# 初中几何
# 百题多解法

广西教育出版社

# 初中几何百题多解法

陈钋初　编著

广西教育出版社

初中几何百题多解法

陈钉初　编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7号）

广西新华书店发行　广西新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　8.5印张　187千字

1988年7月第1版　1991年7月第4次印刷

印　数：73,101--88,100册

ISBN 7—5435—0353—0/G·298

定价：2.50元

# 前　　言

平面几何是培养人们逻辑思维能力的一门基础学科，它根据图形的特点，借助有关定义、公理和定理等，依据逻辑推理的方法，推演出所需的结论．

为了帮助初中学生及自学青年学好平面几何知识，开拓思路，提高灵活运用不同知识分析和解决问题的能力；为了给中学数学教师提供辅导及复习的参考资料，本书精选了一百道典型题目，并给出了几何的、三角的、代数的等数种解法，有的还适当给出高中的解析法及复数法．每种解法前有分析，后有简评，以有助于读者掌握解题的思维方法和技能技巧．希望读者独立思考，认真比较，仔细研究，不断总结，以提高解题能力．

本书还适当选入一些构思精巧的选择题（所列的答案中，有且仅有一个是正确的），部分国内外竞赛试题以及世界难题，以开阔读者的视野，培养对数学的兴趣．

限于水平，书中错误难免，不妥之处，盼读者赐予指正。

编著者

一九八八年元月

# 目　　录

# 一、证两线段相等

1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，于$AB$上取点$D$，又在$AC$延长线上取$E$使$BD=CE$，连结$DE$交$BC$于$G$。求证：$DG=EG$。

**分析1** $DG$和$EG$分别是$\triangle GDB$和$\triangle GEC$的一边，要证明它们相等，可添辅助线$DF \parallel AE$，造$\triangle GDF$，然后证明$\triangle GDF \cong \triangle GEC$即可。

**证法1** 如图1，作$DF \parallel AE$交$BC$于$F$，

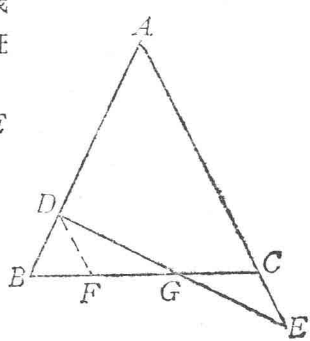



图1

则$\angle FDG=\angle CEG$，

$\angle DFG=\angle ECG$，

$\angle DFB=\angle ACB$。

而 $AB=AC$，

$\therefore$ $\angle B=\angle ACB=\angle DFB$。

$\therefore$ $BD=FD$。

又 $BD=CE$，

$\therefore$ $FD=CE$，

$\therefore$ $\triangle DGF \cong \triangle EGC$。

故 $DG=EG$。

**注** 作辅助线DF∥AE后，也可证CDFE为平行四边形。

**分析2** 因$DG$、$EG$同在一直线，故可证$G$为$DE$的中点。若过$D$作$DF \parallel BC$，则证$C$为$EF$的中点即可。

**证法2**　作$DF \parallel BC$交$AC$于$F$，如图2。

则　$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$。

又　$AB = AC$，

$\therefore$　$\angle 2 = \angle 4$，

$\therefore$　$\angle 1 = \angle 3$，即$AD = AF$，

$\therefore$　$BD = CF$。

而　$BD = CE$，

$\therefore$　$CF = CE$，即$C$为$EF$之中点。

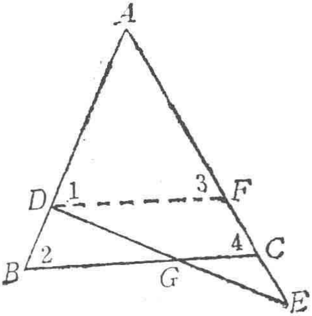



图 2

又　$DF \parallel BC$，

故　$G$为$DE$之中点，即$DG = EG$。

**分析3**　可证它们都等于第三边，即作辅助线$EF = EG$交$BC$延长线于$F$（如图3），要证$DG = EF$，只需证明$\triangle ECF \cong \triangle DBG$即可。

**证法3**　作$EF = EG$交$BC$延长线于$F$。

则　$\angle F = \angle EGF$

　　$= \angle DGB$。

又　$AB = AC$，

$\therefore$　$\angle B = \angle ACB$

　　$= \angle ECF$。

而　$BD = CE$，

$\therefore$　$\triangle ECF$

　　$\cong \triangle DBG$

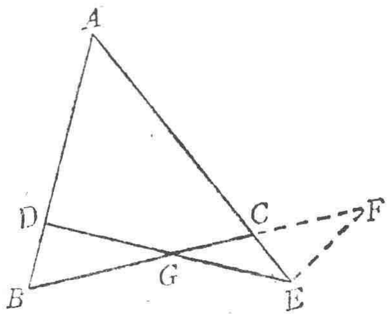



图 3

$\therefore$　$DG = EF$，

故　$DG = EG$。

**简评**　证明两线段相等时，一般可利用全等三角形定

理、中位线、平行四边形，还可利用第三边.

