高等学校数学系列教材

（第二版）

高等代数

邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校数学系列教材

（第二版）

高等代数

■ 邱　森　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/邱森编著. —2版. —武汉：武汉大学出版社，2012.9
高等学校数学系列教材
ISBN 978-7-307-09692-9

Ⅰ.高… Ⅱ.邱… Ⅲ.高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第063368号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:黄添生　　版式设计:支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)
印刷：湖北民政印刷厂
开本：720×1000 1/16 印张:39.75 字数:731千字 插页:1
版次：2008年2月第1版 2012年9月第2版
2012年9月第2版第1次印刷
ISBN 978-7-307-09692-9/O·473 定价:55.00元

第二版序

本书是在第一版的基础上，根据教学实践中反馈的意见和建议全面修订的，我们订正了一些印刷错误、欠妥之处，并将某些段落进行改写，某些内容作了顺序调整，使教材特色更能凸显。同时，为了更新知识，开拓视野，反映近年来世界上本课程改革的新进展，我们增加了一些适应现代化要求的内容，考虑到篇幅，也删弃了一些内容，所作增删如下：

1. 增加了第 2 章探究与发现“CT 图像重建的联立方程法”。

2. 增加了第 4 章阅读材料“严格对角占优矩阵”和阅读与思考“离散线性动态系统”，删去了阅读材料“线性差分方程组模型”。

3. 增加了第 7 章 7.7 节“若尔当基定理”和阅读与思考“广义特征向量的直接求法”。

4. 删去了第 9 章阅读与思考“根子空间分解”。

5. 增加了第 10 章阅读与思考“矩阵的奇异值分解与数字图像压缩技术”，删去了阅读材料“应用：最小二乘法”。

6. 各章设置了“章课题”栏目（例如：多元二次函数的最值，多项式方程的轮换矩阵解法，矩阵的上核与上值域等），以更大的时间和空间跨度，让学生观察和思考问题，初步尝试数学研究的过程，丰厚积累。

最后，对曾经使用过本书的同行和对本书提出过宝贵意见的专家和读者表示衷心的感谢。

编　者

2012 年 7 月

第一版序

高等代数由线性代数和多项式两部分组成，它是大学数学重要的基础课程之一，与微积分、常微分方程、抽象代数、泛函分析、概率统计等其他数学课程都有密切的联系。随着科学技术、生产的迅速发展，越来越多的学科及实际问题都要用到高等代数的知识，特别是，许多重要问题的数学模型都是线性的，线性代数也就成为研究和解决这些问题的得心应手的工具。

本书的内容涵盖了本课程所要求的全部教学内容，其中矩阵是线性代数最基本的工具，它贯穿于线性代数的各个方面，是线性代数的一条主线；第6章和第7章讲的线性空间和线性变换都是由具体的几何背景或其他背景，经抽象概括而形成的概念，因而更具有一般性，应用也更广泛，利用它们，还能帮助我们从较高的层次来理解线性代数的内容，从而得到深一层次的认识；第8章“多项式”不仅在线性代数中要用到，可作为第9章“λ-矩阵”的准备知识，将来在代数的后继课程中也很有用。

编写本书的基本指导思想是：

1. 降低知识起点，加大教材使用弹性。

在引入一些抽象概念时，我们利用直观“模型”作载体，降低知识起点，化难为易，使学生易于理解，也易于利用这些载体进行理性思维，学会以简御难，我们也返璞归真，努力揭示其中原创性的数学思想，因为它们往往是简单而精彩，学生又易于接受的。

在内容设计上，我们关注了学生数学发展的不同需求，注意弹性。在保证基础的前提下，为学生学习不同层次的内容提供了学习台阶，使学生在有限的时间内能学得更好，学到更多有用的本质性的知识。本书中打有“*”号的章节是为对数学基础要求较高的学生编写的，可以作为选学内容或学生自学用。各章复习题也适合于学生考研复习之用。

2. 展现知识的发生发展过程以及知识间的内在联系，揭示其数学本质。

我们采用围绕中心问题逐层展开的叙述方式，用非常具体的问题引出概念，在解决问题的过程中，又力求使学生知其所以然，了解每一步讨论的目的，定理、公式等的推导思路，以及每个概念和每个定理所处的地位和作用，了解知识的来龙去脉以及知识间的内在联系，通过理解，逐步领会代数学的

一些重要思想方法，逐步掌握本门课程的数学本质，从而提高数学素养。

3. 更加强调数学知识的背景与应用。

本书十分注意突出线性代数的应用背景，不仅在新的数学概念或方法引进时这样做，而且还通过“阅读材料”、“阅读与思考”等栏目，穿插一些具有应用背景的实例，以了解运用数学思想、方法和知识解决实际问题的全过程，感受数学的应用价值，开阔视野，增强学习的兴趣。

