

全国高职高专教育规划教材

应用数学 与 数学文化

第1分册

编 康永强 主审 李宏远



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育规划教材

应用数学与数学文化

Yingyong Shuxue yu Shuxue Wenhua

第1分册

主编 康永强

主审 李宏远

编者 康永强 岑苑君 邱仰聪 欧笑杭 刘 镡 杨 超



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书分为两个分册,第1分册主要内容包括:函数,极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,用MATLAB数学软件来认识应用数学(一)。

本书以应用为目的,重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用意识和能力的培养;以学生受益为宗旨,内容阐述清晰,简捷直观,通俗易懂,不仅强调数学学习方法的引导,而且特别注重数学课程的育人功能,融入大量数学文化的素材,以此反映数学的思想、精神和应用;以能力训练为基础,能力训练的部分分为基础题和应用题两部分,且每章后附有参考答案,便于教师和学生根据情况进行选择。为了便于教学和自学,将与本书内容相关的数学实验合为附录一,教学中应充分利用数学软件的技术手段,加强学生数学基本知识的掌握和应用能力的提高。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材,也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学与数学文化:全2册/康永强主编.
—北京:高等教育出版社,2011.9(2012.5重印)
ISBN 978-7-04-032718-2

I. ①应… II. ①康… III. ①应用数学-高等
职业教育-教材②数学-文化-高等职业教育-教材
IV. ①O29②O1-05

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第175722号

策划编辑 邓雁城
插图绘制 郝林

责任编辑 崔梅萍
责任校对 俞声佳

封面设计 李卫青
责任印制 韩刚

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 北京市朝阳展望印刷厂
开本 787mm×1092mm 1/16
本册印张 17.5
本册字数 430千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011年9月第1版
印 次 2012年5月第2次印刷
两册定价 54.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32718-00

博学之,审问之,慎思之,明辨之,笃行之。

——《四书·中庸》

微积分,或数学分析,是人类思维的伟大成果之一,它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有效的工具,遗憾的是,微积分的教学方法有时流于机械,不能体现出这门学科乃是撼人心灵的智力奋斗的结晶;这种奋斗已经经历两千五百多年之久,它深深扎根于人类活动的许多领域,并且,只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止,这种奋斗就将继续不已。

——美籍德国数学家柯朗

在学校学的数学知识,毕业后若没什么机会去用,一两年后很快就忘掉了。然而,不管他们从事什么工作,铭记在心的数学精神、数学思想、研究方法、推理方法和看问题的角度等,却随时随地发生作用,使他们终生受益。

——日本数学教育家米山国藏

前言

本教材根据高端技能型人才培养的通用要求和培养对象的特殊性,结合高职院校应用数学的教学特点和当前高职数学课程改革经验,依照“定位高职,注重简捷直观,强化应用意识,融入数学思想”的原则编写。在符合教材自身逻辑的前提下,力求语言准确、条理清晰,让教师在教学过程中引导学生跳出传统高职数学学习的误区,以便更容易掌握关键知识点,培养学生形成严谨的数学思维习惯,提升学生的整体职业素质。通过教学实践活动,我们感到所编内容能更好地适应当前高职数学教育教学的改革要求,符合当前高端技能型人才对高职数学课程的多元化、精炼化和专业性、高效性的要求,同时能有效解决课内学时少与生源多样的问题。

本教材的主要内容包括:函数——数学模型方法概述,变量无限变化的数学模型——极限·连续,函数变化率和增量的估值描述——导数·微分,导数的应用问题——最值问题·函数的形态·曲率,微分的逆运算问题——不定积分,求总量的问题——定积分及其应用,含变化率的方程问题——常微分方程,行列式,矩阵,线性方程组,偶然中的必然——随机事件与概率,随机现象的函数化——随机变量及其分布,随机变量的数字特征——数学期望和方差,数理统计的基本方法,用数学软件 MATLAB 来认识应用数学。

本书特色鲜明,大体可归纳为以下几点。

1. 模块化和专业应用的融合。从结构上分为五大模块:一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、线性代数、概率论、数理统计初步。其中,一元函数微分学及其应用和一元函数积分学及其应用两个模块是所有专业的基础内容,而针对各专业的不同要求,设置了线性代数、概率论和数理统计初步三个应用模块,同时辅以数学实验进行能力实训。根据专业特点和生源差异等条件,教师可灵活地选择和组织教学内容。

