第一章　一阶方程

§1．求曲线族的微分方程

试求下列曲线族的微分方程，并指出这些微分方程所表示的曲线的特性（C_1，C_2为参量）：

1 $(x-C_1)^2+y^2=1$。

【关于x微分等式两边得：$C_1=x+yy'$。将它代入原式 得曲线族的微分方程$y^2y'^2+y^2=1$。它表示曲线族上任一点 的切线长（该点沿该点的法线至x轴的距离）均为1。

2．$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$。

【关于x微分等式两边一次和二次得：$x-C_1+(y-C_2)y'=0$，$1+y'^2+(y-C_2)y''=0$。由此二式解出C_1，C_2．并代入原式，即得曲线族的微分方程$y''=(1+y'^2)^3$。它表示曲线族上每一点的曲率均为1。

验证曲线族是已给微分方程的通积分（C为参量）

3　$x=ye^{cy+1}$；$y'=y/x(lnx-lny)$。

【关于x微分曲线族表达式两边（y为x的函数）得：$y'=y/x(1+Cy)$。∵由曲线族表达式有$1+Cy=lnx-lny$∴曲线 族的微分方程是$y'=y/x(lnx-lny)$。

4　$y=e^{arcsin cx}$；$xy'=ytg(lny)$。

【由曲线族表达式得$Sin(lny)=Cx$。再关于x微分 此式两边得$(cos lny)/y=C/y'$。将得出的两式相除即得题给的微分方程。

5　$C^2y^2+(C^2-a^2)\ x^2=c^2\ (c^2-a^2)$；$xyy'^2+y'\ (x^2-y^2-a^2)-xy=0$

【关于x微分曲线族表达式两边得：$C^2yy'+(C^2-a^2)x=0$。

∴有$C^2xyy'+(C^2-a^2)x^2=0$和$C^2=a^2x/(x+yy')$两式，将曲线族表达式与此两式的前者相减后，约去C^2，再将前两式之后者代入即可得题给的微分方程。

6　建立切于两条直线$y=\pm(x-b)tg\alpha$且圆心在x轴上的所有圆的微分方程。

【合题意的圆族表达式为：$(x-C)^2+y^2=(C-b)^2\cdot Sin^2\alpha$，其中$C$为参量，关于$x$微分此表达式的两边 得$C'=x+yy'$。再将它代入圆族表达式，即可得所求的微分方程

$$y'^2y^2\cos^2\alpha+2yy'(b-x)\sin^2\alpha+y^2-(b-x)^2\sin^2\alpha=0$$。

7　求与曲线族$x^2/a^2+y^2/c^2=1$（C为参量）正交的轨 线族的微分方程。

【关于x微分等式$1/y^2(1-x^2/a^2)=1/C^2$两边，得已知 曲线族的微分方程 $y'(x^2-a^2)=xy$。以$-1/y_1'$取代此方程中的y'即得所求之微分方程$xyy'+x^2=a^2$。

8　求与曲线族 $x^2+y^2=C^2$（C为参量）交成45° 的等交轨线族的微分方程。

【已给曲线族的微分方程是$x+yy'=0$。把此式中的y'换成$\pm(y'-tg45°)/(1+y'tg45°)$即得所求之微分方程：

$(y+x)y'=y-x$和$(y-x)y'=y+x$。

9　求与曲线族$r=C\cos^2\theta$（C为参量）正交的轨线族的微分方程，

【关于θ微分等式$r(\theta)/\cos^2\theta=C$的两边，得已知曲线族的微分方程$r'=-2rtg\theta$。以$-r^2/r'$取代其中的r'即得所求之微

分方程$r'=\frac{1}{2}r\cdot ctg\theta$

10 求与曲线族 $r=C\sin\theta$（C为参量）交成45° 的等交轨线族的微分方程。

【关于θ微分等式 $r(\theta)/\sin\theta=C$的两边，得已知曲线族的微分方程$r'=r\cdot ctg\theta$。以$\pm r\cdot(r'-r tg45°)/(r+r' tg45°)$取代其中的$r'$，即得所求的微分方程

$r'=r\cdot ctg(\theta+45°)$和$r'=r\cdot ctg(\theta+45°)$。

11 求二次曲线族$x^2/C^2+y^2/(C^2-1)=1$（C 为参量）所满足的微分方程，并从微分方程本身证明这族曲线是自正交曲线族，即这族曲线中的任何两条曲线如果相交则必正交。

【视y为x的函数·关于x微分已知曲线族表达式的两边得：$x/C^2+yy'/(C^2-1)=0$，再由它和原式消去参量C，即得已知曲线族的微分方程：$xyy'^2+(x^2-y^2-1)y'-xy=0$。直接验证结果，此方程不因其中的$y'$被换成$-1/y'$而改变，故命题得证。