4. 倡导探究性学习，努力改善教与学的方式。

数学在不断地发展与创新，学习数学的方式也要与时俱进，有所创新。本书设置了“探究与发现”、“探究题”等栏目，选用较合适的题材与问题，引导学生自主探究，让学生通过观察、尝试，特例探讨，归纳、类比，合情推理，猜想、验证，失败反思，改进扩充等活动，逐步掌握独立探求新知识的方法，以获得不断深造的能力和创造能力。这些栏目都具有一定的趣味性、探究性、以及不同层次的发展性，学习时，宜提倡独立思考，使学生在探究过程中能够积累做数学和“再创造”的体验（这并不是单单依靠做习题就能感悟的），并使他们的种种独特的想法也能够得以开拓和发展，学生之间还可以采用各种形式开展讨论，互相报告，合作交流。学习、探究、交流，身体力行，日就月将，总会有水滴石穿之时。

在本书中，我们也注意了与信息技术的整合。在附录中，介绍了“MATLAB”，以便于了解计算机在解决线性代数计算问题中的应用。

在教材编写和出版过程中，我们得到了武汉大学出版社的协助，在此深表谢意。最后，对书中的不妥之处，我们也企盼同行、读者批评指正。

编　者

2007年10月

目　录

第1章 行 列 式

在中学代数中，曾学习过用代入(或加减)消元法求二元线性方程组和三元线性方程组的解. 是否能由公式直接利用方程组的全部系数来求解呢？为此，我们引入了行列式的概念. 它不仅能用于解决 n 元线性方程组公式解问题，而且在线性代数的其他内容和数学的其他分支中都有广泛的应用.

这一章主要讨论下面 3 个问题：

1) 行列式概念的形成.

2) 行列式的基本性质和计算方法.

3) 利用行列式来解线性方程组.

1.1 2阶行列式与3阶行列式

本节的目的是阐述行列式的来源. 它是从二元、三元线性方程组的公式解中引出来的. 故首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此线性方程组：以 a_{22} 乘(1.1)第1式各项，得

$$a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1; \tag{1.2}$$

再用 a_{12} 乘(1.1)第2式各项，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2; \tag{1.3}$$

然后由(1.2)减(1.3)可消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得出

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理，在(1.1)中用 a_{21} 乘(1.1)第1式各项，再用 a_{11} 乘(1.1)第2式各项，然后相减，若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得出

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

故方程组(1.1) 只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，其解就可以立即求得：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

这就是二元线性方程组(1.1) 的公式解.

但(1.4) 不易记忆，为此，我们引入 2 阶行列式的概念. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **叫做一个 2 阶行列式.**

利用 2 阶行列式，方程组(1.1) 的解可以很有规律地写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}. \tag{1.6}$$

我们可以看出，(1.6) 中居分母位置的行列式都是 D，而且 D 是由(1.1) 中未知量的系数按照原来的相对位置排成的，这样看，(1.6) 的分母一下子就记住了. 下面再来看分子. 我们可以看出 x_1 解的分子就是把行列式 D 中第 1 列的元素换成方程组(1.1) 中的两个常数项 b_1,b_2；而 x_2 解的分子则是用(1.1) 中常数项去换行列式 D 中第 2 列元素而成的.

总之，当(1.1) 中未知量的系数所排成的行列式 $D\neq 0$ 时，(1.1) 的解立即可由(1.6) 算出.

例 1.1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=13, \\ 5x_1-4x_2=-2. \end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-3\times 5=-23\neq 0,$$

所以

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{D}=\frac{13\times(-4)-3\times(-2)}{-23}=2,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{D}=\frac{2\times(-2)-13\times 5}{-23}=3.$$

现在来看三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

同样，由消元法可得，当

$$\begin{aligned} D = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ \neq & 0 \end{aligned}$$

时，(1.7) 的解为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}), \\ x_2 &= \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 \\ &\quad - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3), \\ x_3 &= \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} \\ &\quad - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

同前面一样，为了方便记忆，我们引进 3 阶行列式的概念. 令

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

并称

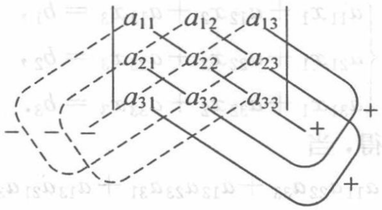
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为一个 3 阶行列式①.

这个行列式含有 3 行、3 列，是 6 个项的代数和. 这 6 个项，我们可用一个简单的规律来记忆，就是所谓 3 阶行列式的**对角线规则**：

---

① 行列式起源于解线性方程组. 1693 年，德国数学家莱布尼茨(G. Leibniz，1646—1716) 曾用行列式来判定 3 个未知量、3 个方程的线性方程组是否有解(1683 年，日本数学家关孝和也做过类似的工作). “行列式” (determinant) 这一名称是法国数学家柯西(A. Cauchy，1789—1857) 于 1815 年首先提出的，英国数学家凯莱(A. Cayley，1821—1895) 则于 1841 年首先创用行列式记号$\left|\quad\right|$.



即实线上3个元的乘积构成的3项都取正号，虚线上3个元的乘积构成的3项都取负号.