2. 数学应用和数学思想的融合。本书从功能上来看,包括三个方面:基础理论(基本概念及方法)、应用和数学文化,其中基础理论和实际应用为课内显性学时,而数学文化则为课外隐性学时。正如李大潜院士说:“忽略了数学思想对学生的熏陶以及学生数学素质的提高,就失去了数学课程最本质的特点和要求,失去了开设数学课程的意义。”本教材着力扩充有关数学的精神、思想与历史的内容,结合现今的数学发展及其应用,揭示它们在数学文化层面上的意义及作用,使高职数学教育成为学生素质教育培养的重要途径。这是对高职数学课程教学目标的重置和提升,将更适应于高职人才培养目标,更有利于学生的全面发展,也必将使高职数学教育功能趋于完善。

3. 教学方法和学习方法的融合。本教材特别强调学生学习方法的掌握,打破了以往高职教材的完备性、系统性和逻辑性,更注重学生基础概念的建立、基本方法的突破以及应用问题的分析和求解。精炼地描述概念的起源和本质,淡化数学概念的抽象描述,强化几何直观,突出实际应用。让学生了解强调本质、结构和强化分类是突破基本方法的核心,真正做到简单高效地掌握

基本的计算方法,有利于提高运用数学知识解决实际问题的能力。

4. 强调应用和育人功能。本教材在注重学生应用数学的基础上,体现了通识必修课的文化功能。不仅重视数学思想的融合和渗透,例如古代的极限思想、变化率思想、建模思想等等,而且精选一些数学文化的素材,以此展示数学思想的形成背景和数学对现实世界的影响,引导学生逐步领会到数学的精神实质和思想方法,有利于发挥数学课程的育人功能、激发学生的学习兴趣和提升数学应用的能力。

本书教学时间大约 96 学时,其中第一模块和第二模块共 48 学时,第三模块 16 学时,第四模块和第五模块共 24 学时,数学实验 8 学时。

本书由康永强担任主编并负责统稿。其中,康永强编写第 1、2、3、4、5、6、7 章,欧笑杭编写 8、9 章,邱仰聪编写第 10 章和部分附录,岑苑君编写第 11、12、14 章和附表部分,刘锦编写第 13 章,杨超编写数学实验部分。另岑苑君对第 1 至 7 章的书稿内容提出许多建设意见,并进行了细致的校对,邱仰聪对第 1 至 6 章进行了文献查阅和反复校对。

感谢本书的主审,顺德职业技术学院李宏远副教授对书稿提出的大量富有针对性的意见和建议。在本书的编写过程中,得到顺德职业技术学院原院长陈智教授的指导和关怀、顺德职业技术学院副院长陈粟宋副教授的支持和鼓励,还有顺德职业技术学院人文教育系各领导的关心和帮助,在此一并表示衷心感谢。

编写教材是一项影响深远的教育工作,我们深感责任重大。但由于编者的水平有限,虽然经过反复校对和仔细推敲,书稿中恐仍有许多不尽如人意、不合教学之处,衷心期待专家和广大读者批评指正。

编 者

2011 年 7 月

目 录

第一模块 一元函数微分学及其应用

第1章 变量之间依存关系的数学模型——函数·数学模型方法概述	2
第1章学习提要	2
第1章概述	2
学习目标	3
1.1 函数概念	3
1.1.1 变量数学的产生	3
1.1.2 变量之间依存关系的数学模型——函数	4
1.1.3 基本初等函数	7
【能力训练 1.1】	8
【数学文化聚焦】笛卡儿	9
1.2 由已知函数产生的新函数——初等函数	9
1.2.1 平移和伸缩	9
1.2.2 函数的四则运算	10
1.2.3 反函数	10
1.2.4 函数的复合运算	11
1.2.5 初等函数	13
【能力训练 1.2】	13
【数学文化聚焦】解数学题——过程的比较	14
1.3 数学模型方法概述	14
1.3.1 分段函数	14
1.3.2 构建函数模型的步骤和方法	16
【能力训练 1.3】	18
【数学文化聚焦】数学模型与求解实际问题的描述	18
1.4 拓展与提高	19
1.4.1 邻域	19
1.4.2 函数的解析式表示	19
1.4.3 逆向思维的实例——反三角函数	20
1.4.4 空间直角坐标系和二元函数	21
【能力训练 1.4】	24
【数学文化聚焦】地震震级与对数	24