§2．变量分离方程，线性方程以及可化为这两种方程的一阶一次方程。

今后，如无特殊声明，积分常数C 均指任意有限常数。积分常数有时也用C_1，C_2等表示。

求解下列微分方程：

12 $y'=\sqrt{(x^2-1)/(y^2-1)}$

【当$|x|>1$，$|y|>1$时，$\sqrt{y^2-1}dy=\sqrt{x^2-1}dx$。从而，$y\sqrt{y^2-1}-\ln|y+\sqrt{y^2-1}|=x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C$。

当$|x|<1$，$|y|<1$时，$\sqrt{1-y^2}dy=\sqrt{1-x^2}dx$，从而，$\arcsin y+y\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}+C$。

13 $y'+\sin\frac{1}{2}(x+y)=\sin\frac{1}{2}(x-y)$

【$y' = \sin\frac{1}{2}(x-y) - \sin\frac{1}{2}(x+y) = -2\sin\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}x$。∴当$\sin\frac{1}{2}y \neq 0$即$y \neq 2n\pi$($n$为整数)时,$dy/2\sin\frac{1}{2}y = -\cos x dx$。积分之，得$tg\frac{1}{4}y = Ce^{-2\sin(x/2)}$，当 $y = 2n\pi$时，直接验证结果：$y = 2n\pi$也是方程的解。

14 $y' = \sqrt{(y^2-1)/(x^2-1)}$。

【显然，$y = \pm 1$是方程的解。

当$|y|<1$，$|x|<1$时，$dy/\sqrt{1-y^2} = dx/\sqrt{1-x^2}$，积分之得$\arcsin y = \arcsin x + C$；当$|y|>1$，$|x|>1$时 $dy/\sqrt{y^2-1} = dx/\sqrt{x^2-1}$,积分之得:$y + \sqrt{y^2-1} = C(x + \sqrt{x^2-1})$。

15 $y' = y/2x + (1/2y)tg(y^2/x)$。

【∵由原式，$y^2/x + tg y^2/x = 2yy' = (y^2)' = [(y^2/x)x]' = (y^2/x)'x + y^2/x$ ∴令$u = y^2/x$ 得 $tg u = x du/dx$。从而$x\sin(y^2/x) = C$。

16 $y' = \sin(x+y+1)$。

【令$u = x+y+1$，则$du/dx = 1 + dy/dx = 1 + \sin u$。故当$1 + \sin u \neq 0$时，$du/(1+\sin u) = dx$,积分后得$tg[\pi/4 - (x+y+1)/2] = -x + C$。当$1 + \sin u = 0$即$x+y+1 = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$($k$为整数)时，$x + y + 1 = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$($k$为整数)也是方程的解。

17 $y' = \frac{1}{3}y^2 + 2/(3x^2)$

【令$u = xy$。则$3xu' - 3u = u^2 + 2$，即$du/[(u+1)(u+2)] = dx/3x$，从而，$(xy+1)/(xy+2) = Cx^{\frac{1}{3}}$即 $y = (2Cx^{\frac{1}{3}} - 1)/x(1 - Cx^{\frac{1}{3}})$.前述过程假定$(xy+1)(xy+2) \neq 0$。通过直接验证，除上述通解外，还有解：$y = -2/x$

18 $(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y)dx + (xy^2 - 4x^3)dy = 0$,

【令$y = ux$，则由原式得：$(x^6 - 2x^5 + 2x^4 - u^3x^3 + 4x^3u)dx + (x^3u - 4x^3)(udx + xdu) = 0$，即$(x^2 - 2x + 2)dx + (u^2-4)du = 0$。从而，积分后得：$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + y^3/(3x^3) - 4y/x$

$=C$.

19 $y'+1=(x+y)^m/[(x+y)^n+(x+y)^p]$

【令$u=x+y$。则原式成为 $(u^{n-m}+u^{p-m})du=dx$。因而，

$$x=\begin{cases}(x+y)^{n-m+1}/(n-m+1)+(x+y)^{p-m+1}/(p-m+1)+C & \text{当}n\neq m-1,\ p\neq m-1\text{时}\\ \ln|x+y|+(x+y)^{p-m+1}/(p-m+1)+C & \text{当}n=m-1,\ p\neq m-1\text{时}\\ (x+y)^{n-m+1}/(n-m+1)+\ln|x+y|+C & \text{当}n\neq m-1,\ p=m-1\text{时}\\ 2\ln|x+y|+C & \text{当}n=m-1.\ p=m-1\text{时}\end{cases}$$

