高等学校教材

线性代数

Linear Algebra

主编 王友雨

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

线性代数

Xianxing Daishu

主编　王友雨

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书系统介绍了线性代数的基本理论和方法，层次清晰，论证严谨，联系实际，例题丰富。主要内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的对角化、二次型等。随各章内容配有一定数量的习题、书末附有部分习题参考答案。

本书可作为高等学校非数学类专业线性代数课程教材，也可作为科技工作者和自学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／王友雨主编. --北京：高等教育出版社，2013.8
ISBN 978-7-04-038069-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 160198 号

策划编辑 贾翠萍　责任编辑 贾翠萍　封面设计 张申申　版式设计 王 莹
责任校对 刁丽丽　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400－810－0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm×960 mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	12.5	版　　次	2013 年 8 月第 1 版
字　　数	230 千字	印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010－58581118	定　　价	18.80 元

物 料 号　38069-00

前　言

线性代数是普通高等学校理工类和经管类专业一门重要的基础课,在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着广泛的应用。本书是依据高等学校线性代数课程教学基本要求,结合教学实际编写而成的,可作为普通高等学校非数学类专业线性代数课程教材使用,也可供科技人员阅读和参考。本书的主要特点是:

一、在教材内容的选择上,参照最新制定的线性代数课程教学基本要求以及全国硕士研究生入学统一考试大纲,不追求内容的全面性,更注重内容的实用性。

二、注重教学内容的改革,将编者的实际教学经验与体会融入教材之中,使其在内容的取舍和结构的编排上更合理,更易于教与学。

三、加强基本能力培养。本书的例题、习题较多,在解题方法上有较深入的论述,主要是让学生在掌握基本概念的基础上,熟悉运算过程,精通解题技巧,最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的。

四、每章安排(A)(B)两套习题。(A)习题主要用于检测学生对基本概念、基本理论和基本方法的掌握程度;(B)习题中安排了有一定难度的计算和证明题作为提高题,主要是为一些要求提高解题能力和参加全国硕士研究生入学统一考试的学生设计,可供不同层次的学生选择。

五、本书语言通俗易懂,内容循序渐进;为便于学生解题,选择的例题也较多;重视应用而对难证明的定理只给出结论而不作详细证明,使学生将学习的主要方向放在会计算、应用等实际操作能力的训练上。

本书是编者根据在天津财经大学多年教学实践和改革探索的经验基础上编写而成的。参加本书编写的人员有:王友雨(第一章)、张艳琼(第二章)、安彤(第三章)、李自立(第四章)、平国庆(第五章)。全书由王友雨负责统筹定稿。

在编写本书时,我们参考、借鉴了多种优秀线性代数教材,这些教材在诸如内容编排、定理的论述等方面给了编者许多有益的启示,在此,向这些教材的作者表示感谢。

本书的编写得到了天津财经大学教务处以及理工学院领导的大力支持,同时也得到了数学系同仁的热情帮助,姜铭久老师对本书内容的取舍和编排上提

出了许多宝贵的意见和建议。在此,对给予我们支持和帮助的各位领导、同仁表示衷心的感谢!

由于水平所限,书中难免有不足甚至是错误之处,敬请读者不吝赐教。

编 者

2013 年 4 月

目 录

第一章 行列式

行列式是重要的数学工具和概念之一．它来源于解线性方程组．日本数学家关孝和(Seki Takakazu，约 1642—1708)是第一个研究行列式的数学家，并阐述了直到 5 阶行列式的计算方法．在 17 世纪末，德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)研究线性方程组的解法时，开始使用指标数的系统集合来表示方程组的系数，并得到现在被称为结式的一个行列式．大约在 1729 年，英国数学家麦克劳林(C. Maclaurin，1698—1746)开始用行列式的方法解含 2～4 个未知量的线性方程组，还使用了所谓的克拉默法则，瑞士数学家克拉默(G. Cramer，1704—1752)在 1750 年把这个法则发表了出来．法国数学家贝祖(E. Bezout，1730—1783)研究齐次方程组时，证明了系数行列式等于零是方程组有非零解的充要条件．这些关于行列式的早期工作大都是为了研究方程组而利用行列式，以求得紧凑简单的表达式．

对行列式理论作专门研究(不单纯作为工具)的第一个人是法国数学家范德蒙德(A. T. Vandermonde，1735—1796)．他建立了用二阶子式和它们的余子式展开行列式的法则，一般认为范德蒙德是行列式理论的奠基人．法国数学家拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827)推广了范德蒙德的结果，用 r 阶子式及其余子式来展开行列式．

行列式这个术语最早出现在 18 世纪初法国数学家柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)的著作之中，他还首先采用双重足标的记法把 n^2 个元排成方阵．柯西对行列式理论进行了系统研究，导出了行列式的一些运算性质，还把行列式应用于几何与物理问题，如求平行六面体的体积等．英国数学家凯莱(A. Cayley，1821—1895)在 1841 年用两条竖线画在一个方阵的左右两侧来表示行列式，他还建立了行列式的乘法法则．之后，英国数学家西尔维斯特(J. Sylvester，1814—1897)和凯莱共同发展了行列式理论．德国数学家雅可比(C. G. Jacobi，1804—1851)研究了函数行列式，建立了它的导数公式，并进一步指出了函数行列式在多重积分的变量替换和解偏微分方程中的作用．