第1章 学法建议	25
【数学文化聚焦】无处不在的数学技术——从CT扫描到飞行控制	25
【综合能力训练一】	26
第1章 能力训练参考答案	28
第2章 变量无限变化的数学模型——极限·连续	30
第2章 学习提要	30
第2章 概述	30
学习目标	31
2.1 极限思想概述	31
2.1.1 微积分理论的创立	31
2.1.2 中国古代极限思想	31
2.1.3 芝诺悖论	32
【能力训练2.1】	34
【数学文化聚焦】芝诺悖论对数学发展的意义	34
2.2 变量无限变化的数学模型——函数极限	35
2.2.1 数列极限和等比级数	35
2.2.2 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	38
2.2.3 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	40
【能力训练2.2】	42
【数学文化聚焦】等比级数和的几何证明法	43
2.3 无穷小与无穷大	44
2.3.1 无穷小	44
2.3.2 无穷大	46
2.3.3 无穷大与无穷小的关系	46
【能力训练2.3】	47
【数学文化聚焦】祖冲之与圆周率	48
2.4 求极限的方法——四则运算法则和两个重要极限公式	49
2.4.1 求极限的基本方法	49
2.4.2 两个重要极限公式	51
【能力训练2.4】	55
【数学文化聚焦】Koch雪花曲线与分形几何学	56
2.5 变量连续变化的数学模型——连续函数	57
2.5.1 函数连续的概念	57
2.5.2 函数的连续性	58
【能力训练2.5】	60
【数学文化聚焦】奥运会成绩的极限	60
2.6 拓展与提高	61
2.6.1 再谈函数极限	61
2.6.2 函数的连续性	64
2.6.3 无穷小的比较	65

【能力训练 2.6】	68
【数学文化聚焦】数学对萤火虫同步闪光的解释	68
第 2 章 学法建议	69
【数学文化聚焦】大学数学重在介绍思想	70
【综合能力训练二】	71
第 2 章 能力训练参考答案	72
第 3 章 函数变化率和增量的估值描述——导数·微分	74
第 3 章 学习提要	74
第 3 章 概述	75
学习目标	75
3.1 函数的局部变化率——导数	75
3.1.1 关于导数的实例	75
3.1.2 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数——导数值	77
3.1.3 曲线在已知点的切线斜率——导数的几何意义	78
3.1.4 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数——导函数	78
【能力训练 3.1】	79
【数学文化聚焦】贝克莱悖论与第二次数学危机	80
3.2 求导数的方法——求导基本公式和运算法则	81
3.2.1 导数的基本公式	81
3.2.2 导数的四则运算法则	82
【能力训练 3.2】	84
【数学文化聚焦】导数显示表——汽车的车速表	84
3.3 求导数的方法——复合函数和隐函数的导数	85
3.3.1 复合函数的导数法则	85
3.3.2 隐函数求导法	88
3.3.3 二阶导数	90
【能力训练 3.3】	91
【数学文化聚焦】百米赛跑数学模型	92
3.4 微分及其计算	93
3.4.1 微分的定义	93
3.4.2 微分的计算	94
【能力训练 3.4】	96
【数学文化聚焦】简单优美而深刻的欧拉公式	96
3.5 提高与拓展	97
3.5.1 再谈导数	97
3.5.2 反函数的导数	99
3.5.3 隐函数求导的另一种方法	100
3.5.4 取对数求导法	102
3.5.5 n 阶导数	102
3.5.6 微分的应用	103
【能力训练 3.5】	106