一般地，对于一个三角形被一直线所截的情形，常作的**辅助线是**过交点作平行线，如图 4 .

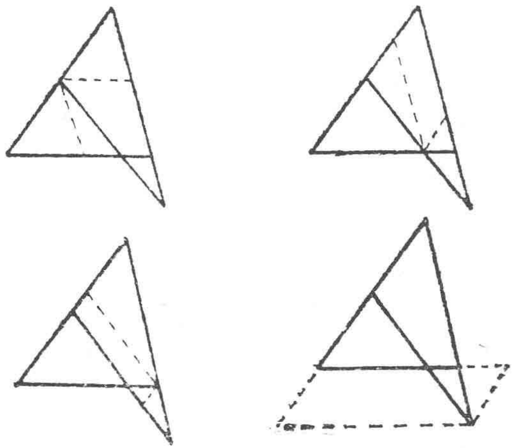


图 4

2. 在$\triangle ABC$中，$AD$为$\angle A$的平分线，$E$为$BC$的中点，过$E$作$EF \parallel AD$交$AB$于$G$，交$CA$的延长线于$F$. 求证：$BG = CF$.

**分析1** 因有$\angle BGE = \angle F$，要证$BG = CF$，就必须证明其所在的三角形全等. 而$\triangle GBE$和$\triangle CFE$明显不全等，所以要造新三角形，使所证的线段分别是两三角形的边，证它们全等即可. 故过$B$、$C$分别作$FE$的垂线，垂足为$P$、$Q$，证$Rt\triangle BPG \cong Rt\triangle CQF$.

**证法1** 如图5，过$B$、$C$分别作$BP \perp EF$，$CQ \perp FE$，垂足分别为$P$、$Q$，

则 $BP \parallel QC$,

$\because \quad \angle PBE = \angle QCE$,

而 $\quad BE = CE$,

$\therefore \quad Rt\triangle BPE \cong Rt\triangle CQE$,

$\therefore \quad BP = CQ$。

又 $\quad EF \parallel DA$,

$\quad AD$平分$\angle A$,

$\therefore \quad \angle BGE = \angle F$,

$\therefore \quad Rt\triangle BPG \cong Rt\triangle CQF$,

故$BG = CF$。

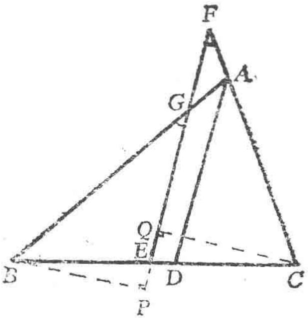



图 5

**分析2** 因$FE$是$BC$的中线，根据三角形中线的常用辅助线——延长$FE$至$H$，使$FE = EH$（如图6），这样即得平行四边形$FBHC$。要证$BG = CF$，即证$BG = BH$，也就是证明$\angle 1 = \angle 2$即可。

