3

国际奥林匹克数学竞赛

北京西城区数学奥校编写组 编

初中数学选讲及自测题（第三册）

中国广播电视出版社

国际奥林匹克数学竞赛

初中数学选讲及自测题

（第三册）

北京西城区数学奥校编写组　编

中国广播电视出版社

（京）新登字097号

国际奥林匹克数学竞赛

初中数学选讲及自测题

第三册

北京西城区奥校编写组　编

中国广播电视出版社出版发行
（北京复外广播电影电视部灰楼　邮政编码10086）
北京大兴沙窝店印刷厂印刷
全国各地新华书店经销
•
787×1092毫米　32开　10.5印张　222（千）字
1992年12月第1版　1992年12月第1次印刷
印数：1—10100册　定价6.00元
ISBN　7—5043—2021-8/G·753

前　言

在中学数学教学领域内，开拓第二课堂的工作已受到普遍重视，组织数学竞赛活动是推动这项工作的重要一环。

为使初中学生开阔视野、启迪思维、发展智力、提高能力，推动数学奥林匹克活动的开展，多年来，北京市西城区广泛开展了初中数学竞赛辅导讲座活动，并取得了较好的成绩。

为提高竞赛辅导讲座的质量，我们组织多年从事讲课辅导的教练员，编写了《国际奥林匹克数学竞赛初中数学选讲及自测题》丛书，分一、二、三册，供初中三个年级使用。全书基本上概括了初中数学的重要基础知识、基本技能和基本方法，对初中数学竞赛范围内的知识作了系统归纳，特别着重了数学思维能力、数学思想方法和解题方法、解题能力的训练。

对书中每个专题，都分三个步骤来展开：一、概述知识要点；二、选择典型题目进行解题思路的分析和揭示解题规律；三、给出自测题及答案．这样可使读者了解竞赛的要求，提高分析问题和解决问题的能力，掌握驾驭知识的主动权，从而为参加竞赛活动打下良好的基础．

参加本书编写工作的有罗小伟、陈娴、王永俊、张鸿菊、陶文中、郑康、金宝铮、李岗、欧阳东方、李松文和郑

廉等同志。

在编写过程中，得到了茅瑾同志的大力支持，特在此表示谢意。

编　者

一九九二、十、

目　录

第一讲 指　　数

一、内容提要

1. 幂

求几个相同因数的积的运算叫做乘方，乘方的结果叫做幂.

$$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$$

n是正整数时，a^n叫做正整数指数幂. 如果n扩展到有理数时，a^n叫做有理数指数幂.

零指数：$a^0=1\quad(a\neq0)$.

负指数：$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$（n是正整数，$a\neq0$）.

分数指数：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$（$a>0$，$m$、$n$都是正整数，$n>1$）；当$a<0$时，$m$是奇数，$n$为偶数，$a^{\frac{m}{n}}$无意义.

2. 有理指数幂的运算性质

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$(a^m)^n=a^{mn}$；$(ab)^n=a^nb^n$，

（$a>0$，$b>0$、m、n都是有理数）.

二、范例

例1 求使下列式子有意义的x的值。

（1）已知：$(x^2-4x+3)^0=x^2-2x-2$；

（2）已知：$\dfrac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}+(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^{\frac{1}{2}}}$

解：（1）$x^2-4x+3\neq0$，且$x^2-2x-2=1$。

故$x\neq1$，$x\neq3$且$x^2-2x-3=0$。

$\therefore x=3$（舍去），$x=-1$，即x的值为-1。

（2）$\because\begin{cases}x^2-4\geqslant0\\4-x^2\geqslant0\end{cases}$ $\therefore x^2=4$，$x=\pm2$。但由于分母中$x+2\neq0$，就是$x\neq-2$、故x的值为2。

例2 计算以下各题：

（1）$\left(4\dfrac{17}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$；　　（2）$0.25^{12}\times4^{14}$；

（3）$\left[\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2}\right]^{-2}\times\left\{-\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\right]^2\right\}$。

解：（1）原式$=\left(\dfrac{125}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}}$

$$=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

（2）原式$=(0.25\times4)^{12}\times4^2=16$。

（3）原式$=\left(\dfrac{1}{9}\right)^4\times\left[-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-6}\right]=3^{-8}$

$\times(-3^6)=-3^{-2}=-\dfrac{1}{9}$.

说明：(1) 应用 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-r}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{r}$ ($a\neq0$，$b\neq0$，r 为有理数）可简化计算；(2) 灵活运用运算性质，如 $(ab)^n=a^nb^n$，反之 $a^nb^n=(ab)^n$；(3)化成同底数后再进行计算，这样比较简便。

例3 (1)已知 $x+x^{-1}=3$，求 x^3+x^{-3} 的值。

(2) 已知 $10^\alpha=5$，$10^\beta=6$，求 $10^{2\alpha+\beta-1}$ 的值。

解：(1) $x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})(x^2-xx^{-1}+x^{-2})$
$=3[(x+x^{-1})^2-3xx^{-1}]=3\times(3^2-3)=18$.

