College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率统计简明教程附册

学习辅导与习题全解

第二版

同济大学数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率统计简明教程附册

学习辅导与习题全解

Gailü Tongji Jianming Jiaocheng Fuce

Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

第二版

同济大学数学系 编

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

第一版前言

本书是与同济大学应用数学系编《概率统计简明教程》相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供有关教师作教学参考。

概率统计是用随机数学模式描述和解释客观世界，作为一个数学分支来说，同其他的数学分支有很大的差异。它在思想内涵和逻辑思维方式上有自身的特点，初学者往往不易把握。这本学习辅导书的编写，希望能对读者掌握该门课程的特点，提高学习质量有所裨益。

本书按该教材的章节顺序编排，以方便读者使用。本书作为教材的辅导书，其各章内容除了应有的基本要求、内容提要、学习要点、题解外，还对学生在学习中遇到的共同性的重要问题，以释疑解难的形式予以分析、解答。此外，还有例题剖析与增补，选择教材中一些重要例题以及补充少量典型例子，对解题思路、使用原理和方法进行剖析，最后，为满足读者加强练习的需要，补充少量习题(附答案和提示)。

本书的第1—3章以及第12章由柴根象撰写，第4—6章由蒋凤瑛撰写，第7—11章由杨筱菡撰写，最后，由柴根象统稿、定稿。

本书的出版得到了高等教育出版社有关领导的大力支持，借此表示衷心的谢意。

由于我们对编写此类辅导书缺乏经验，且限于水平，书中难免有不当和疏漏之处，敬请同行和读者批评指正。

编　者

2004年3月

第二版前言

本书是与同济大学数学系编《概率统计简明教程》(第二版)相配套的学习辅导书,内容与体系均承继第一版的辅导书。由于第二版的教材增加了大量的例子和习题,特别是加了一部分带“*”的习题,因此本书重点放在这些例子和习题的解析,而其他内容则与第一版没有多大差别。

我们借此对高等教育出版社的几位编辑为本书出版付出的辛勤劳动表示衷心谢意。

由于我们对教辅书的编写缺乏经验,书中难免有疏漏和不当之处,敬请同行和读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　随机事件

一、基本要求

1. 了解随机试验的特点.
2. 会用文字或式子描述随机事件.
3. 知道事件之间的四种关系及三种运算.
4. 会用事件的关系和运算描述较为复杂的随机事件.

二、内容提要

1. 随机试验的概念

具有以下两个特点的试验称之为随机试验：

(1) 试验的所有可能结果是已知的或是可以确定的；

(2) 每次试验将要发生什么样的结果是事先无法预知的.

随机试验又依其可否在相同条件下重复进行分为：可重复试验及不可重复试验. 本书绝大部分涉及的都是可重复试验.

2. 样本空间和随机事件

试验所有可能结果的全体构成样本空间；称试验的每一个可能结果为样本点，样本空间为全体样本点的集合；随机事件是对随机试验中出现的某些现象或某种情况的陈述，它可以用试验的某些可能结果加以描述，因而是样本空间的子集. 往后也简称随机事件为事件.

3. 事件的关系

随机事件之间有如下四种关系：

(1) 包含关系：称 A 蕴含了 B，是指 A 发生必导致 B 发生，且记之为 $A\subset B$；

(2) 相等关系：称 A 与 B 相等，是指 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立；

(3) 互斥关系：称 A 与 B 互斥，是指 A，B 不能在一次试验中同时发生；

(4) 互补关系：称 A 与 B 互补，是指 A，B 在一次试验中必发生一个且只能发生一个.

4. 事件的运算

随机事件之间有如下三种运算：

(1) 并的运算:A 与 B 的并产生这样一个事件,即 A,B 至少发生一个,记之为 $A\cup B$;

(2) 交的运算:A 与 B 的交产生这样一个事件,即 A,B 同时发生,记之为 $A\cap B$,或 AB;

(3) 差的运算:A 与 B 的差产生这样一个事件,即 A 发生且 B 不发生,记之为 $A-B$,或 $A\backslash B$.

三、学习要点

本章的重点是事件的概念及事件的关系和运算. 由随机试验的特点决定了事件有随机性,这是开始学习本书时必须抓住的一个要点. 其次,通过例题及习题的训练要掌握运用事件的关系和运算描述较为复杂的事件,这是本章学习的基本要求.

