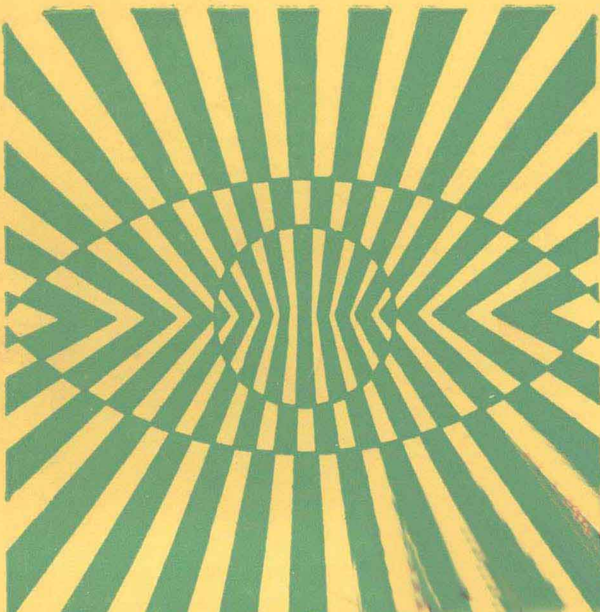
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

三角形

黄翔



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物

主编　罗四维　杨泰良

三角形

黄翔

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

(川)新登字005号

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物
三角形　　黄　翔

四川教育出版社出版发行　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　内江新华印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/32　印张4.625　插页1　字数82千
1992年8月第一版　1992年8月第一次印刷
印数：1—4740册

ISBN7-5408-1733-x/G·1655　定价：1.64元

前言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目录

三角形概述

1. 最基本的平面图形

在各种各样的几何图形中，三角形是最基本的了.

用三根火柴棍首尾相连，就会摆出这个平面图形来，这连 3 岁的小孩都会！但世界上的事物往往是这样：越简单就越是伴演着重要的角色. 正如同变化万千的复杂乐曲离不开 1 、 2 、 3 、…、 7 这简单的七声音阶一样，数学中那形形色色的平面几何图形都或多或少地与三角形有关. 可以毫不夸张地说，三角形是整个几何学的一块奠基石，没有它就没有几何.

三角形看起来是那么一目了然，殊不知在那一目了然的“面纱”之后，却隐藏着无数的奥秘，充满着神奇. 这里姹紫嫣红，风光绮丽，处处可领略到数学的美；这里山峦迭宕，奇峰耸立，吸引着人们去探险寻秘. 从西方的《几何原本》，到东方的《九章算术》，都有它的一席之地；上下几千年的数学发展史，随处可寻觅到它的踪影. 时到如今，它在几何领域中仍具有相当大的魅力，围绕着三角形的研究成果仍层出不穷.

让我们从头开始，来认识一下这个最基本的平面图形吧！

2． 三角形的分类

我们可以按照边的长短来分．

三边两两不等的三角形叫做不等边三角形；三边中有两边相等的三角形叫做等腰三角形；三边都相等的三角形叫做等边三角形．于是，有如下分类：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{不等边三角形；}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不等的等腰三角形；}\\ \text{等边三角形．}\end{cases}\end{cases}$$

我们也可以按三角形的最大内角大小来分．

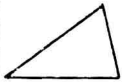
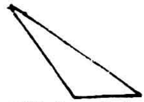
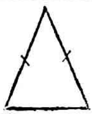
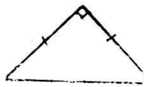
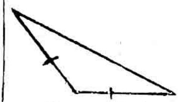
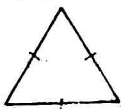
有一个角是直角的三角形叫做直角三角形；三个角都是锐角的三角形叫做锐角三角形；有一个角是钝角的三角形叫做钝角三角形．后两种三角形合称为斜三角形．

于是，可对三角形再作如下分类：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形；}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形；}\\ \text{钝角三角形．}\end{cases}\end{cases}$$

如果同时按边和角来对三角形进行分类，就可得到第 3 页表所示的几种三角形．

可想一想，为什么等边直角三角形与等边钝角三角形不存在？

三角形 角 边		锐角	直角	钝角
不等边		 不等边锐角	 不等边直角△	 不等边钝角△
等腰	底和腰不等	 等腰锐角△	 等腰直角△	 等腰钝角△
	等边	 等边三角形	不存在	不存在

3. 三角形的角及主要线段

三角形相邻两边组成的角称为三角形的内角（简称为角），其一边与另一边反向延长线组成的角称为三角形的外角．

三角形一个角的平分线和这个角的对边相交，此角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线；连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线；三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段叫做三角形的高；连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线．