(2) $\because 10^\alpha=5$，$\therefore 10^{2\alpha}=25$，又 $10^\beta=6$，

$\therefore 10^{\beta-1}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. 得 $10^{2\alpha+\beta-1}=15$.

例4 比较 3^{-20} 与 2×3^{-21} 的大小。

解法一：$\because 3^{-20}-2\times3^{-21}=(3-2)\times3^{-21}=3^{-21}$
$=\dfrac{1}{3^{21}}>0$. $\quad\therefore 3^{-20}>2\times3^{-21}$.

解法二：$\because 3^{-20}$，2×3^{-21} 都是正数，而 $\dfrac{3^{-20}}{2\times3^{-21}}$
$=\dfrac{3^{-20-(-21)}}{2}=\dfrac{3}{2}>1$，$\therefore 3^{-20}>2\times3^{-21}$.

例5 计算：

(1) $\left(\sqrt{x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}\right)^3$

(2) $300^{\frac{1}{2}}+10\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-10(2-\sqrt{3})^{-1}$
$+(-\sqrt{3})^{0}$

(3) $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})(a-b+c$
$+2a^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{1}{2}})$

(4) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

解：(1) 原式$=(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{12}})^{3}=(x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}})^{3}$

$$=(x^{\frac{5}{6}})^{3}=x^{\frac{5}{2}}=x^{2}\sqrt{x}$$

(2) 原式$=10\sqrt{3}+10\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-10(2+\sqrt{3})$

$$+1=10\sqrt{3}+10\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}-20-10\sqrt{3}+1$$

$$=10\times\frac{3}{2}-19=-4.$$

(3) 原式$=[(a^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})-b^{\frac{1}{2}}][(a^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})+b^{\frac{1}{2}}]$

$$\cdot(a-b+c+2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}})$$

$$=[(a^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}})^{2}-b](a-b+c+2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}})$$

$$=(a-2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c-b)(a-b+c+2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}})$$

$$=[(a-b+c)-2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}][(a-b+c)$$

$+ 2a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}]$

$= (a-b+c)^2 - 4ac$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

(4)原式 $= \dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^3 - 1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1} + \dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^3 + 1}{x^{\frac{1}{3}} + 1} - \dfrac{x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} - 1)}{x^{\frac{1}{3}} - 1}$

$= (x^{\frac{1}{3}} - 1) + (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1) - x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + 1)$

$= x^{\frac{1}{3}} - 1 + x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1 - x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = -x^{\frac{1}{3}}$.

说明：根式运算，一般都可以化为分数指数进行运算。运算结果要看原题的形式，原题中如用根式表示，结果要化为最简根式；若原题都是分数指数形式，结果不必化为最简根式。

例6 已知$a^{2x} = \sqrt{2} + 1$，求 $\dfrac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$的值。

解：原式分子、分母同乘以a^x，得

$$原式 = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1}$$

$\because a^{2x} = \sqrt{2} + 1$，$\therefore a^{4x} = (a^{2x})^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$，$a^{-2x} = \dfrac{1}{a^{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$。

$\therefore$原式 $= \dfrac{(3 + 2\sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} + 1 + 1} = \dfrac{2 + 3\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

$$=\frac{(2+3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{2}-2}{2}=2\sqrt{2}-1$$

例7 计算：(1) $\left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\frac{a\sqrt{b^{-4}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^{-6}$

(2) $\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)\cdot\sqrt[3]{a}$

解： (1) 原式 $=\left[\frac{a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{2}{3}}b}\div\left(\frac{ab^{-2}}{a^{-1}b}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-6}$

$$=\left[b^{-\frac{3}{2}}\div(a^2b^{-3})^{\frac{1}{2}}\right]^{-6}=\left(\frac{b^{-\frac{3}{2}}}{ab^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-6}=(a^{-1})^{-6}=a^6$$

(2) 原式 $=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\frac{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\cdot a^{\frac{1}{3}}$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a(a-8b)}{a-8b}=a.$$

说明：在解(2)题时，应注意运算顺序，在含有连续乘除的运算中，按从左到右的次序进行演算，若先算后面的乘法就错了。

例8 已知：$a>0$，$x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$。

求：$(x+\sqrt{1+x^2})^n$的值。

解法一：$\because x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$

$$\therefore 1+x^2=1+\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})^2.$$

$$=\frac{1}{4}(4+a^{\frac{2}{n}}-2+a^{-\frac{2}{n}})=\frac{1}{4}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}})^2,$$

$$\therefore \sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}),$$

$$\therefore (x+\sqrt{1+x^2})^n.$$

$$=\left[\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}})\right]^n=a.$$

解法二：$\because x=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}}-a^{-\frac{1}{n}})$