四、释疑解难

问 1.1 样本空间有什么性质?

答 样本空间有以下两个性质:(1) 每次试验必有属于样本空间中的某个样本点发生;(2) 样本空间中的任意两个不同的样本点不会在同一次试验中出现.

问 1.2 如何判定在一次特定试验下事件 A 是否发生?

答 事件 A 在该次试验发生当且仅当包含在 A 中的样本点在该次试验下发生. 例如掷一枚骰子的随机试验,事件 A 为出现偶数点,则当且仅当掷骰子的结果出现 2 点,4 点或 6 点之一时,事件 A 在该次试验发生. 由此可见,一事件在一次试验中是否发生,只有当做了这次试验之后才能判定,在试验之前是无法预知的(必然事件与不可能事件是少数的两个例外).

问 1.3 并事件与交事件有何差别?

答 我们以两个事件为例,A 与 B 的并事件 $A\cup B$ 是由三部分样本点组成,即(Ⅰ)同时属于 A 及 B;(Ⅱ)只属于 A;(Ⅲ)只属于 B(见图 1.1). 而 A 与 B 的交事件 $A\cap B$ 则仅仅由上述第(Ⅰ)部分那些的样本点组成.

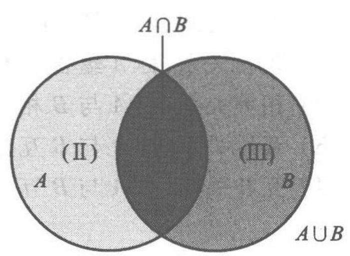
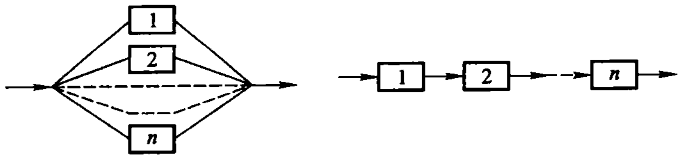


图 1.1

下面是一个实际例子:有线路甲、乙,甲是并联线路,乙是串联线路(见图1.2).



（甲）并联线路　　　　（乙）串联线路

图 1.2

记 A_i 为元件 i 导通，$i=1,\cdots,n$，而事件 A 为线路导通，今要求分别对甲乙两种线路用诸 A_i 或 $\overline{A}_i$ 表示事件 $\overline{A}$.

对线路甲，只要 1 号到 n 号元件中有一个导通线路就导通. 因而欲使线路甲不通，必须从 1 号元件到 n 号元件每一个都不通，也就是说 $\overline{A}_1,\cdots,\overline{A}_n$ 同时发生. 因而 $\overline{A}=\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_n$. 对线路乙，只有 1 号元件到 n 号元件均导通，线路乙才能导通. 因而只要 1 号到 n 号元件中有一个不通，则线路乙不通，所以，$\overline{A}=\overline{A}_1\cup\cdots\cup\overline{A}_n$.

问 1.4　以下两种陈述有何差别？

(1) $A_1,\cdots,A_n$ 有一个发生；

(2) $A_1,\cdots,A_n$ 恰有一个发生.

答　在陈述(1)，(2)中都包含了 $A_1,\cdots,A_n$ 只发生一个的情况. 但在陈述(2)排除了 $A_1,\cdots,A_n$ 中有 2 个或 2 个以上同时发生的情况，而对陈述(1)并未将这些情况排除在外. 事实上我们可表述如下：

$$\{A_1,\cdots,A_n\text{ 有一个发生}\}=A_1\cup\cdots\cup A_n,$$

$$\{A_1,\cdots,A_n\text{ 恰有一个发生}\}=A_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n\cup\overline{A}_1A_2\cdots\overline{A}_n\cup\cdots\cup\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-1}A_n.$$

五、例题分析及增补

例 7　有两门火炮同时向一架飞机射击，考察事件 $A=\{$击落飞机$\}$. 依常识，“击落飞机”等价于“击中驾驶员”或者“同时击中两个发动机”. 如记 $B_i=\{$击中第 i 个发动机$\}$，$i=1,2$，$C=\{$击中驾驶员$\}$.

(1) 用 B_i，C 表示事件 A；

(2) 求 $\overline{A}$.

析　(1) 依题中提示的“常识”，A 发生当且仅当或者“击中驾驶员”这一事件发生（即 C 发生），或者“同时击中两个发动机”这一事件发生.

