数学题解法的探索与发现

SHUXUETI JIEFA DE TANSUO YU FAXIAN

编著/翁聿中/陈祖淮

地质出版社

数学题解法的探索与发现

翁聿中　陈祖湛　编著

地质出版社
·北　京·

内 容 提 要

本书通过对数学例题的分析和解后的反思，为读者展现了数学解题的思维过程和各种数学思维模式，对培养学生的创新思维，优化思维品质，增强思维能力有很大的帮助．

图书在版编目(CIP)数据

数学题解法的探索与发现/翁聿中，陈祖淮编著．
-北京：地质出版社，2002.1
ISBN 7-116-03198-7

Ⅰ．数…　Ⅱ．①翁…　②陈…　Ⅲ．数学课-高中-解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098986 号

责任编辑：郑长胜　程　瑶
责任校对：黄苏晔
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电　　话：(010)82324508(邮购部)；(010)82324583(编辑部)
网　　址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@ gph.com.cn
传　　真：(010)82310759
印　　刷：北京科技印刷厂
开　　本：850×1168 1/32
印　　张：8.125
字　　数：190000
印　　数：1—4100 册
版　　次：2002 年 1 月北京第一版·第一次印刷
定　　价：10.00 元
ISBN 7-116-03198-7/G·432

前　言

中共中央、国务院在《关于深化教育改革、全面推进素质教育的决定》中指出:“实施素质教育,就是全面贯彻党的教育方针,以提高国民素质为根本宗旨,以培养学生的创新精神和实践能力为重点,造就‘有理想、有道德、有文化、有纪律’的,德智体美等全面发展的社会主义事业建设者和接班人.”使我们实施素质教育的方向更明确、重点更突出.而思维素质是素质教育的重要内容之一,思维能力更是诸能力的核心之一.同时,创新思维是创新精神的灵魂,正如中国科学院心理研究所研究员、著名的心理学家卢仲衡教授所说:“思维是人脑借助于语言、表象和动作实现的对客观事物的概括和间接的反映.思维能力的大小表现于它揭露事物的本质特征和内部联系,表现在人们解决问题的活动中.创造性思维能力是能力中最高级的能力,是在个人已有经验的基础上,发现新事物、创造新方法、解决新问题的过程的创新能力.”要培养学生的创新思维,就必须从培养学生的科学思维做起,并要求教师本身具有科学的思维方式,且在教学实践中能自觉坚持运用科学的思维方法塑造学生,使他们养成良好的思维习惯,逐步掌握科学的思维方法,从而优化思维品质,增强思维能力,进而升华成创新思维,逐步地形成创造能力.

数学作为中学教育的一门重要学科,也存在着一个数学素质教育的问题.原苏联数学教育家 A·A·斯托利亚尔认为:“数学这个术语本身,就是表示一种思维活动(数学活动).”所以,数学教学,实质上就是学生在教师的指导下,通过数学思维活动,学习数

学家思维活动的成果(包括知识和方法),并发展数学思维,使学生的思维结构向数学家的思维结构转化,从而优化思维品质,增强思维能力.由此可见,数学教师正是通过自己优质的创造性的思维活动,在数学家的思维活动与学生的思维活动间架设桥梁,并指导、调控学生的思维活动,使之与成功的数学思维活动同步,从而逐步实现思维结构的优化.数学教师的良好数学素质在提高学生思维素质上的作用也就不言而喻了.

所谓数学思维方法,就是在基本数学思想系统作用下进行思维活动的心理过程,它是沟通已有的数学知识(方法)和新遇的数学问题的联系的分析、探索方法.在一般情况下,它们间的联系并非显然的.当学生掌握了科学的数学思维方法,就会正确地分析,进行思维的自我调控,探索、创造一定条件,寻找出它们之间的联系,促使问题的解决.此时,在正确的思维方法指导下,学生就变得善于思考,懂得将知识如何运用于解题中,知识就不再是孤立的了,方法也不再是呆板的了,它们之间建立起有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,实现了知识的迁移,从而极大地提高了学习质量和数学能力.让学生掌握数学思维方法,再次印证了巴甫洛夫的"方法可以推进科学"的结论.对于提高学生的思维素质更具现实的意义.

