也可供中学教师进修及数学爱好者自学用。

由于我们水平有限，本书不妥之处在所难免，我们衷心欢迎使用本书、关心本书的同志们批评指正。

在本书编写过程中，中山大学陈继承副教授给予了热情指导，他详细审阅了书稿，并提供了许多宝贵意见，我们谨在此表示衷心感谢！

本书由孙立、汪士元同志主编，参加编写的有孙立、汪士元、伍金芬、蓝培安、吴伟钧、吴斌等同志。

编　者　　1988年元月

目　　录

预 备 知 识

1. 映 射

映射是数学中最基本的概念之一，下面我们来讨论它的概念和简单性质。

定义1 设A、B是两个非空集合，如果一个对应规则f，使对于集合A中的每一个元素x，有集合B中一个唯一确定的元素y与它对应，那末，就说f是A到B的一个映射，记为

$$f: A \longrightarrow B$$

A叫做映射f的定义域，B叫做映射f的值域，y称为在f之下x的象，通常记作$f(x)$，也可表为

$$f: x \longmapsto y$$

而x称为y的一个原象。

A中所有元素在f之下的象的全体所成集合记作$f(A)$，即$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，$f(A)$是集B的一个子集。我们还规定，两个映射相等当且仅当它们有相同的定义域和值域，并且它们对于这个公共定义域上每个元素均有相同的象。

例1 设A为整数集合，B为集合$\{0,1\}$，规则f为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\text{为偶数时,}\\ 1, & \text{当}x\text{为奇数时.}\end{cases}$$

是一个整数集到$\{0,1\}$上的映射，显然这个映射的任一个象

元素的原象都不止一个.

例2 设在自然数集N^*中，对$\forall n\in N^*$，定义f把n对应为$n-1$。

则规则f就不是一个N^*到N^*的映射．因为1在f的作用下没有象。

例3 设$A=\{a, b, c\}$，$B=\{1,2,3,4\}$

$$f: a\longmapsto 1,\ b\longmapsto 3,\ c\longmapsto 4$$

是A到B的一个映射，但若对应规则g把a对应到1，把b对应到2，那么g不是A到B的映射，因为c在g作用下没有象.

例4 设A是一个非空集合．定义

$$f: x\longmapsto x,\ \forall x\in A,$$

显见这个f是A到A的映射，把它叫做集合A的恒等映射，记作j_A，j_A把A的任一元素映射到自身.

由上面几个例子可知，映射f的定义域A与值域B，集合A与B可以是相同的，也可以是不相同的．如果集合A、B是相同的，那么把映射f称为A到自身的变换.

注 映射要求对于A中每一个元素x，在B中有唯一确定的元素y与它对应，否则不能叫做映射（参看例2，例3）；一般地，值域B的每一个元素不一定必是A中某元素的象，且A中不同元素的象也并非一定不相同（参看例1）.

定义2 设f是A到B的一个映射，如果对A中任意两个元素a,b，$a\neq b$有$f(a)\neq f(b)$，那么，称f是A到B的一个单射．如果对于任意$b\in B$，均存在$a\in A$，使$f(a)=b$，那末，称f是A到B的一个满射，若一个映射f既是单射，又是满射，则叫做双射．（也叫做一一对应）

例3中的映射f是一个单射而不是满射．而例1中的映射则是满射而不是单射，而例4中映射f(即j_A）则是双射.

单射也可以用另一种形式描述为：对任何$a,b\in A$，若$f(a)=f(b)$则必有$a=b$.

满射也可以描述为：$f(A)=B$. 即B中每一个元素都是A中某一个元素的象.

一个有限集A到自身的一个双射叫做A的一个置换. 例如，设$A=\{1,2,3\}$，$f: 1\longmapsto 3$，$2\longmapsto 1$，$3\longmapsto 2$. 就是A的一个置换. 下面再看一个双射的例子.

设f为整数集到偶数集的一个映射，且$f: n\longmapsto 2n$，任意$n\in N$，这是一个双射 . 这是一个无穷集到它的一个真子集的一一对应.

定义 3 设有集合A,B,C，映射f与g分别是由$A\to B$及$B\to C$，由f，g确定的A到C的映射h：$a\longmapsto g(f(a))$，对任意的$a\in A$叫做映射f，g的合成，记为$h=g\circ f$. 即 $h(a)=g(f(a))$. h可用下图表示：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

例5 设

$$f: R\longrightarrow R^+;\quad x\longmapsto 2^x,$$

$$g: R^+\longrightarrow R;\quad x\longmapsto l_n x,$$

那么

$$g\circ f: R\longrightarrow R;\quad x\longmapsto l_n 2,$$

$$f\circ g: R^+\longrightarrow R^+:\quad x\longmapsto 2^{\ln x}.$$

例 5 的结果表明两个映射的合成中，两映射的次序是至关重要的.