而依事件运算的定义，后者即 B_1B_2. 因此 A 发生当且仅当 C 发生或者 B_1B_2

发生.再由事件运算的定义,应有 $A = C \cup B_1B_2$.

(2) 对(1)得出的结果,两次运用对偶律有

$$\overline{A} = \overline{C} \cap \overline{B_1B_2} = \overline{C} \cap (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2),$$

再使用运算规则的分配律,得到 $\overline{A} = \overline{C}\,\overline{B}_1 \cup \overline{C}\,\overline{B}_2$.

例 1.1 将一枚均匀硬币相继投掷三次,观察出现的面,记 $A_i = \{$恰有 i 个正面$\}$, $i = 1,2,3$, $A = \{$有一个正面$\}$, $B = \{$没有一个正面$\}$, $C = \{$至多一个正面$\}$, $D = \{$至少两个正面$\}$.

(1) 试写出该试验的样本空间;

(2) 试用 A_1, A_2, A_3 表示 A, B, C, D.

解 (1) 我们用三元有序对 (a_1, a_2, a_3) 表示一个试验结果,其中 a_i 表示第 i 次投掷出现的面,a_i 取“+”表示出现正面,取“-”表示出现反面,则一共有 $2^3 = 8$ 个可能试验结果,于是样本空间为

$$\Omega = \{(+++),(++-),(+--),(---),(-+-),(--+),(+-+),(-++)\}.$$

(2) $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\quad B = \overline{A} = \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$,

$C = B \cup A_1 = \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3 \cup A_1$, $\quad D = A_2 \cup A_3$.

例 1.2 对某小区的住户进行抽样调查,记事件 A 为被抽到的住户有私家车,B 为被抽到的住户是白领,C 为被抽到的住户是足球迷.

(1) 试述事件 $A \cap B \cap \overline{C}$ 的含义;

(2) 考虑何时成立 $A \cap B \cap C = C$;

(3) 考虑什么条件下关系式 $A \subset B$ 成立.

解 (1) $A \cap B \cap \overline{C}$ 表示抽到的住户是有私家车的白领,但非足球迷.

(2) 欲使 $A \cap B \cap C = C$,只需 $C \subset A \cap B$.因此只要该小区的住户凡是足球迷都是有私家车的白领,则成立 $A \cap B \cap C = C$.

(3) 当该小区的住户中,有私家车的都是白领时,包含关系 $A \subset B$ 成立.

例 1.3 设事件 $A = \{$在四件产品中至少有一件是次品$\}$, $B = \{$四件产品全为合格品$\}$, $C = \{$四件产品中次品数不少于两件$\}$.试写出下述事件运算的结果:

(1) $\overline{A}$;(2) $\overline{C}$;(3) $A \cup B$;(4) $A \cap B$.

解 (1) $\overline{A} = B$.(2) $\overline{C} = \{$四件产品中至多有一件次品$\}$.(3) $A \cup B = \Omega$.(4) $A \cap B = \varnothing$.

例 1.4 设 $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B$,求 X.

解 因 $\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = (\overline{X} \cap \overline{A}) \cup (\overline{X} \cap A) = \overline{X} \cap (\overline{A} \cup A) = \overline{X}$,所以 $X = \overline{B}$.

六、习题解答

1. 用集合的形式写出下列随机试验的样本空间与随机事件 A:

(1) 掷两枚均匀骰子,观察朝上面的点数,事件 A 表示"点数之和为 7";

(2) 记录某电话总机一分钟内接到的呼唤次数,事件 A 表示"一分钟内呼唤次数不超过 3 次";

(3) 从一批灯泡中随机抽取一只,测试它的寿命,事件 A 表示"寿命在 2000 到 2500 h 之间".

解 (1) $\Omega=\{$朝上的两个点数为$(x,y)\mid x=1,2,3,4,5,6;y=1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

(2) 记 X 为一分钟内接到的呼唤次数,则

$$\Omega=\{X=k\mid k=0,1,2,\cdots\},\ A=\{X=k\mid k=0,1,2,3\}.$$

(3) 记 X 为抽到的灯泡的寿命(单位:h),则

$$\Omega=\{X\in(0,+\infty)\},\quad A=\{X\in(2000,\ 2500)\}.$$

2. 投掷三枚大小相同的均匀硬币,观察它们出现的面.