笛卡尔、波利亚、波普尔等众多的科学大师的方法论思想为我们留下从宏观角度处理数学问题的科学思维方法,这对我们当今进行的教改无疑是具有启发性的.其中享有国际盛誉的数学教育家G·波利亚,他的名著《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》、《数学分析中的问题和定理》等都为我们提供了极其丰富且富有启发性的"解决问题一般有用的心智活动",对我们的教学及学生的学习更具有指导意义!探索数学思维规律,不仅对提高人们的数学素质有现实意义,对于造福未来也具重大意义.现在已有很

多数学教育工作者正沿着他们指引的方向进行探索.随着素质教育进一步深入,人们对用数学方法论来提高思维素质的做法将有更深刻的认识,将有更多的教师投身这种实践、发展这些名师的教育思想,它将给我国目前“以学生为主体,以教师为主导”的教改活动注入更多的活力,推动教育改革向更深层次发展.

我们编写此书,意在对前一段的教学实践进行一次系统回顾和总结,品味用思维方法论作用于教学实践的优越性,增强教改的信心.通过对例题的分析,产生“想法”,进行“试探”,淘汰“错误”,探索前进道路.在暴露思维的过程中不断调整思维方向,激发灵感,通过提出合理的、富有启发的问题,推进思维,在探索和发现解题思路中领悟乐趣,从而激发读者自觉地投入到数学思维规律的探索中去.当然学习它,不仅在于“古为今用”、“洋为中用”,更在于“推陈出新”、超越他们.当今国内外不少数学教育家强调在数学解题中要着力提高学生的“元认知”水平.对于解题而言,“元认知”是指解题者在解题活动中的自我意识、自我评价和自我控制.实践证明,解题者的“元认知”水平决定了解题是否成功.凡“元认知”水平较高的,解题中就能把握方向,有很强的探索能力,在解题成功后,又能自觉地对解题过程进行审视,探索更有效的解题途径.本书重视对问题的解后反思,通过对思维方向、过程及结果的监控,对解题本质的概括,对问题的引申,发展“元认知”,增强自我评价和思维监控意识.

我们希望本书对广大读者能有较大的帮助.当您从中受到启迪,从而掌握探索和解决数学问题的科学方法,并能熟练地用于解题活动时,您在数学学习中就能胸有成竹,傲然自得地畅游于数学知识的海洋,将其乐无穷,并对数学产生热爱.爱因斯坦说:“热爱是最好的教师.”当您从中获益而产生数学学习的热情时,必然激发出强大的学习积极性,充分发挥出您的潜能,那么,在数学学习

中您将获得巨大的成功!

限于水平,也限于学习的肤浅,不当及错漏在所难免,望专家、老师及同学指教!

编　者

2001.8

目　录

第一章　数学解题的思维过程……………………………………（1）
第二章　常见思维模式的应用 ……………………………………（24）
一、笛卡尔模式 ……………………………………………………（24）
二、交轨模式 ………………………………………………………（32）
三、迭加模式 ………………………………………………………（39）
四、递归模式 ………………………………………………………（48）
五、化归模式 ………………………………………………………（61）
六、逐步逼近模式 …………………………………………………（68）
第三章　心理学家提倡的两种思维模式 …………………………（77）
一、沃勒斯的“解决问题的四阶段模式” …………………………（77）
二、K·邓克尔的“范围渐趋缩小的汇综模式” ……………………（93）
第四章　问题的化简…………………………………………………（101）
一、问题的纯化 ……………………………………………………（101）
二、消元 ……………………………………………………………（104）
三、降次 ……………………………………………………………（112）
四、将形式化简 ……………………………………………………（115）
第五章　数学解题中思维策略的应用……………………………（120）
一、整体解决和部分解决 …………………………………………（120）
二、以退为进 ………………………………………………………（130）
三、形象思维 ………………………………………………………（138）
四、广泛联想 ………………………………………………………（146）
五、辩证观点 ………………………………………………………（152）
六、创新意识 ………………………………………………………（159）

第六章 解题思路的正确探索 …………………………（166）
一、问题的分细——分解与迭加 …………………………（166）
1. 问题的纵向分解与中途点 …………………………（167）
2. 问题的横向分解与分歧点 …………………………（176）
3. 基本问题与引理的发现及引理法 …………………………（185）
二、问题的变更——变换与映射 …………………………（190）
1. 问题的等价变换(产生等价问题的几种方式:等价件的替代、通过变量代换、通过恒等变换或同解变换、借用不同的表述、借助不同的构图、利用正命题和逆否命题的等价关系等.) …………………………（191）
2. 问题的映射 …………………………（206）
3. 问题的不等价变换 …………………………（215）
三、试探与猜想 …………………………（221）
1. 简化的引路作用 …………………………（222）
2. 特殊的试探作用 …………………………（224）
3. 极端情况的启示作用 …………………………（231）
4. 类比的引导作用 …………………………（234）
5. 大胆猜想——科学发现的基本形式之一 …………………………（238）
编后语 …………………………（247）
主要参考文献 …………………………（249）

第一章　数学解题的思维过程

在数学思维的研究中,一种是将思维作为结果来研究,一种是将思维作为过程来研究.从现实的教学实践看,真正有价值的是对思维过程的研究,思维结构是通过思维过程来形成的,已形成的结构又作用于思维对象形成新的过程.