20 $y'=y^3/[2(xy^2-x^2]$

【令$u=y^2$得$du/dx=u^2/(xu-x^2)$。再令$u=xt$得 $dx/x=(t-1)/t\cdot dt$。从而$xt=Ce^t$ 即$y^2=Ce^{y2/x}$

21 $(y^2/b+x^2/a)(yy'+x)+(a-b)/(a+b)(yy'-x)=0$

【令$u=x^2$，$v=y^2$，则$(v/b+u/a)(du+dv)+(dv-du)(a-b)/(a+b)=0$。

$(v/b+u/a-1)(du+dv)+dv\cdot 2a/(a+b)+du\cdot 2b/(a+b)=0$。

$(v/b+u/a-1)(du+dv)+2ab/(a+b)\cdot(dv/b+du/a)=0$

$(v/b+u/a-1)d(u+v)+2ab/(a+b)\cdot d(v/b+u/a-1)=0$

$d(v/b+u/a-1)/(v/b+u/a-1)=-(a+b)/(2ab)\cdot d(u+v)$

积分后代回原变量得：$\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{x^2}{a}-1=Ce^{-(a+b)(x^2+y^2)/(2ab)}$

22 $\{y\sqrt{y^2+x^2}+(y^2-x^2)\sin\alpha-2xy\cos\alpha\}y'$
$+x\sqrt{y^2+x^2}+2xy\sin\alpha+(y^2-x^2)\mathrm{co}\alpha=0$

【令$x=r(t)\cos t$，$y=r(t)\sin t$，代入原式得：

$(r^2\sin t - r^2\cos 2t\sin\alpha - r^2\sin 2t\cos\alpha)(r'\sin t + r\cos t) +$
$(r^2\cos t + r^2\sin 2t\sin\alpha - r^2\cos 2t\cos\alpha)(r'\cos t - r\sin t) = 0$ 化简得$\frac{dr}{r} = \frac{\sin(t+\alpha)}{1-\cos(t+\alpha)}dt$，积分后代回原变量得：

$x\cos\alpha - y\sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2} = C(x^2+y^2)$。

23 $y(1+xy)dx + (1-xy)xdy = 0$。

【显然，$x=0$和$y=0$是方程的二个特介。当$x\neq 0$，$y\neq 0$时，改写方程成$ydx + xdy + xy^3(ydx - xdy)/y^2 = 0$。令$u = xy$ $v = x/y$，并注意到$u^2/v = xy^3$得$dv/v + du/u^2 = 0$。
$\therefore v = Ce^{1/u}$。即$x = Cye^{1/xy}$

24 $y' + x = \sqrt{x^2+y}$。

【令$\sqrt{x^2+y} = xu$，于是$y = x^2(u^2-1)$，代入原式后分离变量得$2udu/[(1-u)(1+2u)] = dx/x$ 因此，方程的通解为

$$2(x^2+y) - x\sqrt{x^2+y} - x^2 = Cx^{4/3}.$$

25 $x^2(y'+y^2) = a(xy-1)$。

【令$u = xy$得$x\cdot du/dx = (1-u)(u-a)$。当$a\neq 1$时
$\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{u-a}\right)du = \frac{dx}{x}$，故此时解为$xy-a = Cx^{1-a}(1-xy)$；
当$a=1$时，解为$(xy-1)\ln(Cx) = 1$。

26 $x(y^2+x^2-a)y' - y(y^2+x^2+a) = 0$

【由原式，$x(y^2+x^2-a)dy - y(y^2+x^2+a)dx = 0$，
$(x^2+y^2)(xdy-ydx) - a(xdy+ydx) = 0$；$(1+x^2/y^2)\cdot$
$\cdot(xy)^2d(y/x) - ad(xy) = 0$ $\therefore$令$u = y/x$，$v = xy$得$(1+u^{-2})\cdot$
$\cdot du = av^{-2}dv$。因此通解为 $xy = C(y^2-x^2+a)$。

27 $(y-x)\sqrt{1+x^2}y' = (1+y^2)^{3/2}$

【令$u = \mathrm{arctg}\,y$，$v = \mathrm{arctg}\,x$，则方程变成$dv =$
$\sin(u-v)du$。再令$z = u-v$得$\sin z dz/(1-\sin z) = dv$。因而

$-z+tg(\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}\pi)=v+C$。因此方程的通解为

$\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}+y-x=(1+xy)(arctgy+C)$

28 $(x^2y^2+1)ydx+(x^2y^2-1)xdy=0$

【由原式，$x^2y^2(ydx+xdy)+ydx-xdy=0$。令$u=xy$ $v=x/y$并注意到$u/v=y^2$ 得$udu+dv/v=0$。积分后代回原变量得$x^2e^{x^2y^2}=Cy^2$。上述结果是在$xy\neq0$的条件下。不难看出，$y=0$也是方程的解。