在整个 19 世纪，不断得到行列式的新结果，除行列式的一般理论以外，还建立了大量的有关特殊形式行列式的一些定理．行列式理论被越来越多地应用于许多方面，除了解线性方程组和多重积分的变量替换外，还被应用于坐标变换，解行星运动的微分方程组，将二次型化成标准形等．

行列式概念的出现虽然没有深刻地影响数学的发展，但大量的事实已经证

明,行列式已成为现代数学中十分有用的工具.

行列式是线性代数中的一个重要内容,它不仅是研究矩阵理论和线性方程组求解理论的重要工具,而且在物理学、力学、工程技术、经济学等许多领域也有着极其广泛的应用. 正确理解行列式的基本概念,熟练掌握计算 n 阶行列式的基本方法,会对今后的课程内容学习带来很大方便. 本章将根据三阶行列式的展开规律来定义 n 阶行列式,介绍行列式的基本性质和按行(列)展开定理,从而给出行列式的计算方法,最后介绍行列式在解线性方程组中的应用——克拉默法则.

§1.1 二阶与三阶行列式

二阶和三阶行列式是从研究二元与三元线性方程组的解引出的,为此我们先讨论二元与三元线性方程组的公式解,并由此给出二阶和三阶行列式的定义.

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

易知,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

这就是二元线性方程组(1.1.1)的公式解. 为便于叙述和记忆,我们引入二阶行列式的概念.

定义 1.1.1 我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

为二阶行列式,其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元,横排的称为行,竖排的称为列,元的第一个下标 i 称为行标,表示该元位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表示该元位于第 j 列.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则二元线性方程组(1.1.1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.4}$$

例 1.1.1　解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta = a, \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta = b. \end{cases}$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix}=a\cos\theta+b\sin\theta,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix}=b\cos\theta-a\sin\theta,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=a\cos\theta+b\sin\theta,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=b\cos\theta-a\sin\theta.$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.1.5}$$

与二元线性方程组类似,当

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时,用加减消元法可求得它的解:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}},$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

这就是三元线性方程组(1.1.5)的公式解. 为便于记忆,我们对上面公式解的分母引进记号,就得到三阶行列式的概念.

定义 1.1.2 我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.6}$$

为三阶行列式.

根据三阶行列式的定义,若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当 $D \neq 0$ 时,三元线性方程组(1.1.5)的唯一解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.2 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解 由三阶行列式的定义,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6 = 0.$$

可解出 $x = 2$ 或 $x = 3$.

§1.2　全排列及其逆序数

利用二阶、三阶行列式可以表示二元、三元线性方程组的解,为求解 $n(n>3)$ 元线性方程组,需引入 n 阶行列式,而定义 n 阶行列式必须弄清楚二阶、三阶行列式的结构,为此我们讨论排列及其逆序数.

一、排列和逆序

定义 1.2.1　由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$,称为一个 n **级排列**,简称**排列**.

例如,1234 和 2431 都是 4 级排列,而 45321 是一个 5 级排列. 3 级排列共有 6 个:123,132,213,231,312,321. 显然,n 级排列共有 $n!$ 个,其中排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列或标准排列**.

定义 1.2.2　在一个排列中,如果某两个数的排列次序与自然排列不同,则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的所有逆序的总数称为该排列的**逆序数**,记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

下面给出一个计算排列的逆序数的方法.

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个,则 i_t 的逆序的个数为 t_i,而该排列中所有数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n.$$

例 1.2.1　求下列排列的逆序数:

(1) 45321;(2) 15324;(3) $n(n-1)\cdots 21$.

解　(1) 4 排在首位,故其逆序数为 0;比 5 大且排在 5 前面的数有 0 个,故其逆序数为 0;比 3 大且排在 3 前面的数有 2 个,故其逆序数为 2;比 2 大且排在 2 前面的数有 3 个,故其逆序数为 3;比 1 大且排在 1 前面的数有 4 个,故其逆序数为 4. 可见所求排列的逆序数为 $\tau(45321)=0+0+2+3+4=9$.

(2) 用同样方法可得 $\tau(15324)=0+0+1+2+1=4$.

(3) 排在 1 前面且比 1 大的数共有 $n-1$ 个,因此 1 的逆序数为 $n-1$;排在 2 前面且比 2 大的数共有 $n-2$ 个,因此 2 的逆序数为 $n-2$;依次下去,排在 $n-1$ 前面且比 $n-1$ 大的数共有 1 个,因此 $n-1$ 的逆序数为 1;而 n 的逆序数为 0,所以排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数为

$$\tau[n(n-1)\cdots 21] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

定义 1.2.3　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如,2431 是偶排列,45321 是奇排列,标准排列 $12\cdots n$ 的逆序数是 0,因此是偶排列.