**证法2** 延长$FE$至$H$，使$FE = EH$，连结$BF$、$BH$、$CH$。

$\because \quad BE = CE$,

$\therefore \quad FBHC$是平行四边形，

$\therefore \quad CF = BH$。

又 $\quad EF \parallel AD$，$AD$平分$\angle BAC$，$BH \parallel FC$,

$\therefore \quad \angle 1 = \angle BAD = \angle DAC = \angle F = \angle 2$,

$\therefore BG = BH$,

故 $\quad BG = CF$。

**分析3** 因$E$为$BC$的中点，所以在$AB$、$AC$上分别取中点$P$、$Q$（如图7），则$APEQ$即为平行四边形。要证$BG = CF$，只需证明$BP = FQ$，$GP = CQ$即可。

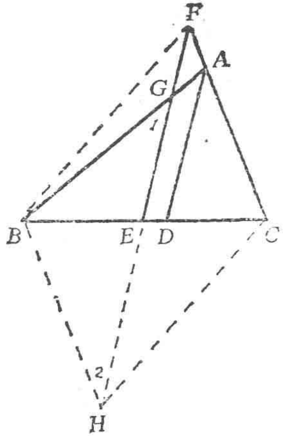



图 6

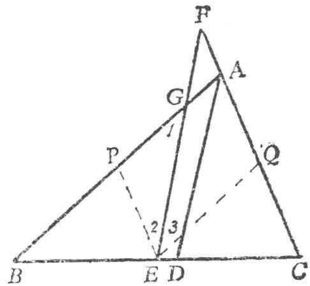



图 7

**证法3** 取$AB$、$AC$之中点$P$、$Q$，连结$EP$、$EQ$。

$\because$ $E$是$BC$之中点，

$\therefore$ $FP\underline{\parallel}\frac{1}{2}AC$，$EQ\underline{\parallel}\frac{1}{2}AB$，

即 $BP=EQ$，$CQ=EP$。

又 $EF\parallel AD$，$AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle BAD=\angle DAC=\angle F=\angle 2$，

$\angle 3=\angle 1=\angle F$，

$\therefore$ $BP=EQ=FQ$，$GP=PE=CQ$，

故 $BG=CF$。

**分析4** 因$AD$为$\angle A$的平分线，而$EF\parallel AD$，故$\triangle CAD\backsim\triangle CFE$，$\triangle BGE\backsim\triangle BAD$，要证$BG=CF$，即可根据三角形内角平分线定理以及相似三角形对应边成比例，设法证明：

$$\frac{BG}{BE}=\frac{CF}{CE}.$$

**证法4** $\because AD$是$\angle A$的平分线，

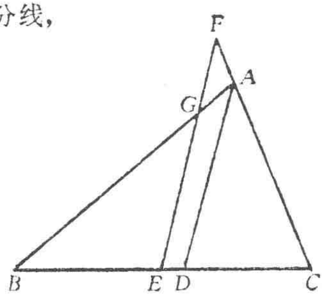


图 8

$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$,

即 $\quad \frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BD}$.

又 $\quad EF \parallel AD$,

$\therefore \quad \triangle CAD \backsim \triangle CFE$,

$\triangle BGE \backsim \triangle BAD$,

$\therefore \quad \frac{CF}{CE}=\frac{AC}{CD},\quad \frac{BG}{BE}=\frac{AB}{BD}$,

$\therefore \quad \frac{CF}{CE}=\frac{BG}{BE}$.

而 $\quad CE=BE$,

故 $\quad BG=CF$.

**分析5** 在题设中有平行线，有中点，可考虑利用面积来证明．首先设法证 $S_{\triangle DBG}=S_{\triangle DCF}$，然后利用角平分线的性质证得$D$到$BG$和$CF$的距离相等即可．

**证法5** 连结$AE$、$DG$、$DF$（如图9）．

$\because \quad EF \parallel AD$,

$\therefore \quad S_{\triangle EDG}=S_{\triangle EAG}$,

$S_{\triangle DFA}=S_{\triangle DEA}$,

$\therefore \quad S_{\triangle DBG}=S_{\triangle EBG}+S_{\triangle EDG}$

$\quad\quad =S_{\triangle EBG}+S_{\triangle EAG}=S_{\triangle EBA}$,

$$S_{\Delta DCF}=S_{\Delta DCA}+S_{\Delta DFA}$$
$$=S_{\Delta DCA}+S_{\Delta DEA}=S_{\Delta ECA}。$$

而 $BE=CE$,

$\therefore$ $S_{\Delta EBA}=S_{\Delta ECA}$,

$\therefore$ $S_{\Delta DBG}=S_{\Delta DCF}$。

又 $AD$为$\angle BAC$的平分线,

$\therefore$ $D$到$AB$、$AC$之距离相等，即$\triangle DBG$的$BG$边上的高与$\triangle DCF$的$CF$边上的高相等。

故 $BG=CF$。

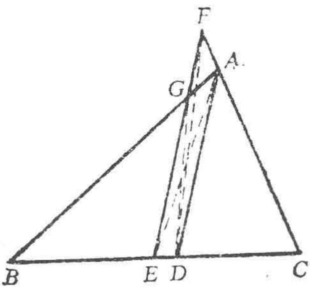



图 9

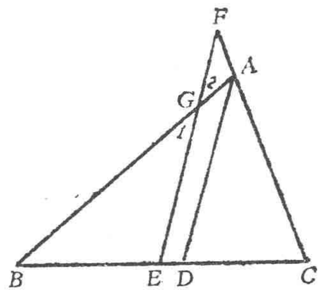


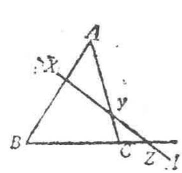

图 10

**分析6** 从图形来看$\triangle ABC$被一直线$EGF$所截，由梅氏定理*即得$\dfrac{AF}{CF}\cdot\dfrac{CE}{BE}\cdot\dfrac{BG}{AG}=1$，而$CE=BE$，只须证明$AF=AG$即可。