29 $xy'-x(y-x)\sqrt{y^2-x^2}-y=0$。

【不难看出，$y=x$和$y=-x$是方程的二个解。当$y\neq\pm x$时，方程可变形为$xy'-y\mp x(y-x)^2\sqrt{(y+x)/(y-x)}=0$（当$y-x>0$时，取“$-$”号；当$y-x<0$时取“$+$”号）。令$u=\sqrt{(y+x)/(y-x)}$。并注意到$udu/dx=(y-xdy/dx)/(y-x)^2$得$\mp du=xdx$。因此，$\mp2\sqrt{(y+x)/(y-x)}=x^2+C$。〔注意：此处表明$(y-x)(x^2+C)<0$〕

即 $y=x\dfrac{(x^2+C)^2+4}{(x^2+C)^2-4}$，$\dfrac{x(x^2+C)}{(x^2+C)^2-4}<0$。（$\because(y-x)(x^2+C)$

$=\dfrac{8x(x^2+C)}{(x^2+C)^2-4}$）。

30 $(y+y\sqrt{x^2y^4-1})dx+2xdy=0$。

【令$u=xy^2$得$du+(u/x)\sqrt{u^2-1}dx=0$。分离变量后积分，再代回原变量得$arccos(1/xy^2)+ln|x|=C_1$，或等价地写成$ln(Cx)=arcsin(1/xy^2)$，即$xy^2sinlu(Cx)=1$。上述结果是在$xy\neq0$，$x^2y^4-1\neq0$的条件下得到的。直接验证$xy=0$和$x^2y^4=1$也是方程的解。

31 $(3x^2y^3-6xy^2+5y)dx+(2x^3y^2-3x^2y)dy=0$

【令$u=xy$得$(u^2-3u+5)dx+(2u-3)xdu=0$分离变量后积分，再代回原变量得$x(x^2y^2-3xy+5)=C$。又直接验证知

$y=0$也是方程的解

32 $dy - y\,\mathrm{tg}\,x\,dx = |\sec x|\,dx$。

【令$y=u\sec x$。则原方程成为$du/dx=\pm 1$（当$\sec x>0$时取"$+$"号，当$\sec x<0$时取"$-$"号）。从而$y=(C\pm x)\sec x$即

$$y=\begin{cases}(C+x)\sec x, & \text{当}2k\pi-\frac{1}{2}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{2}\pi\text{时，}\\ (C-x)\sec x, & \text{当}(2k+1)\pi-\frac{1}{2}\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{1}{2}\pi\text{时。}\end{cases}$$

其中k为整数。

33 $(xy+y+\sin y)dx+(x+\cos y)dy=0$。

【令$u=xy+\sin y$ 则原方程成为$udx+du=0$。故原方程的通解为：$xy+\sin y=Ce^{-x}$。

34 $(x^2-y^2-2y)dx+(x^2+2x-y^2)dy=0$。

【令$u=x+y$，$v=x/y$得$(v^2-1)du-2dv=0$。因此，方程的解为$x-y=C(x+y)e^{x+y}$和$x+y=0$。

求下列方程满足指定条件的积分：

35 $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$；$x=0$时$y=1$。

【令$t=x^2$得$d(e^t y-t)=0$∴方程的通积分为$e^{x^2}y-x^2=C$。∵$x=0$时$y=1$∴$C=1$，故满足条件的特积分为 $e^{x^2}y=x^2+1$

36 $x^2y'\cos y+1=0$；当$x\to+\infty$时，$y\to5\frac{1}{3}\pi$

【分离变量后积分得通积分$\sin y-1/x=C$。由条件得$C=-\sqrt{3}/2$。因此，$\sin y=1/x-\sqrt{3}/2$。于是，$y=\arcsin(1/x-\sqrt{3}/2)+2k\pi$或者$y=\pi-\mathrm{arcsiu}(1/x-\sqrt{3}/2)+2k\pi$。其中$k$为整数。因为前者对任何整数$k$均不满足条件，故应舍去；而后者中只有$k=2$时才满足条件，故满足条件的积分是

$$y=arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{3}-1/x)+5\pi$$

37　$(1+x^2)y'-\frac{1}{2}cos^2 2y=0$；当$x\to-\infty$时，$y\to3\frac{1}{2}\pi$。

【通解为$tg2y=arctgx+C$即$2y=k\pi+arctg(arctgx+C)$，其中k为整数。由条件应有$(7-k)\pi=arctg(-\frac{1}{2}\pi+C)$。故$k=7$，从而$C=\frac{1}{2}\pi$∴满足条件的特积分为

$$y=3\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}arctg(arctgx+\frac{1}{2}\pi)。$$

