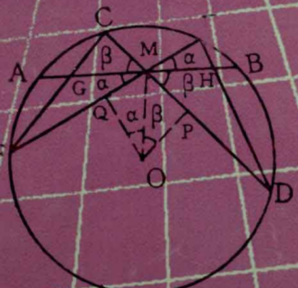
平面几何新路

PINGMIANJIHEXINLU

解题研究

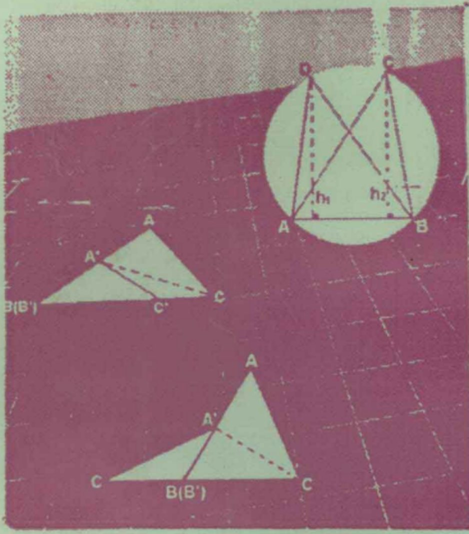
教育数学丛书

张景中 著



$$\frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}=\frac{S_{PUV}}{S_{QUV}} \qquad \frac{\overline{PX}}{\overline{PQ}}=\frac{S_{PUV}}{S_{PUQV}}$$

$$S_{ABX}=\frac{1}{S_{PUQV}}(S_{PUV}\cdot S_{ABQ}+S_{QVU}\cdot S_{ABP})$$



ISBN7-5408-2315-1/G・2234

定价： 6.45元

教育数学丛书

平面几何新路

解题研究

张景中 著

四川教育出版社
一九九四年·成都

(川)新登字 005 号

责任编辑:冉崇玉
封面设计:何一兵　何　红
版面设计:唐　瑛

平面几何新路·解题研究　张景中　著

四川教育出版社出版　(成都盐道街三号)
四川教育出版社发行　四川新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米　1/32 印张 7　插页 7　字数 147 千
1994 年 6 月第一版　1994 年 6 月第一次印刷
印数:1—2000 册

ISBN7—5408—2315—1/G·2234　定价:6.15 元

前　言

讨论平面几何解题方法的书很多，这些书对老师、学生和数学爱好者很有益处，但作者还没有见到一本书是致力于寻求几何解题的一般算法的．这里谈的“几何解题一般算法”，是指用机械的方法找出几何定理的不难理解的证明．在机器证明领域中，这叫做“可读证明的机器生成问题”．

本书在《平面几何新路》所阐述的面积方法的基础上，发展了一种平面几何解题算法．这一算法适用于绝大多数常见的几何命题．它比常用的解析几何方法更有效，而且在许多情形下能产生较简捷的证题方法．作者希望教几何的老师能了解这种方法的基本思路，并使之为部分学生所掌握，这一领域的研究，刚刚取得突破，前面还有很多工作可做．但认真读过本书的同行会看到：几何解题无定法的说法，已不适用于今天了．

本书部分内容是作者承担攀登计划项目“机器证明及其应用”的研究成果的一部分，此项目首席专家吴文俊教授对我的工作给以极大的鼓励和支持．书中“消点方法”，正是在吴文俊教授的机器证明新方法——吴消元法的启发之下产生的．

本书中绝大多数例题，都曾在计算机上运行过，其结果与书中所写大体相同．基本方法和不少例题取自作者和在这一研究工作中的合作者周咸青、高小山共同完成的英文研究报告．作者谨向周、高两位先生致以诚挚的感谢．

作者　1993 年 4 月于成都

附注：本书系国家自然科学基金资助项目和攀登计划项目成果的一部分．

目　　录

§1　从一则例子谈起 ………………………………… (1)
§2　摸着石头过河 ………………………………… (9)
§3　从偶然到必然 ………………………………… (19)
§4　共角定理与四边形面积比 ……………………… (32)
§5　步步为营,逐点消解…………………………… (46)
§6　消去平行线上的点 ……………………………… (62)
§7　垂直线与勾股差 ………………………………… (83)
§8　消去垂线上的点 ………………………………… (96)
§9　共圆点 …………………………………………… (116)
§10　共圆点的最后消解…………………………… (134)
§11　消去圆的交点………………………………… (148)
§12　全角及其应用………………………………… (163)
§13　消点方法小结………………………………… (181)
§14　三角法与向量法……………………………… (195)
§15　几何定理机器证明浅谈……………………… (207)

§1　从一则例子谈起

著名数学大师华罗庚，在《1978年全国中学生数学竞赛题解》前言中，谈到了这样一个有趣的几何题，我们把它作为本书的第一个例题：

例题 1.1　凸四边形 $ABCD$ 的两边 AD、BC 延长后交于 K，两边 AB、CD 延长后交于 L，对角线 BD、AC 延长后分别与直线 KL 交于 F、G.