1984 年数学高考试卷既考知识又考核能力,曾引发一场辩论,从此,我国在数学教育上的教学观念发生了重大变革,至今已形成了“数学教学是传授知识、渗透思想、培养能力、转变态度和个性品质形成的过程”的共识.

数学教学的实质是什么呢? 是学生在老师指导下,通过数学思维活动学习数学家思维活动的成果 (包括知识和方法),并发展数学思维;促使学生思维结构向数学家思维结构优化.当然,这种优化是要循序渐进、逐步发展起来的,它离不开数学思维活动,而思维活动只能在思维过程中进行.为此,原南京师大附中副校长、南京师大数学系兼职教授、原国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员马明认为:“应该实行以推迟判断为特征的课堂教学结构改革,给学生以充分自由想像的时间和空间,决不能把数学教学作为‘结果’来进行,而应该作为‘思维过程’来进行.”从而肯定了在教学活动中学生的主体地位.在当今素质教育下所进行的教改都旗帜鲜明地提出“以学生为主体,以教师为主导”的思想,即学生应是教学活动的中心,要积极参与到教学活动中去充当主角,老师、教材、一切教学手段都应该为学生的思维结构的优化服务.同时,教师应在思维方法科学性及激发学生学习积极性、主动性、独立性和创造性上给予指导,以体现出主导地位.数学思想方法是数学知识的精髓,是知识转化成能力的桥梁.数学教师正是在教学

过程中以“数学思想方法”解决数学问题，把数学知识转化为心智素质，形成了能用数学的眼光和头脑去认识和处理周围事物的数学观念，使宏观的数学能力得以提高．对于数学解题而言，思维也是核心，思维过程更是倍受关注．

那么，什么是数学解题的思维过程？波利亚在他的三大名著《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》中的相关阐述对我们理解这个“思维过程”是富有启发的！为了更好理解并应用波利亚所提供的《怎样解题》表，结合当前教学实际，将之简化如下：

简化的“解题”表

一、弄清题意

第一步必须弄清题意．	* 未知数是什么？已知数是什么？条件是什么？ * 可能满足的条件？ * 画一个图，引入适当的符号！

二、拟定计划

第二步找出已知与未知间的关系．假设你不能找出关系，就得考虑辅助问题．最后应想出一个计划．	* 你以前曾见过它吗？ * 你知道什么有关的题目吗？ * 注视未知数！试想出一个有相同或类似未知数的熟题． * 这里有一个你以前解过的题目，你能应用它吗？ * 你能改述这题吗？回到定义！ * 你若不会解此题，试先解一道有关的题．你能想出一个更容易着手的有关的题吗？一个更一般的题？一个更特殊的题？一个类似的题？你能解题目的一部分吗？ * 你是否用了全部条件？

续表

三、实现计划	
第三步 实现你 的计划.	* 实现你的解题计划,核对每一步. * 你能否清楚地看出这一步是正确的?你能否证明这一步是正确的?

四、回　　顾	
第四步 核对所得 的解答.	* 你能核对结果吗?你能核对论证吗? * 你能用不同的方法得出结果吗? * 你能应用此结果或方法解别的题吗?

从表上知,考虑到知识的迁移、认识的深化、能力的提高,从宏观角度看,完整的解题过程须有四个阶段,每一个阶段都有必要.即:

1. 弄清问题,即审题;
2. 拟定计划,即探求思路;
3. 实现计划,即解题;
4. 回顾,即反思.

