面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

近世代数基础

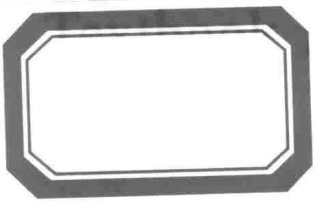
第二版

刘绍学

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材

Series for 21st Century



近世代数基础

Jinshi Daishu Jichu

第二版

刘绍学

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果。全书分为基础篇和选学篇。与第一版相比，基础篇中略去了一些“枝叶”以突出基础，选学篇中则添加有限单环和布尔代数以尝试将非传统内容加入近世代数教科书中。

基础篇部分强调群的背景——对称，介绍了抽象群、环、域的基本概念、基本性质和基本内容，以及一些具体群（变换群、置换群、平面运动群）、环（多项式环、函数环、剩余类环）和域（数域、有限域）及其和抽象群、环、域的关联。选学篇部分除介绍近世代数课程的一些传统内容，如有限交换群的结构定理、Galois理论外，还介绍了自由群、有限单环的结构定理、布尔代数、计算代数几何初步——Gröbner基等。

本书可作为高等学校数学类专业的教科书，也可供相关专业师生和有关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

近世代数基础 / 刘绍学编. -- 2版. -- 北京：高等教育出版社，2012.12

ISBN 978-7-04-034836-1

Ⅰ.①近… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①抽象代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O153

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第236964号

策划编辑	胡 颖	责任编辑	张晓丽	封面设计	张申申	版式设计	马敬茹
插图绘制	邓 超	责任校对	金 辉	责任印制	尤 静		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京四季青印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16		
印 张	15.75	版 次	1999年10月第1版
字 数	280千字		2012年12月第2版
购书热线	010-58581118	印 次	2012年12月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	25.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物料号 34836-00

第二版序言

2009 年, 在和彭联刚教授一次聚会时, 他谈起关于近世代数的一个教学想法: "先讲群、环、域的基本概念、基本知识, 在学生有了一定的代数训练后, 再选择有关群、环、域的一些进一步课题讲, 效果会好一些, 选题也可更自由一些。也许可以有一本书, 分成基础篇、选学篇两部分"。我觉得他的想法很好, 也是作一次尝试, 这次修订《近世代数基础》一书时, 就完全照此处理。把原书中基础部分, 略经去叶削枝 (如删去原书第一章的 §2, 但也为有限域新添了一个例子) 以突出基础后, 组成基础篇, 其余部分略有补充后放进选学篇。由于这样安排下的选学篇留给编者一定的自由空间, 所以我新写了两节。

基础篇是本课程的主体。这里最重要也是较难掌握的概念是同态。同态在大学近世代数课程中的地位有点像大学数学分析课程中的极限概念。大学数学分析以极限为灵魂, 极限以及由它定义的微商积分贯穿和控制了整个课程。大学近世代数以同态为核心概念, 同态以及由它导出的商群 (商环)、正规子群 (理想) 贯穿和控制了整个课程。例如, 就说本课程中域论的主要对象 —— 分裂域, 其实体就是 (一元多项式环关于一个不可约多项式生成的理想的) 商环, 而研究它的工具 Galois 群就是此商环的一些自同构组成的群。极限和同态是两种不同类型的概念, 都是许多重要概念的出发点或基石。在基础篇中把同态 (以及商群、商环、正规子群、理想) 学好是必需的 (否则就寸步难行), 也是值得称道的收获。

在基础篇中群、环、域这三颗简单纯净的种子一步一步地生长, 虽未花叶满枝, 但已现亭亭玉立的身影。研究着她们的成长过程, 除了获得新鲜的知识外, 很多人还有类似的体会: 对和公理体系打交道习惯了, 对每步推理都要有根据习惯了, 对于推理的对错敏感了, 在似是强加于人的处理中有时能领悟到它是自然的, 是水到渠成的, 终于感受到什么叫做"彻底清楚, 完全明白"的境界, 等等。我们相信, 这些都应该是可以从基础篇中学到和感受到的。这也应该是学理工的同学应学习大学近世代数课的理由。

