

普通高等教育规划教材

GAODENG
SHUXUE

高等数学

李 砚 倪科社 刘 波 主编

中国环境出版社

普通高等教育规划教材

高等数学

李 砚 倪科社 刘 波 主编

中国环境出版社·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/李砚, 倪科社, 刘波主编. —北京: 中国环境出版社, 2013.5

ISBN 978-7-5111-1401-3

I. ①高… II. ①李…②倪…③刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 057880 号

出版人 王新程
责任编辑 曲 婷
责任校对 尹 芳
封面设计 彭 杉

出版发行 中国环境出版社
(100062 北京市东城区广渠门内大街 16 号)
网 址: <http://www.cesp.com.cn>
电子邮箱: bjgl@cesp.com.cn
联系电话: 010-67112765 (编辑管理部)
发行热线: 010-67125803, 010-67113405 (传真)

印 刷 北京中科印刷有限公司
经 销 各地新华书店
版 次 2013 年 6 月第 1 版
印 次 2013 年 6 月第 1 次印刷
开 本 787×1092 1/16
印 张 23.5
字 数 554 千字
定 价 35.00 元

【版权所有。未经许可, 请勿翻印、转载, 违者必究。】

如有缺页、破损、倒装等印装质量问题, 请寄回本社更换

《高等数学》编写人员

主 编 李 砚 倪科社 刘 波

编 写 李 砚 刘 波 姚 斌

王淑芬 崔淑莉 王继红

前 言

本教材按照高等数学课程的教学内容、目标和要求进行的编写。在编写过程中，充分注意到近几年来教学过程中遇到的问题，同时对高等数学课程教学内容的改革进行了研究与实践，在内容的取舍上，适当减少一些繁难的定理证明和复杂的运算技巧，突出基本概念、基本方法和基本技能。在知识结构上，既注意体现数学课程的循序渐进、由浅入深的特点，又尽可能对结构合理优化安排。在习题的选配方面，各章精选了一些概念性强、方法有代表性、难度适中的练习题，并在书末附有习题答案。

本教材由李砚、倪科社、刘波担任主编，并负责全书统稿和定稿。其中各章主要编写人员为：第一章、第二章、第三章、第四章和第五章由李砚和刘波编写，第六章由姚斌编写，第七章和第八章由王淑芬编写，第九章由崔淑莉编写，第十章由王继红编写。所有参编人员对全书进行了仔细的校对和修改。

由于编写水平有限，教材中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以便使本教材在今后教学实践的基础上更加完善。

编 者

2013 年 3 月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合、区间与邻域	1
二、函数的概念与性质	3
三、反函数与复合函数	5
四、初等函数	6
第二节 函数的极限	10
一、数列极限及性质	10
二、函数极限及性质	15
三、无穷小与无穷大	21
四、极限运算法则	23
五、极限存在准则和两个重要极限	27
六、无穷小的比较	33
第三节 函数的连续性与间断点	36
一、函数的连续性	36
二、函数的间断点	38
第四节 初等函数的连续性	40
一、连续函数四则运算的连续性	40
二、反函数与复合函数的连续性	40
三、初等函数的连续性	40
第五节 闭区间上连续函数的性质	42
一、最大值和最小值定理	43
二、介值定理与零点定理	44
本章小结	45
习题一	46
第二章 导数与微分	52
第一节 导数概念	52
一、引例	52
二、导数的定义	53
三、导数的几何意义	57
四、可导与连续的关系	57
第二节 函数的求导法则	58