精妙之极!说是怎样解题,实际上是教我们解决数学问题,学好数学的一种科学方法.在学习数学中,解题既是巩固和运用知识的重要手段,又是发展智力,培养能力的有效途径.数学家 P·R·Halmos 说过:"问题是数学的心脏."问题的重要性就在于它推进解题过程中的思维活动,从而将数学思维活动暴露在眼前,有利于培养学生类比、归纳、猜想和探求能力!进而达到培养创造能力的目的.表中的问句和指示与具体问题的主题无关,符合简单谨慎、普遍有用和强化三原则,是用于促发念头,引发学生感应,开展有益的心智活动,从而达到启发探索和发现解法的目的,对指导学生学会提出问题很有益处,并将终生受益!表中告知:

第一，在审题时，应如何观察．观察是获取知识的窗口．表中指示应观察什么？怎么观察？观察受阻时，应画张图，引入适当符号！在直观指导下再仔细观察！

第二，在拟定计划时，表中提出用一些普遍有用的问句和指示来促发念头、启发思维、设法看出相关项目的联系，由此形成解决问题的意向，最终形成计划．当然，这期间要对思维进行调控．波利亚指出：要构想出一个切实可行的计划，经常有用的办法就是“试验对问题做各种修改．我们必须一再地变化它……直到最后的成功…….”人们就是在不断地变换问题中，以加深对问题的理解、克服缺点、修正错误，一次次地从横在解题通道前的悬崖峭壁中退回来，调整思维方向，勇往直前，直至成功．正是在这种不断地变换问题的试验过程中，使自己的思维调控能力得以增强．

第三，解题时还要求自我判断，每一步校正对与错及判断原因，使思维的批判性和严谨性得以验证．

第四，重视解后反思，它是提高学习质量的重要一环．反思时，要求对解答深入再思考，抓住问题的本质和规律深入细致地再认识，正确评估自身思维水平，做出相应变通，改进解答的质量，培养思维的深刻性；要改变方位思考问题，改变角度研究问题，通过解后对数学问题的特征、差异及隐含关系进行重新全面再分析，做出更为广泛的联想，运用不同方法灵活地处置和解决问题，求得一题多解，有助于培养思维的灵活性和开阔性；要求解后对问题进行变换和引申，从中创造出有价值的具有新颖成分的问题，对于调动解题的积极性、探索新命题、获取新知识、求得新发现、培养和发展思维的创造性意义重大．

这张表深刻揭示了解题过程的心理活动特征，从审题（信息搜集）、解题（信息加工）、反思（信息保持和扩展）等诸方面提出了指导性的意见，是培养数学能力并加以发展的有效途径．正像波利亚在《怎样解题》中所说的，如果我们能坚持按表中所提供的方法去思考和钻研，那么可以相信：“数学除了是通向工程工作和科学知

识的必由之路以外,还可能是一种乐趣,并且可能开辟最高水平的智力活动的前景."表中所揭示的正是解题完整的思维过程:从解题方向的确定,解题设想、计划的提出和实施到最后解题目标的实现.下面通过对几个范例的分析,感受一下这种思维过程.

例 1　已知不共线三点 A、B、C,在它们所确定的平面 α 内,过 A 作一直线 l,使它与 B、C 两点等距离.

分析:1. 审题

已知什么? α 内不共线的三点 A、B、C.未知什么? 画一条直线 l.满足什么条件? 所求直线 l 过定点 A,且与 B、C 两点等距离.联想确定直线的条件:过点 A,还需找另一确定的点或确定该直线的方向.

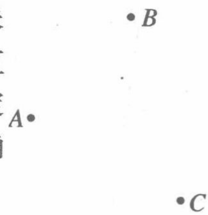

图 1-1

先画一张图,看有何启示(见图 1-1).

2. 拟定计划

如何再找一点或确定此直线的方向呢? 先削弱条件:画出过定点 A 的直线 l,让 l 绕 A 旋转,发现有以下两种情况可使 l 与 B、C 两点等距离:B、C 两点在 l 同侧(如图 1-2)及 B、C 两点分别在 l 两侧(如图 1-3).

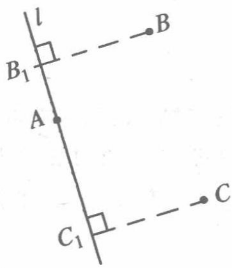

图 1-2

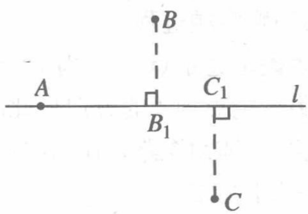

图 1-3

在图 1-2 中,连结 BC,无意间发现须 $l // BC$.于是 l 方向可确

定，所以只要过定点 A 作直线 l，使 $l /\!/ BC$（见图 1-4），即找到所求的直线 l 了.

对图 1-3，似乎无从下手. 再看图 1-4，由于连结 BC 使我们要解决的问题豁然明朗起来. 于是出现以下想法：仿图 1-4 也连结 BC，看有何启示？此时记 BC 与 l 交于点 M，易判明 M 是 BC 的中点（是定点），即只要过 A、M 作直线 l，亦可满足条件（见图 1-5），于是问题可解.