如果学完基础篇之后, 有时间再从选学篇中学习一两个课题, 经历一下对难点的克服, 也享受一下红花绿叶的美好, 那就更有益了。

有了选学篇, 我几乎立即就酝酿如何写好有限单环这一节, 而在这之前我始终没敢有把它放在环论章末的尝试。有限交换群和有限单环都有完美的结构定

理。对前者的讨论中主要摆弄元素而使用整数的运算 (整除理论), 而对有限单环的刻画中随时要和同态打交道并充分使用同态的运算, 这就考验着你对同态掌握的灵活程度, 这一点也是我写它的原因: 有机会多学一点同态及其运算是有益的。另一新节 —— 布尔代数, 则因为它是“实际问题 —— 数学理论 —— 问题解决”的精巧而漂亮的例子而被写入。布尔代数只涉及元素和元素的运算, 是初等的和容易掌握的。它与 Zorn 引理一节更像是阅读材料, 提供给读者在学习基础篇而翻看选学篇时自己去选读。选学篇的第八章, 或把选学篇的前三章的前两节放在一起都可作为大学近世代数课之后的选课。有了选学篇提供的自由空间, 把一些非传统的合适的内容写进近世代数教科书中是有益的尝试。

从我的老师傅仲孙先生的讲课和言论中可以看出, 傅先生认为学习一个定理的境界有三: 最低境界, 明白定理内容, 读懂证明推理; 较高境界, 掌握证明的思路; 最佳境界, 体会到这个证明思路是如何想 (产生) 出来的。最佳境界是难达到的, 但在学习中我们要以这样的目标共勉, 并先在“小定理”上去努力实现。达到较高境界的试金石是能“照猫画虎”。例如, 在学完“群的同态、商群、正规子群”后, 若能独立地完成“环的同态、商环、理想”的讨论, 则能说明你对前者的“证明思路”已掌握了。本书中提到的一些“照猫画虎”的建议, 都是帮助你检验是否掌握了“猫”的证明思路。学习定理, 一定要达到这个较高境界。

读名家的名著常能帮助我们领会定理的证明思路。学习本书时, 能多参考 M. Artin 著的 *Algebra* 是非常有益的。此书已由湘潭大学郭晋云教授译成中文 (见参考文献), 在国内是容易找到的。

感谢四川大学彭联刚教授, 他的一番话使本书换了新颜, 也因此增添了两节新内容。感谢山东大学黄华林教授, 他先是把原书中在印刷和叙述上的错误列表寄给我, 后又应我请求把他在用此书教学时所补充的习题整理好寄给我。错误在第二版中已一一改正, 而寄来的习题分别补充在相应的章末习题中的最后位置。这次没能继续和高等教育出版社张小萍同志合作, 与胡颖、张晓丽同志的合作是和谐的、愉快的。

这次修订工作得到北京师范大学数学科学学院的资助, 特此致谢。

当我完成对本书第二版的修订工作后, 重温常回忆起的人生一幕, 百感交集: 1946 年, 家庭生活无着落, 若没有父亲当时对我说的一句话“你去念书吧! 家中的生活你不要管”, 我该是连近世代数为何物也不知道的。怀念父母, 谨以此书纪念母亲逝世 50 周年、父亲逝世 40 周年。

书中有不当之处, 请读者指正。

刘绍学

2012 年 6 月于北京师范大学

第一版序言

代数学是以数、多项式、矩阵、变换和它们的运算, 以及群、环、域和模等为研究对象的学科。简单地说, 代数学是研究代数系统 (带有一些运算的集合) 的。我们知道, 数、多项式和矩阵的出现是由于刻画现实世界中几何量和物理量的需要。同样, 群等也是由于直接或间接刻画新的几何量和物理量的需要而出现的。这样, 研究这些对象就有两种途径: 第一种是紧密结合它们出现的背景去研究, 例如用群论方法去研究晶体的分类等; 第二种是把数、多项式、矩阵、群等作为数学对象去研究, 这时常和它们出现的背景相去甚远, 或者几乎完全脱离这些背景。然而这两种研究应该是相辅相成浑然一体的。