二、对换及其性质

定义 1.2.4　在一个排列中,将某两个元交换位置,其余元位置不变,得到另一个排列,称这样的变换为一个**对换**. 将相邻两个元对换,称为**相邻对换**.

例如,在例 1.2.1 中,排列 45321 的逆序数是 9,为奇排列,对换 1,4 后,排列 15324 的逆序数是 4,为偶排列. 在一个排列中,经过一次对换后改变了排列的奇偶性. 由下面的定理可知,这是一个普遍规律.

定理 1.2.1　任一排列经过一次对换后改变其奇偶性.

证　(1) 先证相邻对换的情形. 设排列为 $i_1i_2\cdots i_lijj_1j_2\cdots j_m$,对换 i 与 j 后,排列变为 $i_1i_2\cdots i_ljij_1j_2\cdots j_m$. 显然,在对换过程中 $i_1,i_2,\cdots,i_l,j_1,j_2,\cdots,j_m$ 这些元的逆序数不变,而 i,j 逆序数的变化情况为:

当 $i<j$ 时,对换后 i 的逆序数增加 1,而 j 的逆序数不变,从而排列的逆序数增加 1;

当 $i>j$ 时,对换后 i 的逆序数不变,而 j 的逆序数减少 1,从而排列的逆序数减少 1.

所以,排列 $i_1i_2\cdots i_lijj_1j_2\cdots j_m$ 与排列 $i_1i_2\cdots i_ljij_1j_2\cdots j_m$ 的奇偶性不同.

(2) 再证一般对换的情形. 设排列为 $i_1i_2\cdots i_lip_1p_2\cdots p_kjj_1j_2\cdots j_m$,对它作 k 次相邻对换后,该排列变为 $i_1i_2\cdots i_lp_1p_2\cdots p_kijj_1j_2\cdots j_m$,再作 $k+1$ 次相邻对换,排列变为 $i_1i_2\cdots i_ljp_1p_2\cdots p_kij_1j_2\cdots j_m$. 即经过 $2k+1$ 次相邻对换,排列 $i_1i_2\cdots i_lip_1p_2\cdots p_kjj_1j_2\cdots j_m$ 变成排列 $i_1i_2\cdots i_ljp_1p_2\cdots p_kij_1j_2\cdots j_m$,所以这两个排列的奇偶性相反.

定理 1.2.2　n 级排列中奇偶排列各占一半,均为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

证　n 级排列共有 $n!$ 个. 设其中奇排列的个数为 p,偶排列的个数为 q,对所有奇排列都作同一对换,则由定理 1.2.1 知这 p 个奇排列均变为偶排列,故 $p\leqslant q$;同理,对每个偶排列都作同一对换,则这 q 个偶排列均变为奇排列,故 $q\leqslant p$,所以 $p=q=\frac{1}{2}n!$.

§1.3 n 阶行列式

一、二阶和三阶行列式的特征

为了给出 n 阶行列式的定义,我们再来考察二阶和三阶行列式的特征. 由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

易见二、三阶行列式具有如下特点:

(1) 项的个数: 二阶行列式共有 $2=2!$ 项,三阶行列式共有 $6=3!$ 项.

(2) 项的构成: 二阶行列式的每项是取自不同行不同列的 2 个元的乘积,三阶行列式的每项是取自不同行不同列的 3 个元的乘积.

(3) 项的符号: 二阶和三阶行列式每项的符号都是: 当该项元的行标取成自然排列时,若对应的列标组成的排列为偶排列则该项取正号,列标组成的排列为奇排列则该项取负号.

根据以上特点,可以把二、三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 和 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 分别表示对所有 2 级和 3 级排列求和. 推广到一般即可得到 n 阶行列式的定义.

二、n 阶行列式的定义

定义 1.3.1 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元乘积的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式常简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|_{n\times n}$,这里 a_{ij} 称为行列式的**元**,$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的**一般项**,行列式从左上角至右下角的连线称为**主对角线**.

例 1.3.1 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这个行列式主对角线上方的元都为零,我们称其为**下三角形行列式**(主对角线下方的元都为零的行列式,称为**上三角形行列式**).

解 考虑 D 的展开式中不为零的项. 由于第一行除 a_{11} 外其余元都为零,故行列式一般项中第一个元 a_{1j_1} 只能取 a_{11},而一般项中第二个元 a_{2j_2} 不能取 a_{21},故只能取 a_{22}. 同理,a_{3j_3} 只能取 a_{33},…… ,a_{nj_n} 只能取 a_{nn}. 从而 $D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

类似可得

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$
(2)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
$$

$$
(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.
$$

定理 1.3.1　n 阶行列式也可定义为

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.
$$

证明略.

另外，n 阶行列式 D 的一般项还可以记为

$$
(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.
$$

例 1.3.2　用行列式的定义计算 n 阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.
$$

解　由行列式的定义可知

$$
\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 21n)} a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn} \\ &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 21)} 1\cdot 2\cdots n \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} n!. \end{aligned}
$$