(1) 试写出该试验的样本空间;

(2) 试写出下列事件所包含的样本点:$A=\{$至少出现一个正面$\}$,$B=\{$出现一正、二反$\}$,$C=\{$出现不多于一个正面$\}$;

(3) 如记 $A_i=\{$第 i 枚硬币出现正面$\}$,$i=1,2,3$,试用 A_1,A_2,A_3 表示事件 A,B,C.

解 (1) $\Omega=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(+,+,+),(-,-,-)\}$,其中$(+,-,-)$表示(正面,反面,反面),以此类推.

(2) $A=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+),(+,+,-),(+,-,+),(-,+,+),(+,+,+)\}$,

$B=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,+)\}$,

$C=\{(+,-,-),(-,+,-),(-,-,-),(-,-,+)\}$.

(3) $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,$B=A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$,

$C=A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}$.

3. 袋中有 10 个球,分别编有号码 1 ~ 10,从中任取 1 球,设 $A=\{$取得球的号码是偶数$\}$,$B=\{$取得球的号码是奇数$\}$,$C=\{$取得球的号码小于 5$\}$,问下列运算表示什么事件:

(1) $A\cup B$;(2) AB;(3) AC;(4) $\overline{AC}$;(5) $\overline{A}\,\overline{C}$;(6) $\overline{B\cup C}$;(7) $A-C$.

解　(1) $A \cup B = \Omega$ 是必然事件.

(2) $AB = \varnothing$ 是不可能事件.

(3) $AC = \{$取得球的号码是 2,4$\}$.

(4) $\overline{AC} = \{$取得球的号码是 1,3,5,6,7,8,9,10$\}$.

(5) $\overline{A}\,\overline{C} = \{$取得球的号码为奇数,且不小于5$\} = \{$取得球的号码为 5,7,9$\}$.

(6) $\overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C} = \{$取得球的号码是不小于5 的偶数$\} = \{$取得球的号码为 6,8,10$\}$.

(7) $A - C = A\overline{C} = \{$取得球的号码是不小于5 的偶数$\} = \{$取得球的号码为6,8,10$\}$.

4. 在区间 [0,2] 上任取一数, 记 $A = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x \leqslant 1\right\}$, $B = \left\{x \middle| \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$,求下列事件的表达式:

(1) $A \cup B$;(2) $\overline{A}B$;(3) $A\overline{B}$;(4) $A \cup \overline{B}$.

解　(1) $A \cup B = \left\{x \middle| \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$.

(2) $\overline{A}B = \left\{x \middle| 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 < x \leqslant 2\right\} \cap B$

$$= \left\{x \middle| \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \middle| 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\}.$$

(3) 因为 $A \subset B$,所以 $A\overline{B} = \varnothing$.

(4) $A \cup \overline{B} = A \cup \left\{x \middle| 0 \leqslant x < \frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{2} < x \leqslant 2\right\}$

$$= \left\{x \middle| 0 \leqslant x < \frac{1}{4} \text{或} \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \text{ 或} \frac{3}{2} < x \leqslant 2\right\}.$$

5. 用事件 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 出现,B,C 都不出现(记为 E_1);

(2) A,B 都出现,C 不出现(记为 E_2);

(3) 所有三个事件都出现(记为 E_3);

(4) 三个事件中至少有一个出现(记为 E_4);

(5) 三个事件都不出现(记为 E_5);

(6) 不多于一个事件出现(记为 E_6);

(7) 不多于两个事件出现(记为 E_7);

(8) 三个事件中至少有两个出现(记为 E_8).

解　(1) $E_1 = A\overline{B}\,\overline{C}$.　　　　(2) $E_2 = AB\overline{C}$.

(3) $E_3 = ABC$.　　(4) $E_4 = A \cup B \cup C$.

(5) $E_5 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.　　(6) $E_6 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

(7) $E_7 = \overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.　　(8) $E_8 = AB \cup AC \cup BC$.

6. 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品,设 A_i 表示事件"第 i 次抽到废品",试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

解　(1) $A_1 \cup A_2$.　　(2) $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.　　(3) $A_1A_2A_3$.

(4) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$.　　(5) $A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$.