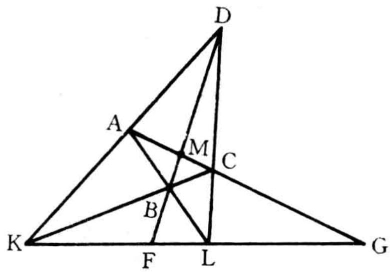


图 1.1

求证：$\dfrac{KF}{LF}=\dfrac{KG}{LG}$.

如图 1.1. 只看图，不看文字，题目也是一目了然的. 几条直线那么一交，不附加任何别的条件，凭空就要你证明一个等式，似乎不容易下手. 华罗庚在指出这个题目包含了射影几何

的基本原理之后，给出了用中学生所掌握的知识解决它的方法. 下述证明引自华罗庚先生所写的前言原文：

证明 1：　设$\triangle KFD$中KF边上的高为h，利用

$2\triangle KFD$面积$=KF\cdot h=KD\cdot DF\sin\angle KDF$，得到

$$KF=\frac{1}{h}\cdot KD\cdot DF\cdot\sin\angle KDF;$$

同理，再求出LF、LG与KG的类似表达式. 因而

$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{KD\cdot DF\sin\angle KDF}{LD\cdot DF\sin\angle LDF}\cdot\frac{LD\cdot DG\sin\angle LDG}{KD\cdot DG\sin\angle KDG}$$
$$=\frac{\sin\angle KDF}{\sin\angle LDF}\cdot\frac{\sin\angle LDG}{\sin\angle KDG},$$

同样可得到

$$\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}=\frac{\sin\angle ADM}{\sin\angle CDM}\cdot\frac{\sin\angle CDG}{\sin\angle ADG},$$

所以　$$\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}.$$

类似地可以证明

$$\frac{LF}{KF}\cdot\frac{KG}{LG}=\frac{\sin\angle LBF}{\sin\angle KBF}\cdot\frac{\sin\angle KBG}{\sin\angle LBG}$$
$$=\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}\cdot\frac{\sin\angle CBG}{\sin\angle ABG}$$
$$=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{CG}{AG}.$$

由此可见　$\left(\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}\right)^2=1.$　　即证得结论.　□

也许你一时还掌握不了上述证明的要领. 那不要紧，等一下讲一个简单点的证法. 为了介绍那个简单的证法，先要复习一点小学生的几何知识：

注　□代表证毕.

三角形的面积等于底乘高的积的一半.

并且由此可知：

共高三角形的面积比等于底之比.

别以为这两条命题平凡简单，它们是平面几何中最重要的基本事实. 从它们出发，马上可得一条用途极广的几何解题工具， 即

共边定理 若直线 AB 与 PQ 交于 M，则有：

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{PM}{QM}.^{*}$$

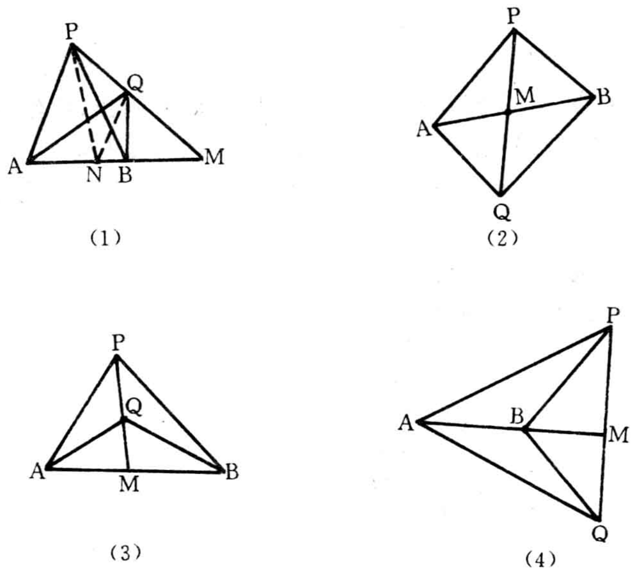


图 1

共边定理证明 1 不妨设 A 与 M 不同， 则

---

* 此处和以下均用记号△ABC 兼表三角形 ABC 及其面积.