38　$e^y=e^{4y}y'+1$；当$x\to+\infty$时y有界。

【当$e^y-1\neq0$时，$dx=e^{4y}/(e^y-1)\cdot dy$从而

$x=\frac{1}{3}e^{3y}-\frac{1}{2}e^{2y}+e^y+ln|e^y-1|+C$。

∵对任何取定的常数C。当$x\to+\infty$时，由此积分确定 的y不可能有界。∴上述解中无满足条件的特解。

显然$e^y-1=0$ 即 $y=0$也是方程的解且满足条件，因此，$y=0$即为所求之积分。

39　求出方程$dy/dx=\sqrt{|y|}$于$-\infty<x<+\infty$上有定义 且满足初值条件$y(0)=0$的全部解。

【当$y>0$时，$dy/dx=\sqrt{y}$，其通解是$x=2\sqrt{y}+C$。

∵$y(0)=0$，∴$C=0$。从而$x=2\sqrt{y}$即$y=\frac{1}{4}x^2\ (x\geqslant0)$；

当$y<0$时，$dy/dx=\sqrt{-y}$，其通解是$x=-2\sqrt{-y}+C$，

∵$y(0)=0$∴$C=0$，从而$x=-2\sqrt{-y}$即$y=-\frac{1}{4}x^2$。$(x<0)$。

又显然$y=0$也是方程的满足条件的解。

因此，合题意的解为：

$$y=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2, & x\geqslant0\\ -\frac{1}{4}x^2, & x<0\end{cases}\quad 和y=0$$　】

解下列各微分方程：

40　$(x^2+y^2+3)y'=2x(2y-x^2/y)$。

【令$u=x^2$，$v=y^2$得，$(u+v+3)dv=2(2v-u)du$。 再令

$u=r-2$，$v=s-1$得，$(r+s)ds=2(2s-r)dr$。此系齐次方程，令$s=zr$得，$(1+z)(zdr+rdz)=2(2z-1)dr$，即$(1+z)rdz=(z-2)(1-z)dr$。当$(z-2)(z-1)\neq 0$时，分离变量后积分，再代回原变量得$(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)$。当$(z-2)(z-1)=0$时，不难验证，$y^2-x^2-1=0$也是方程的解】

41 $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$。

【先令$x=z^2$，再令$y=zu$得：$u(u^4-1)dz+(u^4-3)zdu=0$ 分离变量后积分并代回原变量得：$y^4-x^2=Cy^6$。此外，$y=0$也是方程的解。

42 $(3x+5y+6)y'=7y+x+2$。

【先令$x=z-2$，再令$z=uy$得$(1-u)(u+5)dy=(7+u)\cdot ydu$，当$(1-u)(u+5)\neq 0$时，分离变量后积分得：$(y-x-2)^4=C(x+5y+2)$，当$(1-u)(n+5)=0$时，通过直接验证，除上述解外，还有解$y=-\frac{1}{5}(x+2)$。

43 $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$。

【令$u=y+\sqrt{y^2-x^2}$。于是有$y=\frac{1}{2}(u+x^2/u)$．将它们代入原方程并化简整理得：$(1-x^2/u)(xdu/dx-2u)=0$。由$1-x^2/u^2=0$得$y=\pm x$，直接验证知，$y=\pm x$是方程的解；由$x.du/dx-2u=0$得解$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$。

44 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

【令$y=x\sin u$，$-\frac{1}{2}\pi\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}\pi$得$|x|\cos u(|x|du/dx-1)=0$。显然，$x=0$不是方程的解；由$\cos u=0$得$y=\pm x$。容易验证。它是方程的介；由$|x|du/dx-1=0$ 得解$y=|x|\sin(C+\ln|x|。)$

45 $4y^6+x^3=6xy^5y'$。

【令$u=y^2$得$3xu^2du/dx=4u^3+x^3$。再令$u=xv$。得$3v^2x\cdot dv/dx=1+v^3$。分离变量后积分并代回原变量（顾及$1+v^3$

$=0$的情况）得：$y^6+x^3=Cx^4$。

46 $(x^6-y^4)dy=3x^5ydx$。

【显然$y=0$是方程的解。当$y\neq0$时，原方程等价于$2(x^6-y^4)ydy=6x^5y^2dx$。令$u=x^3$，$v=y^2$得$(u^2-v^2)dv=2uvdu$。再令$u=sv$得$(s^2+1)dv=-2svds$，解得：$y^2=C(x^6+y^4)$，$C\neq0$。