7. 接连进行三次射击,设 $A_i = \{$第 i 次射击命中$\}$ $(i = 1,2,3)$,试用 A_1, A_2, A_3 表示下述事件:

(1) $A = \{$前两次至少有一次击中目标$\}$;

(2) $B = \{$三次射击恰好命中两次$\}$;

(3) $C = \{$三次射击至少命中两次$\}$;

(4) $D = \{$三次射击都未命中$\}$.

解　(1) $A = A_1 \cup A_2$.　(2) $B = A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$.

(3) $C = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$.　(4) $D = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

8. 盒中放有 a 个白球、b 个黑球,从中有放回地抽取 r 次(每次抽一个,记录其颜色,然后放回盒中,再进行下一次抽取),记 $A_i = \{$第 i 次抽到白球$\}$ $(i = 1,2,\cdots,r)$,试用 $\{A_i\}$ 表示下述事件:

(1) $A = \{$首个白球出现在第 k 次$\}$;

(2) $B = \{$抽到的 r 个球同色$\}$.

其中 $1 \leqslant k \leqslant r$.

解　(1) $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k$.

(2) $B = A_1A_2\cdots A_r \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_r}$.

***9.** 试说明什么情况下,下列事件的关系式成立:

(1) $ABC = A$;(2) $A \cup B \cup C = A$.

解　(1) 对任何事件 D 有 $AD \subset D$,故 $AD = A$ 当且仅当 $A \subset D$. 特别地令 $D = BC$,有 $ABC = A$ 当且仅当 $A \subset BC$.

(2) 对任何事件 D 有 $A \cup D \supset D$,故 $A \cup D = A$ 当且仅当 $A \supset D$. 特别地令

$D = B \cup C$,有 $A \cup B \cup C = A$ 当且仅当 $A \supset B \cup C$.

练　习　1

1.1　某品牌产品由甲、乙、丙三个厂家生产,然后由一家公司销售. 今从该公司销售的该种产品中随机抽取一件,事件 A 为抽到的产品为合格品,事件 A_1, A_2, A_3 分别表示抽到的产品为甲、乙、丙厂家生产的. 试解释下面事件等式的意义:$A = AA_1 \cup AA_2 \cup AA_3$.

1.2　一检验员检验某班组一天生产的 n 个产品的质量,事件 A_i 为第 i 个产品为合格品,$i = 1, 2, \cdots, n$. 试用 $A_1, \cdots, A_n$ 表示下列事件:

(1) 没有一个次品;

(2) 至少有一个次品;

(3) 至多有一个次品;

(4) 至少有两个合格品.

1.3　说明 $A \subset B$ 当且仅当 $AB = A$.

答案与提示

1.2　(1) $A_1 \cap \cdots \cap A_n$;(2) $\overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$;

(3) $(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cup \overline{A}_1 A_2 \cdots A_n \cup A_1 \overline{A}_2 \cdots A_n \cup \cdots \cup A_1 A_2 \cdots \overline{A}_n$;

(4) $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup \cdots \cup A_1A_n \cup A_2A_3 \cup \cdots \cup A_2A_n \cup \cdots \cup A_{n-1}A_n$.

第二章　事件的概率

一、基本要求

1. 了解概率的统计定义及直观意义.

2. 学会正确使用古典概型及几何概型确定概率的公式,计算简单事件的概率.

3. 知道概率的公理化定义及概率的性质,并能运用概率的性质计算事件的概率.

二、内容提要

1. 概率的概念

概率是随机事件出现的可能性大小,因而是随机事件不确定性的度量.

概率的统计定义揭示了随机现象的统计规律,即概率是频率的稳定值. 在实际应用中可用作概率的近似计算.

2. 古典概型及概率的确定

称有以下两个特点的随机试验为古典概型:

(1)(有限性)试验的可能结果只有有限个;

(2)(等可能性)各个可能结果出现是等可能的.

其事件的概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{有利于 }A\text{ 的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{k}{n}.$$

3. 几何概型及概率的确定

几何概型是古典概型的推广,即保留等可能性而去掉有限性的限制,即容许试验的可能结果有无穷多个.

其计算概率的公式为

$$P(A)=\frac{|S_A|}{|\Omega|},$$

其中 Ω 为所有可能试验结果所处的某空间区域,S_A 是 Ω 的一个子区域,为事件 A 的样本点在区域 Ω 中的相对位置.