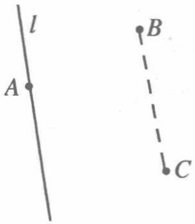

图 1-4

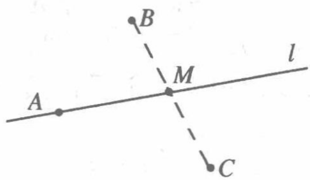

图 1-5

3. 实现计划

以上分析有无遗漏、错误？经核对分析过程，无遗漏、无失误（此时解题途径已找到了），可以解题了.

解答略去，请自行写出.

4. 回顾

(1)回顾解题过程

发现确定过定点 A 且符合条件的直线 l，关键是如何找出 l 所过的另一定点或 l 的方向！此时，画图在于通过直观观察使问题明朗化，起辅助探路作用. 这启示我们在审题时（特别是几何问题）要多动手画图.

(2)品尝余味——将问题引申

(ⅰ)可考虑改变问题的形式

例如：已知 D 是三角形 ABC 边 BC 的中点，作 $BE \perp AD$，$CF \perp AD$，E、F 为垂足，求证 $BE = CF$.（可用三角形全等及面积法分别

证明）

（ⅱ）可考虑将问题一般化

例如：问题 1，在△ABC 中，M 是 BC 上一点，且 $BM:CM=1:2$，作 $BE\perp AM$，$CF\perp AM$，E、F 为垂足，求证：$BE:CF=1:2$.

问题 2，已知平面上不共线三点 A、B、C，试过 A 作一直线 l，使 B、C 分别位于 l 两侧，且 C 到 l 的距离等于 B 到 l 距离的两倍？

问题 3，已知、求作与问题 2 相同，如果 B、C 两点位于 l 同侧，又如何做？

（ⅲ）可将问题更一般化

比如比值改为 $m:n$，（ⅱ）中的三个问题又如何变化？你又如何加以解决？

例 2　已知函数 $f(x)=\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 x_1、$x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$.

证明：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.（1994 年高考试题）

分析：1. 审题

已知与未知已很简洁，不一一列出.

2. 拟定计划

第一个印象：要证的结论太抽象.

想法一：能否用条件 $f(x)=\tan x$，使结论具体化？

即证明：$\frac{\tan x_1+\tan x_2}{2}>\tan\frac{x_1+x_2}{2}$　①

想法二：将①式两边各自恒等变形，再分析是什么本质差异导致两边不等，根据熟悉化原则，化切为弦再化简.

左边 $=\frac{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}{2\cos x_1\cdot\cos x_2}=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}$，

看左边三角式变换结果，指导右边三角式用倍角公式变换：

右边 $=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+1}$，

x_1、$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\sin(x_1+x_2)>0,1+\cos(x_1+x_2)>0$，

$\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)=2\cos x_1\cos x_2>0$，

想差异：1 与 $\cos(x_1-x_2)$是造成不等的原因，设法证明：

$\cos(x_1-x_2)<1$ 即可．这是我们脑中出现的想法三！

而 x_1、$x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1\neq x_2$，

$\therefore\quad -\dfrac{\pi}{2}<x_1-x_2<\dfrac{\pi}{2}$，且 $x_1-x_2\neq 0$，

$\therefore\quad \cos(x_1-x_2)<1$ 是成立的．

3．实现计划

由上知可证，检查条件都已用上，且推理没有漏洞，可书写解答了（请读者自行补上）．

4．回顾

（1）证明关键在于通过恒等变形寻找导致“不等”的本质差异．

（2）画图看看问题的几何直观背景．$f(x)=\tan x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$是凹函数（如图 1-6），$A$、$B$ 两点坐标是$(x_1,\tan x_1)$，$(x_2,\tan x_2)$，M 为

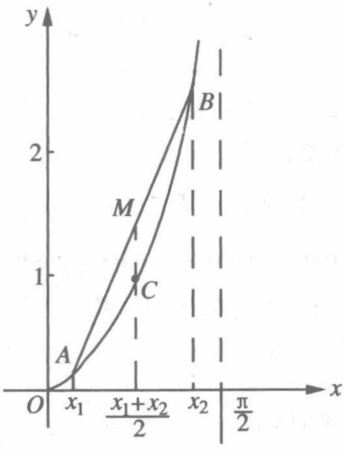

图 1-6