**证法6** 如图10。

---

* 梅氏定理(梅涅劳斯)：直线$l$分别与$\triangle ABC$的三边$AB$、$BC$、$CA$（或延长线)交于X、Z、Y，则$\dfrac{AX}{XB}\cdot\dfrac{BZ}{ZC}\cdot\dfrac{CY}{YA}=1$。



$\because$ $\triangle ABC$被一直线$EGF$所截，

根据梅氏定理，得

$$\frac{AF}{CF}\cdot\frac{CE}{BE}\cdot\frac{BG}{AG}=1.$$

而 $CE=BE$,

$$\therefore \frac{AF}{CF}\cdot\frac{BG}{AG}=1.$$

又 $EF\parallel AD$, $AD$平分$\angle BAC$.

$\therefore$ $\angle 2=\angle 1=\angle BAD=\angle CAD=\angle F$,

$\therefore$ $AF=AG$,

$$\therefore \frac{BG}{CF}=1,$$

故 $BG=CF$.

**分析7** 因所要证明的两线段$BG$和$CF$分别在$\triangle BEG$和$\triangle CEF$中(如图11)，故可通过正弦定理找出它们边角之间的关系，证明其中$\sin\angle 1=\sin\angle F$、$\sin\angle 2=\sin\angle 3$即可。

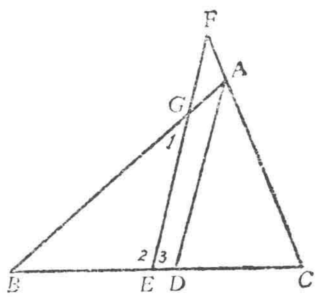


图 11

**证法7** 根据正弦定理，在$\triangle BEG$和$\triangle CEF$中，

$$\frac{BG}{\sin\angle 2}=\frac{BE}{\sin\angle 1},\quad \frac{CF}{\sin\angle 3}=\frac{CE}{\sin\angle F},$$

即 $$\frac{BG}{BE}=\frac{\sin\angle 2}{\sin\angle 1},\quad \frac{CF}{CE}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle F}.$$

$\because$ $EF \parallel AD$，$AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle 1 = \angle BAD = \angle CAD = \angle F$。

又 $\angle 2 = 180° - \angle 3$.

$\therefore$ $\sin\angle 1 = \sin\angle F$，$\sin\angle 2 = \sin\angle 3$，

$\therefore$ $\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{CF}{CE}$。

而 $BE = CE$，

故 $BG = CF$。

简评　证法1、2、3利用全等三角形或平行四边形证明线段相等，这是常用的方法；证法4、6、7通过不同的途径证明$\dfrac{BG}{BE} = \dfrac{CF}{CE}$或$\dfrac{BG}{CF} = 1$也是证明线段相等的方法。

注意观察图形的特点，以便添作有用的辅助线及寻找证题途径是平几证题的特点之一。如证法1、2、3中，中线的辅助线值得注意；证法5、6、7则通过观察图形的特点，找到较为简捷的方法。

3. 已知正方形$ABCD$，在$BC$边上任取一点$E$，作$EF \perp AE$交角$C$的外角平分线于$F$。求证：$AE = EF$。

**分析1**　要证$AE = EF$，即证$\angle AFE = 45°$，而$\angle ACE = 45°$，只需证明$\angle AFE = \angle ACE$，也就是证明$A$、$E$、$C$、$F$四点共圆即可。

**证法1**　连结$AF$，$AC$，如图12。

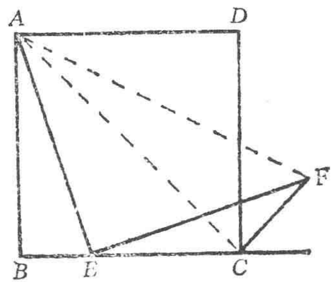



图 12

则 $\angle ACF=\angle ACD+\angle DCF$

$=45^\circ+45^\circ=90^\circ$.

而 $\angle AEF=90^\circ$,

$\therefore$ $A$、$E$、$C$、$F$四点共圆.

$\therefore$ $\angle AFE=\angle ACE=45^\circ$,

$\therefore$ $\triangle EAF$为等腰直角三角形,

故 $AE=EF$.