综上所述，方程的通解为：$y^2=C(x^6+y^4)$。其中C为任意常数。

47 $xy'\ln x-(1+\ln x)y+\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)=0$。

【原方程等价于$y'-\dfrac{1+\ln x}{x\ln x}y=-\dfrac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x\ln x}$

$$\therefore y=e^{\int\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}\left(-\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x\ln x}e^{-\int\frac{1+\ln x}{x\ln x}dx}dx+C\right)$$

$$=x\ln x\left(-\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2x}dx+C\right).$$ 利用分部积分法，

$$\int\frac{2\sqrt{x}}{2x^2\ln^2x}dx=-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}-\int\frac{1}{2x^{3/2}\ln x}dx$$ 即，

$$\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2x}dx=-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x},$$ 故$y=\sqrt{x}+Cx\ln x$。

48 $(xy^5-x^2y^2)dy+(x^2-y^6)dx=0$。

【由原方程得$(y^3-x)\{xy^2dy-(x+y^3)dx\}=0$。

$\therefore y^3=x$或$xy^2dy-(x+y^3)dx=0$。显然$x=0$是后者之解，从而也是原方程之解。当$x\neq0$时，令$u=y^3$，则后者等价于$du/dx-3u/x=3$。因而$y^3=u=-1\frac{1}{2}x+Cx^3$。

49 $y'+\sin y+x\cos y+x=0$。

【显然$y=(2k+1)\pi$，k为整数，是方程的解。当$y\neq(2k+1)\pi$时，令$u=\mathrm{tg}\frac{1}{2}y$得：$du/dx+u=-x$，从而$\mathrm{tg}\frac{1}{2}y=1-x+$

Ce^{-x}。

50 $xy'-y=x/ln|x|$。

【$y'-y/x=1/ln|x|$, $\quad\therefore y=x\left(\int\frac{dx}{xln|x|}+C\right)$.

$\because$若记$t=|x|$则$dt/t=dx/x$。$\therefore y=xln|ln|x||+C$。

51 $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+ax^3=0$。

【$\because x=0$和$x=\pm1$均不是方程的解，$\therefore$原方程等价于

$y'-\dfrac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y=-\dfrac{ax^3}{x(x^2-1)}$于是，

$$y=x|x^2-1|^{\frac{1}{2}}\left(\int\frac{ax^2dx}{(1-x^2)|x^2-1|^{1/2}}+C\right)$$

$$=\begin{cases}x(a+C\sqrt{1-x^2}), & \text{当}|x|<1\text{时}\\ x(a+C\sqrt{x^2-1}), & \text{当}|x|>1\text{时}\end{cases}$$

又由原方程，当$x=1$时$y=a$；当$x=-1$时$y=-a$，故综合上述，方程的解为$y=x(a+C\sqrt{|x^2-1|})$。

52 $y'+xsin2y=xe^{-x^2}cos^2y$。

【显然，$y=(k+\frac{1}{2})\pi$（k为整数）是方程的解。当$y\neq(k+\frac{1}{2})\pi$时，令$u=tgy$得$du/dx+2xu=xe^{-x^2}$。从而，$tgy=u=e^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2+C)$。

53 $y'-ay/x=(x+1)/x$，a为常数。

【$y=|x|^a\left(\int\frac{x+1}{x|x|^a}dx+C\right)$

$$\therefore\text{当}x>0\text{时}\quad y=\begin{cases}x+lnx+C. & a=0\\ xlnx-1+Cx. & a=1\\ x/(1-a)-1/a+Cx^a & a\neq0,1.\end{cases}$$

当$x<0$时 $y=\begin{cases} x+ln(-x)+C, & a=0 \\ xln(-x)-1+C(-x), & a=1 \\ x/(1-a)-1/a+C(-x)^a & a\neq 0,\ 1。\end{cases}$

故综合上述，方程的解为

$$y=\begin{cases} x+ln|x|+C & a=0 \\ x+ln|x|-1+C|x| & a=1 \\ x/(1-a)-1/a+|x|^a & a\neq 0,\ 1 \end{cases}$$

54 $\sqrt{1+x^2}y'sin2y=2xsin^2y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$

【令$u=sin^2y$ 得 $\dfrac{du}{dx}-\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}u=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{2\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore$ $sin^2y=u=e^{2\sqrt{1+x^2}}[C+ln(x+\sqrt{1+x^2})]$。

55 $xy'-y=\dfrac{xcosln|ln|x||}{ln|x|}$

【原方程等价于$y'-\dfrac{y}{x}=\dfrac{cosln|ln|x|}{ln|x|}$对$x>1$，$0<x<1$，$-1<x<0$ 和$x<-1$ 四种情况分别讨论，均 有$dln|ln|x||=\dfrac{dx}{xln|x|}$因此，$y=|x|\left(\int\dfrac{cos lu|lu|x||}{|x|ln|x|}dx+C_1\right)$