【数学文化聚焦】4×100 米接力赛的困惑	107
第 3 章 学法建议	108
【数学文化聚焦】陈希孺院士赠言学好数学重在多做习题	109
【综合能力训练三】	110
第 3 章 综合能力训练参考答案	111
第 4 章 导数的应用问题——最值问题·函数的形态·曲率	113
第 4 章 学习提要	113
第 4 章 概述	113
学习目标	114
4.1 工程中的最值问题	114
4.1.1 最值问题的经典案例——输油管道的铺设	114
4.1.2 最大值和最小值——函数的整体性质	115
4.1.3 极大值和极小值——函数的局部性质	115
4.1.4 如何求工程问题的最值	115
4.1.5 油井问题的最优解	117
4.1.6 其他例子	117
【能力训练 4.1】	120
【数学文化聚焦】费马	120
4.2 函数的形态描述——单调性与极值、凹向性与拐点	121
4.2.1 函数的单调性与极值	121
4.2.2 曲线的凹凸性与拐点	123
【能力训练 4.2】	126
【数学文化聚焦】数学——严密的、系统的理论体系	126
4.3 曲线弯曲程度的描述——曲率	127
4.3.1 曲率	127
4.3.2 曲率半径	130
【能力训练 4.3】	131
【数学文化聚焦】数学工具	131
4.4 计算未定式极限的一般方法——洛必达法则	132
【能力训练 4.4】	134
【数学文化聚焦】数学对其他学科和高科技的影响	134
4.5 提高与拓展	135
4.5.1 闭区间上连续函数的最值问题	135
4.5.2 再谈函数的极值	137
4.5.3 再谈曲线的凹凸性	140
4.5.4 函数图形的综合认识	143
【能力训练 4.5】	146
【数学文化聚焦】蜂窝猜想	146
第 4 章 学法建议	147
【数学文化聚焦】能诗善文的华罗庚	148

【综合能力训练四】	149
第4章能力训练参考答案	151

第二模块 一元函数积分学及其应用

第5章 微分的逆运算问题——不定积分	154
第5章学习提要	154
第5章概述	154
学习目标	155
5.1 不定积分及其性质	155
5.1.1 积分学的创立	155
5.1.2 逆向思维又一例——原函数与不定积分的概念	155
5.1.3 不定积分的基本性质与几何意义	158
5.1.4 基本积分公式与运算性质	159
5.1.5 求不定积分的基本方法	160
【能力训练5.1】	161
【数学文化聚焦】莱布尼茨	162
5.2 凑微分法	163
【能力训练5.2】	167
【数学文化聚焦】微积分学在中国的最早传播人——李善兰	168
5.3 分部积分法	168
5.3.1 分部积分公式	168
5.3.2 如何正确使用分部积分公式	169
【能力训练5.3】	171
【数学文化聚焦】数学解题策略:转化	171
5.4 提高与拓展	172
5.4.1 第二换元法	172
5.4.2 分部积分法的其他例子	174
【能力训练5.4】	175
【数学文化聚焦】李大潜院士谈学数学的目的	175
第5章学法建议	176
【数学文化聚焦】数学大师丘成桐的数学强国梦	177
【综合能力训练五】	178
第5章能力训练题参考答案	178
第6章 求总量的问题——定积分及其应用	181
第6章学习提要	181
第6章概述	181
学习目标	182
6.1 定积分的概念	182
6.1.1 定积分的起源	182

6.1.2 定积分的定义	183
6.1.3 定积分的几何意义	183
6.1.4 定积分的性质	184
6.1.5 如何求定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值	185
【能力训练 6.1】	186
【数学文化聚焦】牛顿	187
6.2 计算定积分的一般方法——换元法和分部积分法	188
6.2.1 定积分的换元法	188
6.2.2 定积分的分部积分法	191
【能力训练 6.2】	192
【数学文化聚焦】微积分符号史漫谈	192
6.3 定积分概念的拓展——无穷区间上的反常积分	194
【能力训练 6.3】	196
【数学文化聚焦】谁先创立微积分?	197
6.4 定积分的魅力展现——定积分的应用	197
6.4.1 定积分的微元法	197
6.4.2 平面图形的面积	198
6.4.3 旋转体的体积	199
6.4.4 平面曲线的弧长	201
6.4.5 变力做功	201
6.4.6 液体对侧面的压力	202
6.4.7 其他实例	202
【能力训练 6.4】	204
【数学文化聚焦】定积分——存储和积累过程	205
6.5 拓展与提高	206
6.5.1 再谈定积分的概念	206
6.5.2 再谈定积分的应用	208
【能力训练 6.5】	210
【数学文化聚焦】近代数学巨匠——希尔伯特	210
第 6 章 学法建议	211
【数学文化聚焦】哲学角度认识极限法	212
【综合能力训练六】	213
第 6 章 能力训练题参考答案	214
第 7 章 含变化率的方程问题——常微分方程	216
第 7 章 学习提要	216
第 7 章 概述	216
学习目标	217
7.1 微分方程的初步认识——基本概念	217
7.1.1 微分方程的定义	217
7.1.2 微分方程的解与通解	218