在编写本书时, 我们有以下的一些考虑。

一、在本课程中我们试图进行一些探索, 在内容上除了第二、三、四章给出本课程的传统内容外, 我们安排了第一章的“对称与群”和附录的“多元多项式环”。“对称与群”强调抽象代数系统的出现是由于刻画物理量和几何量的需要。“多元多项式环”中主要介绍 Gröbner 基、Buchberger 算法, 它们是计算代数几何的基石, 同时又是“初等”的, 其难度和深度适中, 是能够放在基础课中的。这使我们有一个恰当的方式来介绍多元多项式环这个重要的具体环, 并能突出算法这个有用的数学概念以及代数与计算机的联系。虽然讲此内容可能有时间上的困难, 但为了保留这一点探索意图, 并把希望寄托于未来, 因此把它作为附录放在原来第五章的位置。

二、讲抽象群、环、域理论的同时, 较深入地介绍一些具体群、具体环和具体域。在本教程中我们选择了变换群 (包括运动群、置换群), 这里没有足够的篇幅谈论矩阵群是一个遗憾。对域论, 我们选择了多项式的分裂域 —— Galois 理论; 对环论, 选择了复数域上多元多项式环 —— Gröbner 基理论。这些具体的群、环、域不但有助于我们学习抽象理论, 同时也使我们看到代数的一些应用: 平面有限对称图形的分类, 几何作图不能问题, 根式解五次方程不能问题, 编码问题, 初等几何的机器证明等。

三、关于群、环、域、模都有彼此类似的基本概念: 子系统 (子群、子环、子域、子模), 商系统 (商群、商环、商模), 同态和同构, 等等, 以及作为它们支柱的一些具体例子, 这些是代数的基础。当然还要对群、环、域、模中的每一个至少

选择一个较深入的结构定理，否则内容将是散漫的而无重心和方向。对环论，我们选择了整除理论和 Gröbner 基理论。对域论，是分裂域理论 —— Galois 理论。对群论，是 Sylow 定理和有限交换群的结构定理，而且强调了后者，这不仅因为它是一个典型结构定理 (分解定理)，而且也顺便为模论提供了一个好的结果。

四、一个好的数学思想是一定会在不同场合下重复出现的，让初学者看到这些重复是有益的。在本教程中分解型结构思想重复出现在有限交换群的结构定理和代数簇的分解定理中，当然它们又都是与整数和一元多项式的唯一分解一脉相承的。Galois 对应思想重复出现在 Galois 理论中和代数簇和理想的对应中。

五、本教材中我们对基本内容努力写得细致一些，这使得读者甚至可以自学。同时在某些适当的地方简要 (略去证明) 介绍一些进一步的情况，好像在爬山到达一定高度时，停下来欣赏一下周围的景色，这对提高游兴是有益的。然而，用这种方式去介绍五次方程不能用根式解问题是一种不得已！它太重要了，不能略去；另一方面无法 (没有学时) 把它作为基本内容放在本基础课中。

六、本教材的基本内容也就是我们认为抽象代数基础课应该提供给数学专业学生的必需内容。也许有的材料 (如自由群或 Gröbner 基等) 没有时间去讲，然而在教材中提供方便，使得读者有机会知道这些内容是应该的。但无论如何，内容和学时之间是有矛盾的。也许可由任课教师选讲其中部分章节，也可采用傅仲孙教授提倡的讲法：讲重点，讲难点，讲思路，讲体会，利用本教材写得较细致的方便而把基本推导留给学生自学，这样“精讲”加“自学”的方式能完成主要内容的学习。

七、习题是重要的。我们认识到，学一门课的同时，做一个有代表性的较系统的大习题 (学年作业) 是非常有益的。在有限交换群的结构定理之后，我们布置了矩阵的 Jordan 标准形的模论证法以及主理想整环上有限生成周期模的结构定理的证明这样的大习题。我们相信，相对独立地完成这个大习题的读者定会对本基础课有较亲切的理解而受益匪浅。

我于 1996 年冬至 1997 年夏完成初稿，1997 年秋至 1998 年夏在山东大学等几所大学试用。1998 年秋，四川大学、厦门大学和北京师范大学参加试用的教师们在北京作了逐章逐节地讨论和修改，最后由彭联刚 (四川大学) 和林亚南 (厦门大学) 执笔完成并编写了习题。书中有关用计算机计算的例子都是罗运伦同志提供的。这样，这本书实际上是一个集体作品。