一、函数的和、差、积、商的求导法则	58
二、反函数的求导法则	61
三、复合函数的求导法则	62
四、基本求导法则与导数公式	64
第三节 高阶导数	65
第四节 隐函数及其参数方程所确定的函数的导数	67
一、隐函数的导数	67
二、由参数方程所确定的函数的导数	70
第五节 函数的微分	72
一、微分的定义	72
二、微分的几何意义	74
三、基本微分公式与微分法则	75
四、微分形式的不变性	76
五、微分的应用	78
本章小结	79
习题二	80
 第三章 微分中值定理与导数的应用	83
第一节 微分中值定理	83
一、罗尔中值定理	83
二、拉格朗日中值定理	84
三、泰勒中值定理	85
四、柯西中值定理	88
第二节 洛必达法则	88
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	88
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	90
三、其他类型未定式	91
第三节 函数单调增减性及曲线的凸凹性	93
一、函数的单调性	93
二、曲线的凹凸性及拐点	95
第四节 函数的极值与最大值、最小值	97
一、极值的定义	97
二、极值存在的条件	97
三、最大值、最小值	100
第五节 函数图形的描绘	102
本章小结	105
习题三	105

第四章 不定积分	108
第一节 不定积分的概念与性质	108
一、原函数与不定积分的概念	108
二、基本积分表	111
三、不定积分的性质	112
第二节 换元积分法	114
一、第一类换元积分法(凑微分法)	114
二、第二类积分换元法	119
第三节 分部积分法	123
第四节 有理函数的积分	127
一、有理函数的积分	127
二、可化为有理函数的积分举例	129
本章小结	130
习题四	131
第五章 定积分及其应用	134
第一节 定积分的概念	134
一、引例	134
二、定积分的概念	136
三、定积分的几何意义	138
四、定积分的基本性质	138
第二节 微积分的基本定理	141
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	142
二、积分上限函数及其导数	142
三、牛顿-莱布尼兹公式	144
第三节 定积分的换元法和分部积分法	145
一、定积分的换元法	145
二、定积分的分部积分法	148
第四节 反常积分	150
一、无穷限的反常积分	150
二、无界函数的反常积分	151
第五节 定积分的应用	153
一、定积分的元素法	153
二、定积分的几何应用	154
三、定积分的物理应用	163
本章小结	164
习题五	166

第六章 向量代数与空间解析几何	169
第一节 空间直角坐标系	169
一、空间点的直角坐标	169
二、空间两点的距离	170
第二节 向量代数	172
一、向量的概念	172
二、向量的线性运算	173
三、向量的坐标	175
四、向量的模、方向角、投影	177
五、向量的数量积与向量积	180
第三节 平面及其方程	184
一、平面的点法式方程	184
二、平面的一般方程	185
三、两平面的夹角	186
第四节 空间直线及其方程	188
一、空间直线的一般方程	188
二、空间直线的对称式方程与参数方程	189
三、两直线的夹角	191
四、直线与平面的夹角	192
第五节 曲面及其方程	193
一、曲面方程的概念	193
二、旋转曲面	194
三、柱面	195
四、二次曲面	196
第六节 空间曲线及其方程	200
一、空间曲线的一般方程	200
二、空间曲线的参数方程	201
三、空间曲线在坐标面上的投影	202
本章小结	203
习题六	208
第七章 多元函数微分法及其应用	211
第一节 多元函数的基本概念	211
一、平面点集、 n 维空间	211
二、多元函数的概念	213
三、二元函数的极限	214
四、二元函数的连续	216
第二节 偏导数	217
一、偏导数的定义及其计算方法	217

二、二元函数偏导数的几何意义	220
三、高阶偏导数	221
第三节 全微分	222
一、全微分的定义	222
二、可微、偏导数及连续之间的关系	223
三、全微分在近似计算中的应用	224
第四节 多元复合函数和隐函数的求导法则	225
一、多元复合函数的求导法则	225
二、隐函数求导法则	229
第五节 偏导数的几何应用	231
一、空间曲线的切线与法平面	231
二、曲面切平面与法线	232
第六节 多元函数的极值及其最值	235
一、极值的定义	235
二、极值存在的条件	236
三、最大值与最小值	237
四、拉格朗日乘数法	239
本章小结	240
习题七	241
第八章 重积分	244
第一节 二重积分的概念与性质	244
一、二重积分的概念	244
二、二重积分的性质	246
第二节 二重积分的计算方法	248
一、直角坐标下二重积分的计算	248
二、利用极坐标计算二重积分	255
第三节 三重积分	258
一、三重积分的概念	258
二、三重积分的计算	259
第四节 重积分的应用	264
一、曲面的面积	264
二、质心	266
本章小结	268
习题八	270
第九章 微分方程	272
第一节 微分方程的基本概念	272
一、引例	272