7.1.3 初始条件与特解	218
【能力训练 7.1】	219
【数学文化聚焦】生物学中的数学	220
7.2 一阶微分方程	220
7.2.1 可分离变量的微分方程	221
7.2.2 一阶线性微分方程	223
【能力训练 7.2】	225
【数学文化聚焦】材料科学中的数学	225
7.3 用微分方程解决实际问题的方法	226
【能力训练 7.3】	229
【数学文化聚焦】微积分发展与应用编年史(1615—1883 年)	230
7.4 拓展与提高	231
7.4.1 二阶常系数齐次线性微分方程	232
7.4.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	233
【能力训练 7.4】	237
【数学文化聚焦】欧拉——我们大家的老师	237
第 7 章学法建议	238
【数学文化聚焦】数学技术的巨大作用	239
【综合能力训练七】	240
第 7 章能力训练参考答案	241
 附录一 用 MATLAB 数学软件来认识应用数学(一)	243
一、MATLAB 简介	243
实验一 MATLAB 操作入门	243
实验二 变量与函数	246
二、函数的 MATLAB 计算与作图	248
实验三 利用 MATLAB 进行基本数学运算	248
实验四 利用 MATLAB 绘制平面曲线的图形	249
三、利用 MATLAB 计算一元函数微积分问题	251
实验五 求解函数极限	251
实验六 求解函数导数	253
实验七 导数的应用	255
实验八 求解函数积分	258
附录二 希腊字母及其发音、意义	261
附录三 初等数学常用公式	262

第一模块

一元函数微分学及其应用

主要内容

■ 变量之间依存关系的数学模型

- 函数及其特性
- 函数的构造及初等函数
- 数学模型方法概述

■ 变量无限变化的数学模型

- 极限思想
- 极限的计算
- 连续概念

■ 函数变化率的描述

- 导数与微分
- 导数运算

■ 导数的应用问题

- 函数性态描述:单调性与极值,凹凸性与拐点
- 最优化问题
- 曲率和曲率半径
- 误差分析
- 计算极限:洛必达法则

变量之间依存关系的数学模型 ——函数·数学模型方法概述

第1章

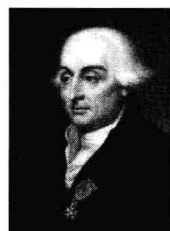


第1章学习提要

- ◆ 函数概念
- ◆ 基本初等函数
- ◆ 已知函数产生新函数
 - 平移和伸缩
 - 函数的四则运算
 - 函数的复合运算
 - 初等函数
- ◆ 数学模型方法概述

只要代数同几何分道扬镳,它们的进展就缓慢,它们的应用就狭窄.但是,当这两门科学结合成伴侣时,它们就相互吸取对方的新鲜活力,并迅速地趋于完善.

——拉格朗日



拉格朗日(J. L. Lagrange, 1735—1813),
法国数学家

第1章概述

函数是学习微积分的基础.本章旨在复习中学数学学过的基本初等函数的基础上,从结构或模式的角度来理解函数及其相关概念,以及由已知函数产生新函数的方法,同时能够用函数表示简单的数学模型,为微积分的学习打下基础.

学习目标

通过本章的学习,我们能够:

1. 从结构或模式的角度理解函数的概念和特性;
2. 理解基本初等函数的概念;
3. 了解已知函数构造新函数的一般方法,特别是会分析复合函数的复合结构,了解初等函数的概念.
4. 了解建立函数模型的基本步骤.

1.1 函数概念

函数是重要的数学概念之一,是用数学的语言来描述现实世界的主要工具.以后我们将研究各类函数(包括初等函数和非初等函数,显函数与隐函数)及其性质,特别是函数的分析性质——函数的微分和积分.