$\therefore$ 得 $(a^{\frac{1}{n}})^2-2xa^{\frac{1}{n}}-1=0$，这是关于 $a^{\frac{1}{n}}$ 的一元二次方程。

$\therefore a^{\frac{1}{n}}=x\pm\sqrt{1+x^2}$，又 $\because a^{\frac{1}{n}}>0$

$\therefore a^{\frac{1}{n}}=x+\sqrt{1+x^2}$

得 $(x+\sqrt{1+x^2})^n=(a^{\frac{1}{n}})^n=a.$

例9 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$ 的值。

解：将 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ 两边平方，得

$x+x^{-1}=7.$

$$\therefore \text{原式}=\frac{(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1})+2}{(x+x^{-1})^2-1}$$

$$=\frac{3(x+x^{-1}-1)+2}{7^2+1}=\frac{3(7-1)+2}{50}=\frac{2}{5}.$$

说明：在解题过程中，用到了$x\cdot x^{-1}=1$，一般地有$a^p\cdot a^{-p}=1$，这个结论常能帮助我们巧解题目。

例10 计算：

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{p+q}{p-q}}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right]$$

解：原式$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}$

$$\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{p+q}{p-q}}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right]$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{-p-q+2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{-p-q+2q}{p-q}}\right]$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2}\cdot\frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)}=2.$$

例11 求$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$

分析：这是无限多项求和的问题，可以观察出：减去第一项后，每项都乘以“3”，即得原式。

设$x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots$，则

$x=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}x$，解得$x=\dfrac{1}{2}$。

说明：这化“无限”为“有限”的方法，即将一些无限次运算的问题，通过列方程法来解决。上述方法有一般性：如果某一个无限次运算通过有限次的加、减、乘、除、乘方、开方运算后形式不变，都可用本方法解决。

如已知：$\sqrt[10]{2\cdot\sqrt[10]{2\cdot\sqrt[10]{2\cdot\sqrt[10]{2\cdot\sqrt[10]{\cdots}}}}}=a$，求证：$a^9=2$。

将两边都10次方，得到$2a=a^{10}$，$\because a\neq 0$，$\therefore a^9=2$。

下面举几个指数方程的例子，我们把指数里含有未知数的方程叫做指数方程。

例12 解下列方程：

（1）$7^{2x-1}=1$；　　（2）$\sqrt{3^{(x+1)(x-1)}}=\dfrac{1}{9}$；

（3）$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x}=\left(\dfrac{9}{16}\right)^{x}\cdot\left(\dfrac{16}{9}\right)^{2x^{-2}}$；

（4）$9^{2\sqrt{2x}}-4\times 3^{2\sqrt{2x}}+3=0$。

分析：利用“两个同底数幂相等，则它们的指数必相

等”这个性质来解决。

解：（1）由原方程可得$7^{2x-1}=7^0$，$\therefore 2x-1=0$

$$\therefore x=\frac{1}{2}.$$

（2）原方程可化为$3^{\frac{x^2-3x-4}{2}}=3^{-2}$.

$\therefore \frac{x^2-3x-4}{2}=-2$，即$x^2-3x=0$

解得$x_1=0$，$x_2=3$。

（3）由原方程，可得$\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x}$

$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right]^{2x-2}$

$\therefore\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-4x+4}$，$\therefore x=-2x+4$，得

$x=\frac{4}{3}$.

（4）原方程可化为

$$(9^{\sqrt{2x}})^2-4\times 9^{\sqrt{2x}}+3=0$$

$$\therefore 9^{\sqrt{2x}}=1,\quad 9^{\sqrt{2x}}=3$$

$$\therefore x_1=0,\quad x_2=\frac{1}{8},$$

例13　解方程组：

(1) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2^{x+y+\sqrt{x+y}} = 4^6 \\ x^3 + y^3 = 189 \end{cases}$

解：(1) 令 $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 & ① \\ 2^y \cdot 3^x = 18 & ② \end{cases}$

由①×②，得$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 12 \times 18 = 2^3 \times 3^3$

得 $6^{x+y} = 6^3$。 $\therefore x + y = 3$ ③

由①÷②，得$2^{x-y} \cdot 3^{y-x} = \frac{2}{3}$

得$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}$， $\therefore x - y = 1$ ④

由③、④解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

(2) 令 $\begin{cases} 2^{\quad+\sqrt{x+y}} = 4^6 & ① \\ x^3 + y^3 = 189 & ② \end{cases}$

由①，得$2^{x+y+\sqrt{x+y}} = 2^{12}$

$\therefore (x+y) + \sqrt{x+y} = 12$

即 $(x+y) + \sqrt{x+y} - 12 = 0$

解得$\sqrt{x+y} = 3$，$\sqrt{x+y} = -4$（舍去）

$\therefore x + y = 9$ ③

由②，得$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 189$

将③代入，有

$$9(x^2 - xy + y^2) = 189$$

$$\therefore x^2 - xy + y^2 = 21$$

即$(x+y)^2 - 3xy = 21$