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PAB}{\triangle PAM}\cdot\frac{\triangle PAM}{\triangle QAM}\cdot\frac{\triangle QAM}{\triangle QAB}$$
$$=\frac{AB}{AM}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{AM}{AB}$$
$$=\frac{PM}{QM}. \qquad \square$$

共边定理证明 2　在直线 AB 上取一点 N 使 $MN=AB$，则　$\triangle PAB=\triangle PMN$，　$\triangle QAB=\triangle QMN$.

$$\therefore\quad \frac{\triangle PAB}{\triangle QAB}=\frac{\triangle PMN}{\triangle QMN}$$
$$=\frac{PM}{QM}. \qquad \square$$

这两种证法均适用于图 1.2 的四种情形. 在证明 2 中添加的点 N，我们在(2)、(3)、(4)图中没有画出，留给读者来做. 作者在另书中证明共边定理时，方法与此不同.

有了共边定理，便可以对例 1.1 给出一个十分简捷的证法：

例题 1.1 的证明 2

由共边定理得：

$$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}$$
$$=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}$$
$$=\frac{CD}{CL}\cdot\frac{AK}{AD}$$
$$=\frac{\triangle ACD}{\triangle ACL}\cdot\frac{\triangle ACK}{\triangle ACD}$$
$$=\frac{\triangle ACK}{\triangle ACL}$$
$$=\frac{KG}{LG}. \qquad \square$$

这比起前一个证法，不但简捷，起点也低得多. 共边定理比正弦概念要简单些，准备知识少得多. 不但如此，这个证法还有一箭三雕的效果. 请看

例题 1.2　在图 1.1 中，试证：

$$\frac{MD}{MB}=\frac{FD}{FB}$$

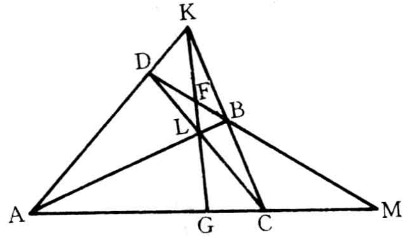


图 1.3

证明：　改写图中字母如图 1.3，要证的等式成为

$$\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG},$$

证法是一字不改地照抄例题 1.1 的证明 2

$$\begin{aligned}\frac{KF}{LF}&=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}\\&=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}\\&=\frac{CD}{CL}\cdot\frac{AK}{AD}\\&=\frac{\triangle ACD}{\triangle ACL}\cdot\frac{\triangle ACK}{\triangle ACD}\\&=\frac{\triangle ACK}{\triangle ACL}\\&=\frac{KG}{LG}.\end{aligned}$$

□

例题 1.3　在图 1.1 中，试证：

$$\frac{AM}{CM}=\frac{AG}{CG}$$

证明：　把图 1.1 中的字母重新标注如图 1.4，则要证的等式为

$$\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}.$$

证法仍然是照抄例 1.1 的证明 2

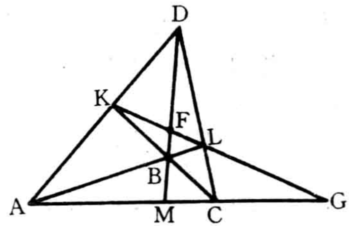


图 1.4

$$\begin{aligned}\frac{KF}{LF}&=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}\\&=\frac{\triangle KBD}{\triangle KBL}\cdot\frac{\triangle KBL}{\triangle LBD}\\&=\frac{CD}{CL}\cdot\frac{AK}{AD}\\&=\frac{\triangle ACD}{\triangle ACL}\cdot\frac{\triangle ACK}{\triangle ACD}\\&=\frac{\triangle ACK}{\triangle ACL}\\&=\frac{KG}{LG}.\end{aligned}$$

□

看来，例 1.1 确是一个富有启发性的题目. 它向我们提出了一串问题.

第一个问题：数学大师花了偌大气力才证出来的等式，怎么会变得如此简单容易？

首先，不要忘了，我们是站在大师的肩膀上，当然应看得更远，更清楚. 后人比前人做得更好，是自然的. 其次，具体一点的理由，是我们有了强有力的新工具——共边定理. 这个工具的应用，使一大批几何题目变得更容易了.

第二个问题：为什么同样的几行推导竟能用于三个不同的问题？

比较一下图 1.1，图 1.3 和图 1.4，三个图中都有个四边形 $ABCD$. 不同的是，图 1.1 中是凸四边形，图 1.4 中是凹四

边形，而图 1.3 中是星形四边形而已. 三个图的共同特点是：直线 AD、BC 交于 K，直线 AB、CD 交于 L，直线 BD、AC 分别与 KL 交于 F、G. 在应用共边定理时，我们关心的只是由四点确定的两条直线及其交点，而不管这四个点的相对位置如何. 因此，三种情形下，共边定理的应用都通行无阻！

第三个问题是：找出这样简捷的证法，有没有什么窍门？是单凭灵感碰运气？还是有章可循？

这是一个更重要的问题. 寻找解法的方法比解法本身要重要得多. 找到一个题目的解法，好比找到了打开某一把锁的钥匙. 知道如何寻找解法，就象掌握了为许多各式各样的锁配钥匙的办法.