一个三角形有三条角平分线，三条中线，三条高及三条中位线．

一　全等三角形

§1　全等三角形的概念

能够完全重合的两个三角形叫全等三角形．也就是说，如果两个三角形的顶点能够对应重合，那么对应边也将重合、相等，则这两个三角形就是全等三角形．

两个三角形全等是指两个三角形之间的一种关系，这个关系是由两个三角形的点的对应关系，以及对应边、对应角的相等关系来决定的．因此，我们必须善于识别两个全等三角形的对应元素，对给定的全等三角形要准确、迅速地找出“对应角”及“对应边”来．

辩认全等三角形对应元素的基本方法是首先找出对应顶点，然后确定对应边、角．

已知$\triangle ABC\cong\triangle DEF$（图1—1），

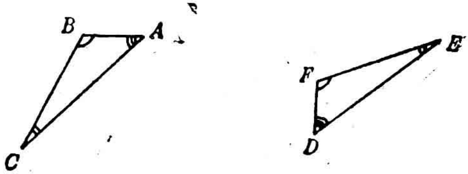


图1—1

先有　$A \longleftrightarrow D$，$B \longleftrightarrow F$，$C \longleftrightarrow E$，

则有　$\angle A \longleftrightarrow \angle D$，$\angle B \longleftrightarrow \angle F$，

$\angle C \longleftrightarrow \angle E$.

$BC \longleftrightarrow FE$，$CA \longleftrightarrow ED$，

$AB \longleftrightarrow DF$.

在解具体问题时，给出的条件往往是边等或角等，此时，确定对应关系可按如下方法：

（1）相等的两角是对应角，对应角的对边是对应边；

（2）相等的两边是对应边，对应边的对角是对应角；

（3）两对应角所夹边是对应边；

（4）两对应边所夹角是对应角.

根据全等三角形的定义，可推出它的三个性质：

（1）反身性：任一三角形 F 与它自己全等，记作　$F \cong F$；

（2）对称性：$F_1 \cong F_2 \Longrightarrow F_2 \cong F_1$；

（3）传递性：$F_1 \cong F_2$，$F_2 \cong F_3 \Longrightarrow F_1 \cong F_3$.

§2　全等三角形的判定

由全等三角形的定义可以知道，如果根据定义来判定两个三角形全等，要有六个元素对应相等（即三条边和三个角对应相等），在解决具体问题

时，我们可以有更好的判定方法。

1. 一个配玻璃的问题

有一扇三角形的窗玻璃被打碎成几部分，需要到玻璃店去照样配一块，因手头无测量尺寸的度量工具，是将几部分都拿去呢？还是只需要拿其中一部分就行呢？

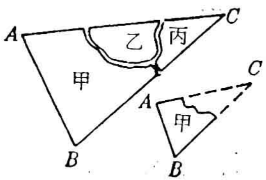


图1—2

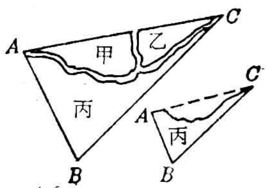


图1—3

如打碎的玻璃呈图1—2所示形状，只须用甲部分就行了. 因为甲保留了原玻璃的两个角∠A、∠B及所夹边AB，在这种情况下，它实际上已确定了顶点C（只须将非AB边的两条边缘线延长即可得交点C）.

如碎玻璃如图1—3，只须用丙就可达目的. 因为丙保留了原玻璃的两边AB、BC及夹角∠B，三角形的三个顶点通过丙已经确定，只要连结AC即可.

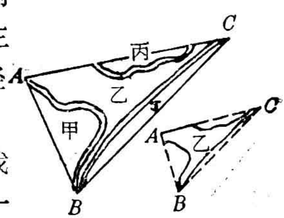


图1—4

如碎玻璃如图1—4，我们只须用乙就行了. 观察一下乙的特点，尽管这部分没

有完整的保留原三角形的任一角，但他却保留了原三角形的三个顶点（即知三边长），因此，它能确定原三角形.

配窗玻璃的问题可以看成是确定两个三角形全等的问题．从上面所讨论的三种情况可以得到三角形全等的判定公理.

2．三角形全等的判定

（1）角边角公理（简写成“ASA”）有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等.

（2）边角边公理（简写成“SAS”）有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等.

（3）边边边公理（简写成“SSS”）有三边对应相等的两个三角形全等.

（4）角角边定理（简写成“AAS”）有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等.

需要指出的是，（1）（2）（3）虽然称为公理，实际上是可以证明的，其实它们都是定理．现行初中教材，已将（3）作为定理，并在学了等腰三角形知识之后给出了证明.