$=x\left(\int\dfrac{cosln|ln|x||}{xln|x|}dx+C\right)=x\left(\int cosln|ln|x||dln|lu|x||+C\right)$。$=x(sin|lu|x||+C。)$

56 $(x^2y^2-1)y'+2xy^3=0$

【显然$y=0$是方程的解。当$y\neq 0$时令$u(y)=x^2$。 得$du/dy+u/y=1/y^3$。因而$x^2=u=1/y(-1/y+C)$。$C\neq 0$。故综上 所述，方程的解为$y=C(1+x^2y^2)$。

57　$3(y^2-x^2)y'+2y^3-6x(x+1)y-3e^x=0$。

〖由原式，$3y^2y'-3(x^2y'+2xy)+2(y^3-3x^2y)=3e^x$。即$d(y^3-3x^2y)/dx+2(y^3-3x^2y)=3e^x$。∴令$u=y^3-3x^2y$得$du/dx+2u=3e^x$，从而$y^3-3x^2y=u=e^{-2x}(e^{3x}+C)$即$(y^3-3x^2y)e^{2x}=e^{3x}+C$。

58　$(x+y)(1-xy)dx+(x+2y)dy=0$。

〖由原式$xdx-xy(x+y)dx+ydx+xdy+2ydy=0$ 即$xdx-x(xy+y^2)dx+d(xy+y^2)=0$。∴令$u=y(x+y)$ 得　$du/dx-xu=-x$。因而$(x+y)y=u=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

59　$y'=y/(2y\ln y+y-x)$。

〖视x为y的函数，并改写方程成$dx/dy+x/y=1+2\ln y$. ∴方程的通解为$x=y\ln y+Cy^{-1}$。

60　$(2x+1)y'-4e^{-y}+2=0$。

〖令$u=e^y$得$du/dx+2/(2x+1)\cdot u=4/(2x+1)$。因而，$e^y=u=(4x+C)/(2x+1)$。

61　$y'=y/(x+y^3)$。

〖显然，$y=0$是方程的解。当$y\neq0$时视x为y的函数并改写方程成$dx/dy-x/y=y^2$，于是，$x=y(\frac{1}{2}y^2+C)$。

62　设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解y_1，y_2。若线性组合$\alpha y_1+\beta y_2$也是方程的解，求α与β之间的关系。

〖∵y_1，y_2，$\alpha y_1+\beta y_2$均是方程$y'+P(x)y=Q(x)$的解，∴$y_1'+P(x)y_1\equiv Q(x)$，$y_2'+P(x)y_2\equiv Q(x)$，

$$(\alpha y_1+\beta y_2)'+P(x)(\alpha y_1+\beta y_2)\equiv Q(x)。$$

又∵$(\alpha y_1+\beta y_2)'+P(x)(\alpha y_1+\beta y_2)\equiv(\alpha+\beta)Q(x)$。∴$(\alpha+\beta)Q(x)\equiv Q(x)$。又∵已知$y'+P(x)y=Q(x)$ 是非齐次

方程，即$Q(x)\neq 0$ ∴ $\alpha+\beta=1$。

63 设$f(x)$在$0\leqslant x<+\infty$上连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$（$b$是某个常数）。求证：当常数$a>0$时，方程$y'+ay=f(x)$的一切解当$x\to+\infty$时趋于$b/a$；而当$a<0$时，方程有且只有一个解有此性质。

【方程的通解为$y=e^{-ax}\left(C+\int_0^x f(x)\,e^{ax}dx\right)$。

当$a>0$时。先证：若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$ 事实上，∵

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，∴对任给的$\varepsilon>0$，存在$\triangle_1>0$，当$x>\triangle_1$时，

$|f(x)|<a\varepsilon/2$。记$A=\left|\int_0^{\triangle_1}f(x)\,e^{ax}dx\right|$。∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-ax}=0$

∴对$\varepsilon/[2(A+1)]>0$，存在$\triangle_2>0$，当$x>\triangle_2$时，$e^{-ax}<\varepsilon/[2(A+1)]$。于是，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\triangle=\triangle_1+\triangle_2$，当$x>\triangle$时。$\left|e^{-ax}\int_0^x f(x)\,e^{ax}dx\right|\leqslant e^{-ax}A+e^{-ax}\int_{\triangle_1}^x|f(x)|e^{ax}dx$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{a\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{a}(1-e^{-ax})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。故$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-ax}\int_0^x f(x)\cdot e^{ax}dx\right)=0$ 从而$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$。