在本书中，作者常在一些地方和读者交流体会和理解，有时提到一些补充资料。这些不属于正文的“旁白”都用楷体字排出。

特别感谢北京师范大学数学科学学院两届系领导黄惟明、余玄冰以及张英

伯、何青等同志，没有他们的推动和鼓励，这本书是不可能出现的。感谢审稿人石生明教授，他仔细地审阅全书，指出若干疏漏和需改进的地方，提出了建议，为本书增色许多。继过去在代数数论教材编审小组的长期共事，这次与责任编辑张小萍同志的再度合作，使我感到特别愉快。感谢石生明同志和张小萍同志，是在他俩的建议下，我在交稿前最后时刻写出了编码这一节。在近世代数教科书中介绍一点编码 —— 代数学的一个最直接而重要的应用，是自然的和必要的，读者会喜欢它的。

本书荣幸地得到北京师范大学、四川大学、厦门大学三校教务处，天元基金委，教育部“面向 21 世纪教学内容和课程体系改革”项目以及普通高等教育“九五”国家重点教材项目的资助，作者在此表示衷心的感谢。

限于作者水平，书中定有许多不妥的地方，敬请读者指正。

刘绍学

1998 年 12 月于北京师范大学

目　录

第一部分　基　础　篇

第一章　对称与群 **3**

§1.1　平面图形的对称与群 3

1.1.1　运动群 3

1.1.2　平面图形对称的数学定义 5

§1.2　多项式的对称与群 6

第二章　群 **9**

§2.1　群 9

2.1.1　群的定义 9

2.1.2　群的同构和反同构 11

2.1.3　一个写法问题 13

§2.2　子群 15

2.2.1　一点准备 16

2.2.2　子群的定义 17

2.2.3　两类特殊子群 19

§2.3　生成元集, 循环群 21

2.3.1　生成元集 21

2.3.2　循环群 25

§2.4　子群 (续) 27

2.4.1　平面运动群的有限子群 27

2.4.2　S_n 的子群 29

§2.5　商群 31

2.5.1　合同关系与合同划分 31

2.5.2　商群 33

2.5.3　商群与正规子群 34

§2.6 同态 · · · · · 37
2.6.1 同态的定义 · · · · · 37
2.6.2 同态与商群 · · · · · 39
§2.7 有限群 · · · · · 42
2.7.1 有限群中的数量关系 · · · · · 42
2.7.2 交换群的子群存在问题 · · · · · 43
2.7.3 Sylow 子群的存在问题 · · · · · 44
§2.8 单群 · · · · · 46
§2.9 群在集上的作用 · · · · · 50
2.9.1 G-集的定义 · · · · · 50
2.9.2 群的表示与 G-集 · · · · · 50
2.9.3 G-集的结构 · · · · · 52
2.9.4 G-集的应用 · · · · · 54

第三章 环与域 · · · · · 59
§3.1 环与域 · · · · · 59
3.1.1 环的定义及基本性质 · · · · · 59
3.1.2 子环 · · · · · 63
3.1.3 同态、理想、商环 · · · · · 64
§3.2 环的构造 · · · · · 71
3.2.1 模仿由 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Q}$ · · · · · 71
3.2.2 模仿由 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ · · · · · 74
3.2.3 模仿由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ · · · · · 77
3.2.4 由群作代数 · · · · · 79
§3.3 多项式环 · · · · · 80
3.3.1 R 上一元多项式函数环 · · · · · 81
3.3.2 R 上一元多项式环 · · · · · 82
3.3.3 两者之间的关系 · · · · · 83
3.3.4 R 上多元多项式环 · · · · · 84
§3.4 交换环 · · · · · 86
3.4.1 整环的特征 · · · · · 86
3.4.2 整环的商环 · · · · · 87
3.4.3 素理想和极大理想 · · · · · 88

§3.5 整环的整除理论 · · · · · 90
3.5.1 出发点 · · · · · 90
3.5.2 整除理论的基本概念 · · · · · 92
3.5.3 唯一分解环、Euclid 环、主理想整环 · · · · · 93
3.5.4 多项式环的整除理论 · · · · · 98