我们简单介绍一下（2）的证明方法和思路.

如果在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$AB=A'B'$，$\angle B=\angle B'$，$BC=B'C'$，现证明$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

要证明结论，只能应用全等三角形的定义，即证明这两个三角形完全重合．我们可采用重迭的方

法：首先，根据线段相等的定义使它们的一边$B'C'$和BC重合；再根据角相等的定义，可使$B'A'$沿BA落下，由$BA=B'A'$，可得A'与A重合；最后，再根据过A、C两点可以作而且只可以作一条直线的性质，得$A'C'$必定与AC重合．所以$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等．

（1）和（3）同样可采用这种重迭法加以证明．

由（3）可以知道：只要三角形三边长度固定，此三角形的形状和大小就完全确定．三角形的这个性质叫做三角形的稳定性．取三根长度适当的木条，用钉子把它钉成一个三角形，其形状和大小就固定；而取四根长度适当的木条钉成一个四边形，它的形状却是可以改变的．由此可知，稳定性是三角形特有的性质，其它多边形无此特性．

三角形的稳定性在实际生活中是很有用的，你能举出几个实例吗？

由以上公理及定理，可以知道：判定两个三角形全等，只须三个元素对应相等（三个条件）就行了．但三个条件中，至少要有一条边对应相等．

由（1）与（4）知，只要有两个角及一条边对应相等，它们就全等．那么，有两边及一角对应相等的两个三角形是否一定全等呢？

若是两边及夹角对应相等，由（2）知此两三角形全等．若是两边及一边所对角对应相等，就不一定了，我们通过作图来看一下原因．

已知$\triangle ABC$的边b、c（$c>b$）及$\angle C$，求作

$\triangle ABC$.

如图1—5，作$\angle C$，在一边上截取$CA=b$，以A为顶点，c之长为半径画弧，交$\angle C$的另一边于B，连结AB，则作成$\triangle ABC$.

由此可知，已知两边及大边所对角，三角形是能够确定的. 我们可以得到这样的结论：两边对应相等，且较大边所对角对应相等的两个三角形全等.

已知$\triangle ABC$的边b、$c(c>b)$，及$\angle B$，求作$\triangle ABC$.

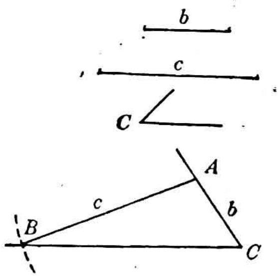


图1—5

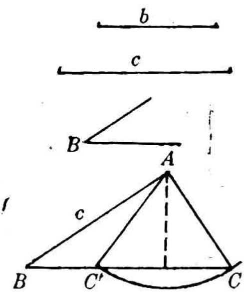


图1—6

如图1—6，作$\angle B$，在其一边上截取$BA=c$，以A为顶点，b之长为半径画弧，分别交$\angle B$的另一边于C'及C，连结AC及AC'，则$\triangle ABC$与$\triangle ABC'$皆为求作的三角形. 由此可知，若已知两边及小边所对角，作出的符合条件的三角形一般有两个（若b等于BC边上的高h，作出的三角形为一个）. 即在这种情况下，三角形不能唯一确定.

所以，我们一般不用两边及一边对应相等来判

定两个三角形是否全等．

三个角对应相等的两个三角形也不一定全等．如图1—7，$B_1C_1 \parallel BC$，$B_2C_2 \parallel BC$，则$\triangle ABC$、$\triangle AB_1C_1$、$\triangle AB_2C_2$的三个角分别对应相等，但显然它们不全等．究其原因，在于只知三个角是无法唯一确定三角形的，必须要有边的限制条件．

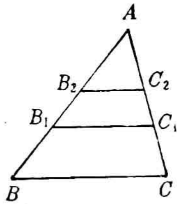


图1—7

直角三角形作为一般三角形的特殊情况，当然可以运用前述公理和定理来判定它的全等，此外还有如下定理：

有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（简写成“HL”）．

这实际上可以看成是“两边（斜边及一直角边）对应相等，且较大边（斜边）所对角（直角）对应相等的两个三角形全等”的特殊情况．

由于直角三角形中有一角是直角这一特点，还可以将直角三角形全等的判定条件概括为：

有两边对应相等的两个直角三角形全等；

有一边和一锐角对应相等的两个直角三角形全等．

3． 判定公理及定理的运用

例1　已知：如图1—8，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AD\perp AB$，$AD=AB$，$BE\perp DC$，$AF\perp AC$．

求证：$\triangle ACD\cong\triangle AFB$．