二、微分方程的基本概念	274
第二节 一阶微分方程	277
一、可分离变量方程	277
二、齐次方程	279
三、一阶线性微分方程	281
四、伯努利方程	286
第三节 可降阶的高阶微分方程	287
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	288
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	289
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	290
第四节 二阶常系数微分方程	292
一、通解的结构	293
二、二阶常系数齐次线性微分方程	295
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	300
第五节 微分方程的应用实例	306
一、物体冷却过程的数学模型	306
二、动力学问题	307
三、人口模型	309
本章小结	311
习题九	313
 第十章 无穷级数	 316
第一节 常数项级数的概念与基本性质	316
一、常数项级数的概念	316
二、常数项级数的基本性质	318
第二节 常数项级数敛散性的判别方法	320
一、正项级数及其敛散性的判别方法	320
二、交错级数及其敛散性的判别方法	324
三、绝对收敛与条件收敛	326
第三节 幂级数	328
一、函数项级数的基本概念	328
二、幂级数及其敛散性	328
三、幂级数的运算	332
四、函数展开成幂级数	334
五、幂级数在近似计算中的应用	339
本章小结	341
习题十	342
习题答案与提示	345
参考文献	364

第一章 函数与极限

高等数学的研究对象是变量，用函数来描述变量之间的依赖关系，极限方法是研究函数变化的一种基本方法，是微积分学的基础.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念及其性质.

第一节 函 数

一、集合、区间与邻域

1. 集合

集合是基本的数学概念，用来研究某些事物组成的集体，如，一个班级的全体学生、全体奇数，等等.这些由某类特定事物组成的集体就是集合.一般地，集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的全体，构成这个集合的事物或对象称为该集合的元素（简称元）.

下面是集合的几个例子.

例 1 全体整数.

例 2 直线 $x+2y-1=0$ 上所有的点.

例 3 小于等于 5 的所有正整数.

通常，用大写字母 A, B, C, X, Y 等表示集合，用小写字母 a, b, c, x, y 等表示集合的元素.若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a \in A$ ，读作 a 属于 A ；若 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a \notin A$ ，读作 a 不属于 A .

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例 3；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例 1、例 2.

集合的表示法：

(1) 列举法.即按任意顺序列出集合的所有元素，并用“ $\{ \}$ ”括起来.用列举法表示集合必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复；

(2) 描述法.设 $M(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则， A 为满足 $M(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为 $A = \{a | a \text{ 满足 } M(a)\}$.

对于数集，习惯上将全体自然数的集合记作 N ；全体整数的集合记作 Z ；全体有理数的集合记作 Q ；全体实数的集合记作 R .有时，在数集的字母右上角标上“ $*$ ”表示该数集内排除 0 的集，标上“ $+$ ”表示该数集内排除 0 与负数的集.

全集与子集：

(1) 全集.是由所研究的所有事物构成的集合,记作 U .全集是相对的.不包含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

(2) 子集.设 A, B 是两个集合,如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 为 B 的子集,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .

集合的运算:

集合的基本运算有交、并、补、差等.

(1) 交集.设 A, B 是两个集合,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(2) 并集.设 A, B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(3) 补集.全集 U 中所有不属于集合 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 A^c 或 $\bar{A}$,即 $A^c = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$.

(4) 差集.设 A, B 是两个集合,属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记作 $A - B$,即 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

集合的运算律:

设 A, B, C 是任意三个集合,则集合的运算满足以下法则:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

2. 区间与邻域

首先介绍区间的概念.设 a, b 为实数,且 $a < b$.

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a, b 为端点的开区间,记作 (a, b) ,即 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

(2) 满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数 x 的集合,称为以 a, b 为端点的闭区间,记作 $[a, b]$,即 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.