例6 设$A=\{a,b,c\}$,

$$f:\ A \longrightarrow A:\ a \longmapsto b,\ b \longmapsto c,\ c \longmapsto a;$$

$$g:\ A \longrightarrow A;\ a \longmapsto c,\ b \longmapsto a,\ c \longmapsto b;$$

那么 $$g\circ f:\ A \longrightarrow A;\ a \longmapsto a,\ b \longmapsto b,\ c \longmapsto c.$$

容易证明，映射的合成适合结合律.

定理1 设f：$A \to B$，g：$B \to C$，h：$C \to D$，则

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \tag{$\bullet$}$$

事实上，（$\bullet$）中等式两边的定义域都是A而值域都是D。对$\forall x \in A$，

$$[h\circ(g\circ f)](x)=h[(g\circ f)(x)]=h[g(f(x))]$$
$$=(h\circ g)(f(x))=[(h\circ g)\circ f](x),$$

即 $$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f \qquad \square$$

定理2 若f：$A \to B$为双射，那么（1）存在由f确定的双射 g：$B \to A$；（2）$g\circ f=j_A$，$f\circ g=j_B$.

证 （1）利用f，构造一个由$B \to A$的映射g. 因为f为A到B的满射，所以对任意$y \in B$，都存在$x \in A$，使$f(x)=y$，又 f为A到B的单射，即对任意$x_1, x_2 \in A$，若$f(x_1) \neq f(x_2)$，则$x_1 \neq x_2$.

故上述的x是由y唯一确定的.

我们把对任意$y \in B$对应到$x \in A$的对应关系称为映射g，于是

$$g:\ y \longmapsto x,\ \text{对任意}y \in B$$

是B到A的一个映射.

再证g是B到A的双射.

（i）g是B到A的满射.

根据f是A到B的双射，这样对任意的$x \in A$，都存在唯一的$y \in B$，使$f: x \longmapsto y$. 因此对任意$x \in A$都是g之下B中元素y的象，即 $g: B \longrightarrow A$是满射.

(ii) g是B到A的单射。

设y_1，$y_2\in B$，且$y_1\neq y_2$，假如$g(y_1)=g(y_2)$，那么y_1和y_2是同一元素在f下的象，而象是唯一的，故 $y_1=y_2$矛盾。因此，必有$g(y_1)\neq g(y_2)$。

$$\therefore\quad g\text{是单射}\ B\to A.$$

于是g是双射$B\to A$，即存在B到A的双射。

(2) 现在来证明定理的第二部分。对任$x\in A$。

$\because\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=x$，$\therefore g\circ f=j_A$。

又 对任$y\in B$ $(f\circ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y$，

$\therefore f\circ g=j_B$。 □

定义3 设$f: A\to B$。若存在$g: B\to A$，使$g\circ f=j_A$，则说f是左可逆的，g叫做f的左逆映射。同样，若$f\circ g=j_B$，则说f是右可逆的，g叫做f的右逆映射。当f是双侧可逆时，说f是可逆映射。

当$f: A\to B$是双侧可逆时，则左逆映射也是右逆映射，我们称它为f的逆映射。

事实上，若$f: A\to B$是双侧可逆的，不妨设存在$g: B\to A$及$h: B\to A$使$g\circ f=j_A$，$f\circ h=j_B$，那么，

$$g=g\circ j_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=j_A\circ h=h.$$

f的逆映射通常也记为f^{-1}，且

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

请读者自己证明这个结论。

例7 设 $A=\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，$B=[-1,1]$，定义映射$f$为

$$f: A\longrightarrow B,\quad x\longmapsto \sin x,\quad \forall x\in A,$$

显然，f是A到B的一个双射。它的逆映射是

$$f^{-1}: B\longrightarrow A,\quad y\longmapsto \arcsin y,\quad \forall y\in B.$$

易知f^{-1}也是一个B到A的映射。

练　　习

1. 试叙述由集合A到集合B的映射、单射、满射、双射的概念. 并举出映射（不是单射，也不是满射），单射（不是满射），满射（不是单射）及双射的例子来.

2. 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$，找一个A到自身的变换来，但不是满射的.

3. 设f定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & |x|>1\end{cases}$$

问f是不是R到R的映射？是不是单射？是不是满射？

4. 试给出R到R^+的一个双射.

5. 试给出集$\{a,b,c\}$到自身的所有映射，其中哪些是双射？

6. 设 f，g 是集M的两个变换. 问：由 $f\circ g=j_M$ 可否推出 $g\circ f=j_M$?

7. 证明：有限集合的变换f如果是满射或是单射，则 f 是可逆的.