例 1.2 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 \\ &\quad -2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6 \\ &= 10.\end{aligned}$$

例 1.3 展开行列式$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 按对角线规则展开，得
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

有了3阶行列式后，(1.8) 可以很有规律地表示为
$$\left.\begin{aligned} & x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \\ & x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

上面3式右边居分母位置的3个行列式都是D，它是线性方程组(1.7) 中的系数按原有相对位置而排成的3阶行列式，而在x_1,x_2,x_3的表达式中的分子分

别是把行列式 D 中第 1,2,3 列换成常数项 b_1,b_2,b_3 而得到的 3 阶行列式. 这与二元线性方程组的解有相同的规律. 不仅如此，以后我们还将看到：n元线性方程组的解也同样可以用"n 阶行列式"来表达，其情况与二元、三元线性方程组解的表达式完全类似.

例 1.4 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ \qquad\quad x_2-\ x_3=5, \\ x_1-\ x_2+3x_3=-8. \end{cases}$$

解 因为$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$，故有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -14 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-27}{-3}=9,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -14 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3}{-3}=-1,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{18}{-3}=-6.$$

我们的目的，是要把 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式，然后利用 n 阶行列式解n元线性方程组. 为此，我们必须弄清 2 阶、3 阶行列式的结构规律，才能推广得 n 阶行列式.

无论 2 阶行列式或 3 阶行列式，我们都可以看到，其行列式的展开式中，有的项取正号，有的项取负号. 那么，每一项前面的符号按什么规则来确定呢？为了精确地叙述这一规则，必须引入排列的概念，它是下一节讨论的内容.

习题 1.1

1. 计算下列行列式：

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$； 2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；

3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$;　　4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. 验证下列等式成立:

1) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3. 利用行列式解下列方程组:

1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = a; \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = b; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-3x_2-4x_3=-10. \end{cases}$

1.2 排　列

本节介绍排列的一些基本概念,为定义 n 阶行列式作准备.

在上节(1.9)的展开式中,每项按第1个下标(称为行标)从小到大的顺序(即自然顺序)排列成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 后,第2个下标 j_1,j_2,j_3 依次写下来为

$$1,2,3;\ 2,3,1;\ 3,1,2;\ 3,2,1;\ 2,1,3;\ 1,3,2.$$

这是3个数码1,2,3的所有排列.一般地有下述定义:

定义1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列.

例如:1,2,3;2,3,1都是3阶排列.4,1,5,3,6,2是一个6阶排列.

实际上，这里所说的 n 阶排列就是我们熟知的 n 个不同元素的全排列.因此 n 阶排列共有

$$n!=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\text{个}.$$

$n!$ 读做 n 阶乘. 例如：3 阶排列共有 $3!=3\times 2\times 1=6$ 个.

例 1.5　写出全部 4 阶排列.

解　4 阶排列共有 $4!=24$ 个，它们是

1,2,3,4；　2,1,3,4；　3,1,2,4；　4,1,2,3；　1,2,4,3；
2,1,4,3；　3,1,4,2；　4,1,3,2；　1,3,2,4；　2,3,1,4；
3,2,1,4；　4,2,1,3；　1,3,4,2；　2,3,4,1；　3,2,4,1；
4,2,3,1；　1,4,2,3；　2,4,1,3；　3,4,1,2；　4,3,1,2；
1,4,3,2；　2,4,3,1；　3,4,2,1；　4,3,2,1.

在所有 $n!$ 个 n 阶排列中 $1,2,3,\cdots,n$ 是唯一的一个按自然顺序构成的排列，称它为**标准排列**. 例如：1,2,3,4 是一个 4 阶标准排列. 而在其他的排列中，都可以找到一个较大的数排在较小的数前面. 例如：4 阶排列

1,4,3,2

中，4 排在 3 之前，4 也排在 2 之前. 3 排在 2 之前. 这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序)，一般定义如下：

定义 1.2　在一个排列中的两个数，如果排在前面的数大于后面的数，则称它们构成一个**反序(或逆序)**. 一个排列中全部反序的个数称为这个**排列的反序数**.

反之，在一个排列中，如果一个较小的数排在一个较大数之前，称这两个数构成一个**顺序**.

例如：在排列 2,3,1 中，2,1 和 3,1 都成反序，2,3 为顺序，所以 2,3,1 的反序数是 2. 读者不难算出排列 4,1,5,3,6,2 的反序数为 7.

给定任意一个排列，我们可以按照以下方法来计算它的反序数：

先看有多少个数排在 1 的前面，设为 m_1 个，那么就有 m_1 个数与 1 构成反序；然后把 1 画去，再看有多少个数排在 2 的前面，设为 m_2 个，那么就有 m_2 个数与 2 构成反序；再画去 2，计算有多少个数排在 3 的前面；如此继续下去，最后设 n 之前有 m_n 个数(显然 $m_n=0$). 因此这个排列的反序数等于

$$m_1+m_2+\cdots+m_n.$$

例如：排列 4,1,5,3,6,2 中，

$$m_1=1,\ m_2=4,\ m_3=2,\ m_4=0,\ m_5=0,\ m_6=0,$$

所以这个排列的反序数为 7.

为了使用方便起见，我们把排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的反序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$.例如：