(3) 满足不等式 $a < x \leq b$ (或 $a \leq x < b$) 的所有实数 x 的集合,称为以 a, b 为端点的半开区间,记作 $(a, b]$ (或 $[a, b)$),即 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ (或 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$).

以上三类区间为有限区间.有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b - a$,称为区间的长度.此外,还有无限区间,例如:

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, \quad (-\infty, b) = \{x | x < b\}, \quad (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

邻域也是一类经常用到的数集概念.设 δ 是任意正数,在数轴上以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,称为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,记作 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

如图 1-1 所示.

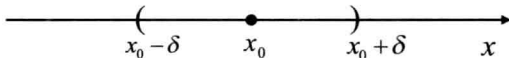


图 1-1

若点 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0, \delta)$ 不包含点 x_0 , 则称为点 x_0 的去心邻域, 记作 $U^\circ(x_0, \delta)$, 即

$$U^\circ(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

二、函数的概念与性质

1. 函数的概念

在某个问题的研究过程中, 保持不变的量称为常量, 可以取不同数值的量称为变量. 函数是用来描述变量间在运动变化中满足一定条件关系的数学模型. 先看下面的例子.

例 4 设有一物体做自由落体运动, 下落的时间为 t , 开始下落的时刻为 $t=0$, 则该物体下落的距离 s 与时间 t 之间有如下关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

例 5 设圆的半径为 r , S_n 为圆内接正 n 边形的周长, 则圆内接正 n 边形的周长 S_n 与圆半径 r 之间的关系为:

$$S_n = 2nr \sin \frac{\pi}{n}.$$

当 n 在 $3, 4, 5, \dots$ 自然数中任意取定一个数值时, 按上式 S_n 就有确定的数值与之对应.

上述例题中, 均涉及两个相互联系的变量, 并且两个变量按照一定的规则变化, 只要指定其中一个变量的值, 另一个变量就可按相应的法则确定与之相对应的值, 两个变量间的这种对应关系, 称为函数关系. 下面对函数概念给出确切的定义.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 称数集 D 为这个函数的定义域, 称 x 为自变量, y 为因变量. 当 x 遍取 D 中的数值时, 对应的因变量 y 所取值的全体称为这个函数的值域, 记为 $f(D)$ 或 R_f .

有关函数定义的说明:

(1) 构成函数的基本要素是定义域 D 及对应法则 f . 判断两个函数是否相同, 取决于 D 及 f .

(2) 定义中对于定义域 D 中的每个变量 x , 根据对应法则 f , 要求有唯一的 y 与之相对应, 此时的函数称为单值函数, 否则称为多值函数. 在本书中, 若无特别说明, 函数均指

单值函数.

(3) 函数定义域的确定. 实际问题中, 定义域通常根据实际意义来确定; 对于用抽象的算式表达的函数, 通常约定: 函数的定义域是自变量所能取的使得算式有意义的一切实数值, 这种定义域称为函数的自然定义域.

例 6 研究函数 $y = x$ 与函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系.

解 函数 $y = x$ 的定义域 $x \in (-\infty, +\infty)$, 即 $x \in R$; 而函数 $y = \frac{x^2}{x}$, 在 $x = 0$ 处无意义,

因此, 函数 $y = x$ 与函数 $y = \frac{x^2}{x}$ 定义域是不同的, 故两者是不同的函数关系.

函数的表示法主要有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法).

在解析法中, 若变量 y 与变量 x 的函数关系是用形式 $F(x, y) = 0$ 表示的, 则称 y 是 x 的隐函数; 若变量 y 与变量 x 的函数关系是用形式 $y = f(x)$ 表示的, 则称 y 是 x 的显函数.

若一个函数的自变量在定义域的不同范围, 对应法则用不同的表达式来表示, 通常称该函数为分段函数. 例如符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

也是分段函数.

2. 函数的性质

(1) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. 函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的, 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的; 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $y = x^2$ 不是单调的.

(2) 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称. 奇函数的图形关于原点对称.

注意: 并不是所有的函数均能分奇偶.