**分析2** 如图13，作$FG\perp BC$，则在$\triangle ABE$和$\triangle EGF$中有$\angle FEG=\angle BAE$，设法证明$GF=BE$即可，这可在$\triangle ECF$中通过边角关系，利用正弦定理而获证.

**证法2** 作$FG\perp BC$,

设 $\angle BAE=\alpha$,

则 $\angle FEC=\angle BAE=\alpha$.

又设正方形边长为$a$，$BE=b$，$FG=x$,

则 $EC=a-b$，$CF=\sqrt{2}x$.

而 $\angle EFC=45^\circ-\alpha$,

由正弦定理，得

$$\frac{\sqrt{2}x}{\sin\alpha}=\frac{a-b}{\sin(45^\circ-\alpha)}，即\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{a-b}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$$

而 $\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\therefore\quad \frac{x}{\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\frac{a-b}{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}},$$

$\therefore$ $x=b$，且$CG=b$,

$\therefore \quad EG = a, \; EF = \sqrt{a^2+b^2}$。

故 $\quad AE = EF$.

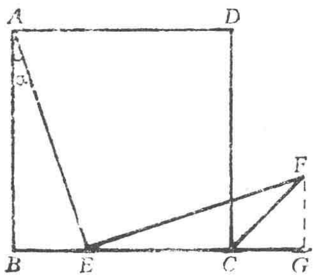



图 13

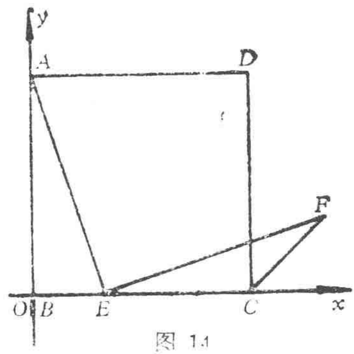



图 14

**分析 3** 建立如图14坐标系后，由$A$、$B$、$C$、$D$、$E$点的坐标，推导出$F$点的坐标，然后计算$|AE|$和$|EF|$.

**证法 3** 建立如图14的直角坐标系.

设 $A(0,a)$，$B(0,0)$，$C(a,0)$，$D(a,a)$，$E(b,0)$.

则 $k_{AE} = \dfrac{-a}{b}$，$k_{EF} = -\dfrac{1}{k_{AE}} = \dfrac{b}{a}$，

$\therefore$ $EF$所在的直线方程为：

$$y = \frac{b}{a}(x-b), \qquad ①$$

$CF$所在的直线方程为：

$$y = x - a. \qquad ②$$

联立①②解之得点$F$的坐标为：

$$\begin{cases} x_F = a+b, \\ y_F = b。 \end{cases}$$

$\therefore\quad |EF| = \sqrt{(a+b-b)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

而 $\quad |AE| = \sqrt{a^2+b^2}$,

故 $\quad |AE| = |EF|$.

**简评** 利用等腰三角形证明线段相等也是一种常用方法，如证法1.在证明有关边角关系问题时，如能把已知和求证的边角集中在三角形中，则可利用正弦定理或余弦定理来证之，如证法2.本题应用解析法（高中知识）时，解题思路较为简易.

4. 直线 $l$ 与⊙$O$相离，$OA\perp l$ 于 $A$，过 $A$ 作一割线交⊙$O$于 $B$、$C$，过 $B$、$C$ 分别作⊙$O$之切线 $BE$、$CF$ 且分别交 $l$ 于 $E$、$F$．求证：$AE=AF$.

**分析1** 因 $OA\perp l$，要证明 $AE=AF$，只需证明 $\triangle OEF$ 是等腰三角形，即证 $\angle OEF=\angle OFE$.

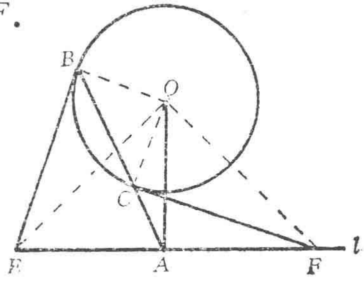


图 15

**证法1** 连结 $OB$、$OC$、$OE$、$OF$.

$\because\quad BE$、$CF$ 为⊙$O$的切线，

$\therefore\quad OB\perp BE$、$OC\perp CF$.

又 $\quad OA\perp l$.

$\therefore\quad O$、$A$、$E$、$B$ 四点共圆；

$\quad O$、$C$、$A$、$F$ 四点共圆，

$\therefore\quad \angle OEA=\angle OBC$,

$\quad \angle OFA=\angle OCB$.