第四章 多项式的分裂域 · · · · · 104
§4.1 域 · · · · · 104
4.1.1 扩域 · · · · · 104
4.1.2 有限扩域 · · · · · 106
4.1.3 代数扩域 · · · · · 106
4.1.4 一元多项式及其根的性质 · · · · · 107
§4.2 分裂域 · · · · · 109
4.2.1 单扩域 · · · · · 109
4.2.2 分裂域 · · · · · 111
4.2.3 分裂域的存在性 · · · · · 112
4.2.4 分裂域的唯一性 · · · · · 113
§4.3 有限域 (分裂域的一个应用) · · · · · 115
4.3.1 有限域的存在性 · · · · · 115
4.3.2 有限域的结构 · · · · · 117
4.3.3 例子 · · · · · 118
§4.4 正规扩域 (分裂域续) · · · · · 121
4.4.1 正规扩域的定义 · · · · · 121
4.4.2 正规扩域 = 分裂域 · · · · · 121
4.4.3 分裂域是单扩域 · · · · · 123
4.4.4 分裂域的 Galois 群 · · · · · 124
§4.5 尺规作图不能问题 · · · · · 126

第二部分 选 学 篇

第五章 群论 · · · · · 135
§5.1 有限交换群的结构定理 · · · · · 135
5.1.1 一些准备 · · · · · 135
5.1.2 分解成 p-加群的直和 · · · · · 136
5.1.3 p-加群的再分解 · · · · · 137

5.1.4 群的构造 · 139
5.1.5 主要定理 · 140
5.1.6 例子 · 141
§5.2 群的构造, 自由群 · 143

第六章 环论与模论 · 151
§6.1 环的表示与模 · 151
6.1.1 表示与模 · 151
6.1.2 模的基本概念 · 154
6.1.3 模论观点下的有限交换群结构定理 · · · · · · · · · · · · · · · · · 156
§6.2 有限单环的结构定理 · 158
6.2.1 定义及例子 · 158
6.2.2 模论方面的准备 —— 单模对应的表示 · · · · · · · · · · · · · · · · 159
6.2.3 单模给出的有限单环的表示 · 161
6.2.4 主要定理 · 161
§6.3 布尔代数 · 164
6.3.1 布尔代数的背景 · 164
6.3.2 布尔代数 · 166
6.3.3 布尔函数与布尔多项式函数 · 167
6.3.4 积和标准布尔多项式 · 168
6.3.5 布尔函数与布尔多项式函数 (续) · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 169
6.3.6 和积标准布尔多项式 · 170
6.3.7 回到开关电路 · 170
§6.4 Zorn引理 · 171

第七章 域论 · 175
§7.1 Galois 基本定理 · 175
§7.2 一个例子 · 183
§7.3 用根式解代数方程问题 · 188
§7.4 有限域的一个应用 —— 编码 · 193

第八章 多元多项式环 (代数几何初步) · · · · · · · · · · · · · · · · · · 202
§8.1 代数簇 · 202
§8.2 Hilbert 基定理 · 206
§8.3 代数簇的分解 · 210

§8.4 Gröbner 基 · · · · · 214
§8.5 Buchberger 算法 · · · · · 220
§8.6 初等几何的机器证明 · · · · · 226

参考文献 · · · · · **231**

符号表 · · · · · **232**

索引 · · · · · **233**

第一部分

基础篇

第一章　对称与群

抽象代数是以群、环、域、模为主要研究对象的学科. 本章将引进群 (带有一个二元运算的集合) 的概念, 并特别强调群这一概念出现的背景. 学习完本章后, 我们期望读者能对“对称即群”有一个初步但明确的理解.

§1.1　平面图形的对称与群

我们来探讨平面上有限图形的对称问题. 人们都会说圆比正方形更对称些, 正六边形比正三角形更显得对称一些. 如果问正三角形和正方形谁更对称一些, 该怎么回答呢?

看来需要把图形的对称这个直观概念说得更确切一些, 也就是要给它一个定义, 一个反映客观实际, 能为大家接受的定义.