2. 数学归纳法

下面我们介绍数学证明中的一个非常重要的方法，就是数学归纳法。

数学归纳法所根据的原理是自然数集的一个最基本的性质——最小数原理。

我们用N表示全体非负整数的集：

$$N=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

用N^*表示全体自然数的集：

$$N^*=\{1, 2, 3, \cdots\}$$

最小数原理：自然数集N^*的任意一个非空子集s必含有一个最小数，也就是这样一个数$a\in s$，对于任意$c\in s$都有$a\leqslant c$，（证明参看张禾瑞、郝钢新编《高等代数》第二版）

注：

1．最小数原理并不是对任意数集都成立的。例如，全体整数的集Z就没有最小数。又如全体正分数所成的集也没有最小数。

2．设c是任意一个整数，令

$$M_c=\{x\in Z \mid x\geqslant c\}$$

那么以M_c代替自然数集N^*，最小数原理对于M仍然成立。也就是说，M_c的任意一个非空子集必含有一个最小数。特别，N的任意一个非空子集必含有一个最小数。

由最小数原理可以得出以下的数学归纳法原理。

定理3　（数学归纳法原理）设有一个与自然数n有关的命题。如果

1°　当$n=1$时命题成立；

2°　假设当$n=k$时命题成立，则$n=k+1$时命题也成立；

那么这个命题对于一切自然数n都成立。

证　假设命题不是对于一切自然数都成立。令s表示使命题不成立的自然数所成的集。那么$s\neq\phi$，于是由最小数原理，s中有最小数h。因为命题对于$n=1$成立，所以$h\neq1$，从而$h-1$是一个自然数。因为h是s中的最小数，所以$h-1\notin s$。这就是说，当$n=h-1$时命题成立。于是由2°，当$n=h$时命题也成立，因此$h\notin s$这就导致矛盾。　　□

注：根据最小数原理，上面的注意2，我们可以取M_c来代替自然数集N^*，也就是说，如果某一个命题是从某

一个整数c开始成立，这时仍然可以用数学归纳法来证明，只要把定理中条件1°的$n=1$换成$n=c$就行了.

例1 证明，当$n\geqslant 3$时，n边形的内角和等于$(n-2)\pi$.

这个命题对于$n=1$，$n=2$来说是没有意义的. 我们从$n=3$开始用数学归纳法.

当$n=3$时，命题成立. 因为三角形内角和等于$\pi=(3-2)\pi$.

假设$n=k(k\geqslant 3)$时命题成立。我们看任意一个$k+1$边形$A_1A_2A_3\cdots A_kA_{k+1}$（如图1）联结$A_1A_3$，那么$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于三角形$A_1A_2A_3$的内角和再加上$k$边形$A_1A_3\cdots A_kA_{k+1}$的内角和. 前者等于$\pi$，后者由归纳法假定，等于$(k-2)\pi$. 因此$k+1$边形$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$的内角和等于$\pi+(k-2)\pi=(k-1)\pi=[(k+1)-2]\pi$命题得证.

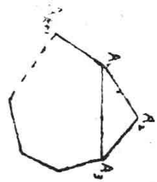

图 1

对于某些与自然数有关的命题的证明，归纳法假定"命题对于$n=k$成立"还不够，而需要较强的假定，我们有

定理 4（第二数学归纳法原理）设有一个与自然数n有关的命题. 如果

1° 当$n=1$时命题成立；

2° 假设命题对于一切小于k的自然数来说成立，则命题对于k也成立；

那么命题对于一切自然数n来说都成立.

证 用反证法.

假设命题不是对一切自然数都成立，令 s 表示使命题不成立的自然数所成集合，则 $s\neq\phi$，根据最小数原理，s 中有最小数 h，且 $h\neq 1$，否则与 1° 矛盾，因而 $h-1$ 是一个自然数。又因 h 是 s 中的最小数，所以 $h-1\notin s$，这就是说命题对 $h-1$ 来说成立。然而 $h\in s$，所以命题对 h 来说不成立，这与 2° 矛盾，故命题对于一切自然数 n 来说都成立。 □

注：在这个定理里，条件 1° 也可以换成 n 等于某一个整数 c。

在使用数学归纳法作证明时，必须证明定理中的 1°，2° 两步都成立时，才能说命题对于一切自然数 n 都成立。

例2 已知数列 a_{-1}，a_0，a_1，a_2，…，a_n，…其中

$$a_{-1}=\frac{3}{2},\quad a_0=2,\quad a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

求证 $a_n=2^n+1$

证 应用第二数学归纳法

（1）$n=1$ 时，一方面 $a_1=3a_0-2a_{-1}=6-2\times\frac{3}{2}=3$ 另一方面 $2^1+1=3$，所以命题成立。

（2）假设对于一切小于 k 的自然数命题成立，那么我们考察对于自然数 k，因为

$$\begin{aligned}
a_k&=3a_{k-1}-2a_{k-2}\\
&=3(2^{k-1}+1)-2(2^{k-2}+1)\ \text{（由归纳假设）}\\
&=3\cdot 2^{k-1}+3-2^{k-1}-2\\
&=2^{k-1}(3-1)+1\\
&=2^{k-1}\cdot 2+1\\
&=2^k+1
\end{aligned}$$

所以命题对于自然数 k 也成立。那么命题对于一切自然数 n 都成立。