1.1.1 变量数学的产生

近代数学本质上可以说是变量数学,而变量数学的兴起是由于解析几何的创立.到16世纪,对运动与变化的研究已成为科学的中心问题,迫切需要一种新的数学工具,从而导致了变量数学的诞生.变量数学的里程碑是解析几何的发明,而解析几何的基本思想是在平面上引进所谓的坐标的概念,以此在平面上的点和有序实数对之间建立了一一对应关系.以这种方式可以将一个代数方程与平面上一条曲线对应起来,于是几何问题便可归纳为代数问题,反过来又可通过代数问题的研究发现新的几何结果.解析几何的发明归功于两位法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)和费马(P. de Fermat, 1601—1665).解析几何是代数和几何相结合的产物,它将变量引进到数学,使运动与变化的定量表述成为可能,从而为微积分的创立打下基础.

“函数(function)”一词最初是由德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)在1692年开始使用.

1734年,瑞士数学家欧拉(L. Euler, 1707—1783)引入了函数符号“ $f(x)$ ”,并称变量的函数是一个解析表达式,认为函数是由一个公式确定的数量关系.但是当时的函数概念仍然是比较模糊的.

直到1837年,德国数学家狄利克雷(P. G. L. Dirichlet, 1805—1859)提出:“如果对于 x 的每一个值, y 总有一个完全确定的值与之对应,则 y 是 x 的函数”.这个定义才较清楚地说明了函数的内涵:不管其对应法则是公式、图像、表格,还是其他形式,函数 $f(x)$ 是 x 与 y 之间的一种对应关系.

1859年,清代数学家李善兰(1811—1882)第一次将“function”译成“函数”.

19世纪70年代以后,随着集合概念的出现,函数概念又得以用更加严谨的集合和对应的语言来表达.

1.1.2 变量之间依存关系的数学模型——函数

一、函数概念

在工程技术和经济领域的研究中,常常遇到不同的量,例如时间、速度、质量、温度、成本、利润等等.这些量可以分为两大类:其中,保持某一固定的数值的量,称为常量;而在一定范围内可以取不同数值的量,称为变量.

函数描述了变量之间的某种依存关系.例如已知矩形的边长,它的面积就确定了,我们就说矩形的面积是边长的函数.一个变量的值取决于另一个变量的值,或者说一个量的变化会引起另一个量的变化,函数关系就是描述这种关系的一个法则.

【案例1】《银行存款》 银行的存款本金 A_0 , 年利率为 r , t 年末 A_0 将增值为 A_t , 若以年为期来计算利息, 则:

一年末的本利和 $A_1 = A_0(1+r)^1$;

二年末的本利和 $A_2 = A_0(1+r)^2$;

类推之, t 年末的本利和 $A_t = A_0(1+r)^t$.

定义 1.1【函数关系】 从非空集合 D 到非空集合 B 的一个函数关系 f 是这样一种对应法则(对应关系): 对于 D 中每一个元素 x , 对应 B 中唯一确定的元素 y . 记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量. x 的变化范围 D 称为 $y = f(x)$ 的定义域, y 的变化范围称为 $y = f(x)$ 的值域 B . 当 $x = x_0$ 时, $y(x_0)$ 、 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$ 表示函数值.

【注】 函数关系的“机器”描述

函数关系本质上是变量之间的一种运算模式或运算结构, 可以形象地看成“一台函数机器”, 对每一个允许输入的 x 给出唯一一个确定的输出 y . 输入的范围构成了函数的定义域, 输出的范围则构成了函数的值域. 如图 1-1 所示.

【注】 关于函数概念的进一步说明

(1) 函数记号 函数 $y = f(x)$ 的表达式中, $f(\quad)$ 表示函数关系, 而 $f(x)$ 表示对应于 x 的函数值, 两者是有区别的. 习惯上常把函数 f 和函数值 $f(x)$ 都称为函数. 因此, 有时也把表示因变量的字母与表示函数的字母写成相同的, 例如 $y = y(x)$, $s = s(t)$.

(2) 函数的两要素 函数的定义域 D 和函数关系 f . 函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围, 而函数值 y 则是由函数关系 f 来确定的.

【例1】 设函数 $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, 则有函数关系

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 + 3(\quad) - 1,$$

因此 $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 13$,

$$f(a) = 2a^2 + 3a - 1,$$

$$f(x+1) = 2(x+1)^2 + 3(x+1) - 1 = 2x^2 + 7x + 4.$$

二、函数的三种表示方法

1. 解析式法

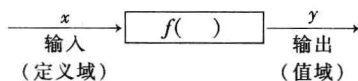


图 1-1 函数的“机器”图示