有某种对称的图形, 就是经过某些运动后仍能回到自身的图形. 例如, 圆经过绕圆心的旋转以及绕过圆心的直线的翻折都是回到自身, 而正方形只能绕其中心旋转 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ 或绕其对角线或对边中点连线所作的翻折才能回到自身, 也许这就是圆比正方形更对称一些的解释. 用使图形回到自身的所有运动来刻画这一图形的对称应该是自然的, 也符合我们对对称的直观感觉.

1.1.1　运动群

在这里我们回忆一下平面及其运动的概念.

用朴素平面几何的说法, 可把平面想象为能向各方无限延伸的黑板面, 我们还有平面上的点及两点距离的概念. 用解析几何的说法, 平面就是集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$, 其中 $\mathbb{R}$ 是实数域, 以及点 $A=(a_1,a_2), B=(b_1,b_2)$ 之间的距离 $|AB| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$. (用线性代数的语言, 平面也就是二维欧氏空间.) 今后我们把关于平面 P 的这两种刻画 —— 几何直观的刻画和代数语言的刻画 —— 等同起来.

定义 1.1.1. M 是任意一个非空集合, M 的变换是指 M 到自身的一个对

应. M 的一一变换是指 M 到自身上的一一对应.

定义 1.1.2. 平面 P 的一个运动是指平面 P 的一个保距变换. 亦即若 ϕ 是平面 P (点集) 的一个变换, 且对 P 上任意点 A 和点 $B, \phi(A)$ 和 $\phi(B)$ 的距离等于 A 和 B 的距离, 则称 ϕ 为平面 P 的一个运动. 易见平面 P 的运动是 P 的一一对应.

用平面几何的方法, 不难证明下面的

定理 1.1.3. 设 ϕ 是平面 P 的一个运动且保持 P 中一个点 A 不动, 即有 $\phi(A) = A$ (此时称 A 为 ϕ 的不动点), 则 ϕ 或是绕 A 点的旋转, 或是关于过 A 点直线的翻折.

(证明提示: 在平面 P 上任选点 B 和点 C, 使 A、B、C 不共线. 若三角形 ABC 与三角 $\phi(A)\phi(B)\phi(C)$ 转向相同, 则 ϕ 必是旋转; 若它们转向相反, 则 ϕ 必是翻折.)

对我们来说非常重要的是, 两个变换是可以相乘的, 这就是

定义 1.1.4. M 是一个非空集合, ϕ 和 ψ 是 M 的两个变换. 规定 M 到自身的映射 $\rho(x) = \phi(\psi(x))$ (对任意 $x \in M$), 则易知 ρ 是 M 的变换. 我们定义 ρ 是变换 ϕ 和变换 ψ 的乘积, 记作 $\rho = \phi \circ \psi$. 注意到 M 的两个一一变换的乘积仍是一个一一变换, 我们特把 M 的一一变换全体记作 $T(M)$, 并把映射

$$\begin{aligned} \circ: \quad T(M) \times T(M) &\to T(M) \\ (\phi, \psi) &\mapsto \phi \circ \psi \end{aligned}$$

称为 $T(M)$ 的一个乘法.

我们知道, 变换的乘法适合结合律, 即 $(\phi \circ \psi) \circ \theta = \phi \circ (\psi \circ \theta)$.

我们还知道恒等变换 I (即把 M 的每一元素 x 对应到 x 本身的变换) 是 M 的一一变换, M 的一一变换 ϕ 的逆变换 ϕ^{-1} 是 M 的一一变换, 以及 $\phi \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \phi$ 是恒等变换 I.

定义 1.1.5. M 是一个非空集合, $T(M)$ 是 M 的所有一一变换的全体. 我们把 $T(M)$ 以及变换的乘法放在一起来考察, 记作 $(T(M), \circ)$ (这里 $\circ$ 表示变换的乘法), 并称之为 M 的变换群.

这里再强调一下, 我们并不是把集 $T(M)$ 叫做变换群, 而是把带有乘法运算的 $(T(M), \circ)$ 叫做变换群. 代数学的特点是研究带有运算的集合. 对于一个集合, 只有在其中引入运算后, 才是代数学研究的对象.