例如, 函数 $y = x^2$ 为偶函数. 函数 $y = x^3$ 为奇函数. 函数 $y = x^2 + x^3$ 是非奇非偶的.

(3) 周期性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个正数 l , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $(x \pm l) \in D$, 且 $f(x \pm l) = f(x)$ 恒成立, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数, 称 l 为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期. 注意: 并不是所有的周期函数都有最小正周期.

例如, 函数 $y = \sin x$ 的周期为 2π . 函数 $y = \tan x$ 的周期为 π . 函数

$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

是周期函数, 任何正有理数都是它的周期, 但此函数无最小正周期.

(4) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M , 使得对任一 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 在 X 上是有界的. 否则称函数 $y = f(x)$ 在 X 上是无界的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的, 在 $(1, 2)$ 内是有界的.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 如果对于每一个 $y \in W$, 有唯一的满足 $f(x) = y$ 的 $x (x \in D)$ 值与之对应, 则得到一个定义在 W 上以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 称之为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上, 我们用 x 表示自变量, y 表示因变量, 所以通常把 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$.

有关反函数概念的说明:

(1) 在定义域上, 若函数 $y = f(x)$ 是单调函数, 则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 必定存在.

(2) 相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$, 原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 把直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 这两个图形关于直线 $y = x$ 对称.

读者可自行绘出函数 $y = x^3$ 及其反函数 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图形并加以观察.

(3) 三角函数是周期函数, 所以在其各自的自然定义域上不是一一对应的, 因此不存在反函数. 对于这样的函数 $y = f(x)$, 我们通常将函数限制在其定义域内的某个单调区间上, 此时所得反函数又称主值分支, 反函数值域称为主值区间.

2. 复合函数

对于一些函数, 例如 $y = \lg(x^2 + 1)$, 可以把其看成是将 $u = x^2 + 1$ 代入到 $y = \lg u$ 中得到的. 像这样在一定条件下, 将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算, 而得到的函数称为复合函数. 下面给出复合函数的定义.

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ , 且其值域 $R_\varphi \subset D_f$, 则由下式确定的函数

$$y = f[\varphi(x)], \quad x \in D_\varphi$$

称为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 称 u 为中间变量.

有关复合函数概念的说明:

(1) 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.如函数 $y = \sqrt{u}$, $u = \sin x - 2$ 就不能复合成一个复合函数,这是因为对函数 $u = \sin x - 2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内任一 x 所对应的 u , 都使 $y = \sqrt{u}$ 无意义.

(2) 两个以上的函数所构成的复合函数,只要它们顺次满足构成复合函数的条件即可.如 $y = e^{1+\sqrt{1+x^2}}$ 就是由 $y = e^u$, $u = 1+v$, $v = \sqrt{w}$, $w = 1+x^2$ 四个函数复合而成.这时 u , v , w 均称为中间变量.

例 7 已知 $f(x) = \frac{x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$.

解

$$f[f(x)] = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}.$$

例 8 假设有一个美国人准备去加拿大度假,他把美元兑换成加拿大元时,币面数值增加 12%,但因故未能去成,于是他又将加拿大元兑换成美元,这时币面数值减少 12%,问经过这一来一回的兑换后,他亏损了吗?

解 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑换成美元数.如果此人经过这一来一回的兑换,不亏不盈的话, $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 应互为反函数,也即复合函数

$$f_2(f_1(x)) = x.$$

如果此人亏了,则应有 $f_2(f_1(x)) < x$.

由题意可知

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + x \cdot 12\% = 1.12x, \quad x \geq 0, \\ f_2(x) &= x - x \cdot 12\% = 0.88x, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

则

$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x.$$

故 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 不互为反函数,即此人经过这一来一回的兑换后,他亏损了一些钱.

比如此人把 1000 美元兑换成加拿大元,然后再将其兑换成美元,这时只兑换得 985.6 美元,亏损了 14.4 美元.

四、初等函数

在初等数学中已经讲过的常量、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.为方便今后的学习和查阅,将它们的表达式、图形和简单性质列表见表 1-1 所示.