寻找解法，也有不同的思路.

从战略上讲，大体有两类想法：

一种是“摸着石头过河”. 走一步，摸一步，不断地试探、选择，以求找到成功之路. 这种办法如能成功，往往可以找到较简单的解法. 但不保险，有可能走到一半就无法前进了.

另一种是“周密算计，顺藤取瓜，务求必得”. 这种办法往往以代数为帮手，以计算助推理，有绝大的成功把握. 缺点是往往涉及较繁的计算.

下面分别就这两种思路，展开进一步的讨论.

习　题　一

1.1　参照图 1.1，分别从下列几个等式出发，以证明比例式

$\frac{KG}{LG}=\frac{KF}{LF}$.

(1) $\frac{KG}{LG}=\frac{\triangle AKG}{\triangle ALG}$;　　(2) $\frac{KG}{LG}=\frac{\triangle CKG}{\triangle CLG}$;

(3) $\frac{KG}{LG}=\frac{\triangle DCK+\triangle DCG}{\triangle DCG}$;　　(4) $\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle BKF}{\triangle BLF}$;

(5) $\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle DKF}{\triangle DLF}$;　　(6) $\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle DMK}{\triangle DML}$.

1.2　参照图 1.1,分别从下列几个等式出发,以证明比例式 $\frac{AM}{CM}=\frac{AG}{CG}$.

(1) $\frac{AM}{CM}=\frac{\triangle DAM}{\triangle DCM}$;　　(2) $\frac{AM}{CM}=\frac{\triangle BAM}{\triangle BCM}$;

(3) $\frac{AG}{CG}=\frac{\triangle ALG}{\triangle CLG}$;　　(4) $\frac{AG}{CG}=\frac{\triangle KAG}{\triangle KCG}$.

1.3　参照图 1.4,用四种不同于例 1.2 的方法证明等式 $\frac{DF}{BF}=\frac{DM}{BM}$.

§2 摸着石头过河

我们来分析一下，例 1.1 的简捷解法产生的思路.

如图 1.1，没有给出任何别的条件，要证明一个等式 $\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}$. 遇到这种题目，应当怎么想？

没有特别条件，仅仅是几条直线交来交去，这类题目似难实易. 战略上应当有这么一个总的认识：**凡是只涉及直线的相交、平行，同一直线上的线段比，以及面积比的题目，都属于"仿射几何"的范围，而且是仿射几何中"线性"问题的范围. 这类问题，归根结底，用共边定理就足以解决了**.

这就确定了战略方向. **用共边定理，把线段比化为面积比，把面积比化为线段比，在两种几何量的反复转化中解决问题**.

要证明等式 $\frac{KF}{LF}=\frac{KG}{LG}$，出发点可以有几种. 可以从比值 $\frac{KF}{LF}$ 出发去找 $\frac{KG}{LG}$； 也可以从 $\frac{KG}{LG}$ 出发去找 $\frac{KF}{LF}$； 还可以从 $\frac{KF}{LF}\cdot\frac{LG}{KG}$ 出发证明它等于 1 等等. 反正是摸索，姑且从 $\frac{KF}{LF}$ 出

发试试.

把$\frac{KF}{LF}$化为面积比,办法不只一种,有$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle BKF}{\triangle BLF}$,$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle DKF}{\triangle DLF}$,　$\frac{KF}{LF}=\frac{\triangle KBD}{\triangle LBD}$,…等等.这需要选择.为什么在前述证明中正好选了第三个?

推导数学公式,怕的是兜圈子.转来转去,总在出发点附近循环,怎么能达到目的?要跳出圈子,就要求变.要把一个式子变一变,还要保持值相等,常用的办法是分子分母同乘上一个式子,或加上又减去某个式子.这里用分子分母同乘一式的办法,是为了继续应用共边定理.乘上的式子,当然应当是既和原来的分母上的三角形共边,又和分子上的三角形共边的三角形,才便于重新组合化为线段比,以求变化.

从图上看,同时和$\triangle BKF$、$\triangle BLF$共边的三角形,现成的只有$\triangle BKL$,如采用

$$\begin{aligned}\frac{KF}{LF}&=\frac{\triangle BKF}{\triangle BLF}\\&=\frac{\triangle BKF}{\triangle BKL}\cdot\frac{\triangle BKL}{\triangle BLF}\\&=\frac{KF}{KL}\cdot\frac{KL}{LF}\\&=\frac{KF}{LF}.\end{aligned}$$

兜起圈子来了!采用

$$\begin{aligned}\frac{KF}{LF}&=\frac{\triangle DKF}{\triangle DLF}\\&=\frac{\triangle DKF}{\triangle DKL}\cdot\frac{\triangle DKL}{\triangle DLF}\\&=\frac{KF}{LF}.\end{aligned}$$