∵ $y=e^{-ax}\left\{C+\int_0^x\left(f(x)-b\right)e^{ax}dx\right\}+b/a\cdot(1-e^{-ax})$

∴若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，则对一切$C$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y=b/a$。

当$a<0$时，$\int_0^{+\infty}f(x)e^{ax}dx$收敛。∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-ax}=\infty$。∴欲使$\lim\limits_{x\to+\infty}y$为有限数，必须$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(C+\int_0^x f(x)\,e^{ax}dx\right)=0$。

即$C=-\int_0^{+\infty}f(x)\,e^{ax}dx$·反之，当$C=-\int_0^{+\infty}f(x)\,e^{ax}dx$时，由

洛必达法则，有

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(x)e^{ax}dx-\int_0^{+\infty}f(x)e^{ax}dx}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}$$

故当$a<0$时，有且只有一个解有题示之性质。

64 设$y(x)$在$0\leqslant x<\infty$上连续可微，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0$。求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$

【记$y'(x)+y(x)=f(x)$，则$f(x)$在$0\leqslant x<+\infty$上连续且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。故由上题，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$。

65 设$f(x)\leqslant C+k\int_a^x f(t)g(t)dt$，其中$g(x)\geqslant 0$；$g(x)$，$f(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$上皆连续，$C$，$K$均为常数，$K\geqslant 0$，证明：$f(x)\leqslant Ce^{K\int_b^x g(t)dt}$

【命题对$K=0$显然成立。下设$K>0$。令$y(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt$，则$y'(x)=f(x)g(x)\leqslant Cg(x)+Kg(x)y(x)$。再令$y'(x)-Kg(x)y(x)=h(x)$。则$h(x)\leqslant Cg(x)$，$y(x)=e^{K\int_a^x g(t)dt}\left(C_1+\int_a^x h(u)\cdot e^{-k\int_a^u g(t)dt}du\right)$ $\because y(a)=0\therefore C_1=0$，因而

$$y(x)\leqslant Ce^{k\int_a^x g(t)dt}\left(\int_a^x g(u)e^{-k\int_a^u g(t)dt}du\right)$$

$$=-\frac{C}{K}e^{K\int_a^x g(t)dt}\left(e^{-K\int_a^x g(t)dt}-1\right)=-\frac{C}{K}+\frac{C}{K}e^{K\int_a^x}$$

$g(t)\,dt$ $\therefore f(x)\leqslant C+Ky(x)=Ce^{K\int_a^x g(t)\,dt}$

66 求微分方程$xy'+ay=1+x^2$满足初始条件 $y(1)=1$的解$y(x,\ a)$，其中a为参数。并证明$\lim\limits_{a\to 0}y(x,\ a)$是方程$xy'=1+x^2$的解。

【方程$xy'+ay=1+x^2$的通解为$y=e^{-\int\frac{a}{x}dx}\left(C+\int\frac{1+x^2}{x}e^{\int\frac{a}{x}dx}dx\right)$

$\therefore$当$a=0$时，$y=C+ln|x|+\frac{1}{2}x^2$；

当$a=-2$时，$y=Cx^2-\frac{1}{2}+x^2ln|x|$；

当$a\neq 0,\ -2$时，$y=|x|^{-a}\left(C+\int\frac{1+x^2}{x}(x^2)^{a/2}dx\right)$

$=C|x|^{-a}+1/a+x^2/(a+2)$。

$\because y(1)=1$。$\therefore$方程$xy'+ay=1+x^2$满足$y(1)=1$的介是

$$y(x,\ a)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+ln|x|. & \text{当}a=0\text{时}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+ln|x|. & \text{当}a=-2\text{时}\\ [1-1/a-1/(a+2)]\,|x|^{-a}+ & \\ 1/a+x^2/(a+2). & \text{当}a\neq 0,\ -2\text{时}\end{cases}$$

$\because$当$a\to 0$时，可设$a\neq 0,\ -2$，再注意到由洛必达法则，

$\lim\limits_{a\to 0}(1-|x|^{-a})/a=\lim\limits_{a\to 0}(|x|^{-a}ln|x|)=lu|x|$。

$\therefore\lim\limits_{a\to 0}y(x,a)=\lim\limits_{a\to 0}\{[1-1/a-1/(a+2)]|x|^{-a}+1/a+x^2/(a+2)\}=\lim\limits_{a\to 0}\{[1-1/(a+2)]\,|x|^{-a}+x^2/(a+2)+(1-|x|^{-a})/a\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2+lu|x|$。

记$\bar{y}=\lim\limits_{a\to 0}y(x,\ a)$ 则$\bar{y}'=x+1/x$ 即 $x\bar{y}'=x^2+1$。