4. 概率的公理化定义及性质

满足以下三个公理的一个集函数 $P(\cdot)$ 称之为概率：

公理 1（非负性） 对每一事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

公理 2（规范性） $P(\Omega)=1$.

公理 3（完全可加性） 对任意一列两两互斥事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

概率有如下性质：

（1）$P(\varnothing)=0$；

（2）对任意有限个互斥事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$；

（3）$P(\bar{A})=1-P(A)$；

（4）$P(B-A)=P(B)-P(AB)$，特别地，若 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A) \leqslant P(B)$；

（5）$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

三、学习要点

本章重点是：（一）能正确使用古典概型的计算公式；（二）了解并正确运用概率的性质. 注意这里要点是“正确”，例如要使用古典概型的求概率公式，必须判断两个前提条件，即有限性和等可能性. 下面看两个例子.

例 2.1 掷两枚均匀硬币，观察出现的面，求事件 $A=\{$一正一反$\}$ 发生的概率.

解法一 样本空间 $\Omega_1=\{$二正，二反，一正一反$\}$，包含了三个样本点，而 A 含有其中之一，因而 $P(A)=\dfrac{1}{3}$.

解法二 样本空间 $\Omega_2=\{$（正，正），（反，反），（正，反），（反，正）$\}$，包含了四个样本点，而 A 含有其中两个，因而 $P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

以上两种解法是由于对样本空间取不同的划分，因而得到不同的解. 所谓样本空间的划分，即将样本空间 Ω 分割成一些两两不交子集，每个子集可由若干个样本点组成，有些教材也称这些子集为基本事件. 在本例 Ω_1 可看成 Ω_2 的一个划分，其中基本事件 $\{$一正一反$\}$ 由两个样本点（正，反），（反，正）组成. 对样本空间进行划分有时会使求解变得容易. 但样本空间的划分必须满足“等可能性”这一条件，即各个基本事件的发生是等可能的. 由此可知解法一是错误的，解法二

是正确的. 事实上,在 Ω_1 中三个基本事件{二正},{二反},{一正一反}不是等可能的.

例 2.2 设 A,B 为两个事件,$P(A)=0.6,P(B)=0.4,P(AB)\doteq 0.2$,求 $P(A\backslash B)$.

解法一 $P(A\backslash B)=P(A)-P(B)=0.6-0.4=0.2.$

解法二 $P(A\backslash B)=P(A\backslash AB)=P(A)-P(AB)=0.6-0.2=0.4.$

以上解法都是使用概率的性质(4),但解法一是错的,解法二正确. 此因性质(4)的特例要求"$B\subset A$",但此例的 A,B 并不知道是否符合这一条件,而解法一直接使用了此性质的特例,因此是错的.

四、释疑解难

问 2.1 对于"有放回抽取"与"无放回抽取"这两种情况,在计算概率时有何差别?

答 有放回和无放回抽取这两种情形,使用的计数公式是不同的,因而概率计算是不同的. 如:从 1 到 n 个数字中有放回地连续抽取 m 个,一共有 n^m 个不同的可能结果;而如改成无放回抽取,则共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 个可能结果. 在应用中需判明究竟是有放回还是无放回,这一点是重要的.

下面看一个例子:将 m 个球随机地放入 n 个盒子中($n-1\geqslant m$),分两种情况求事件 $A=${指定的一盒没有球}的概率:(1) 每盒至多只能放一个球;(2) 盒子容纳的球数没有限制.

这是个球入盒的问题,等价于从编号 1 到 n 的盒子中随机抽取 m 次(每次一盒)的抽取问题. 在情形(1) 对应无放回抽取,而情形(2) 则是有放回抽取. 因而在情形(1) $P(A)=\dfrac{(n-1)\cdots(n-1-m+1)}{n(n-1)\cdots(n-m+1)}=\dfrac{n-1-m+1}{n}=\dfrac{n-m}{n}$,而在情形(2)$P(A)=\dfrac{(n-1)^m}{n^m}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^m$.

问 2.2 在古典概型的概率计算中,把握等可能性是难点之一. 现见一例:掷两枚骰子,求事件 $A=${点数之和等于5}的概率. 下面的解法是否正确? 如不正确,错在哪里? 解法:因试验可能结果只有两个,一是点数之和为 5,另一个是点数之和不等于 5,而事件 A 只含有其中的一种,因而 $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

答 此解法是错误的,这种解法是对样本空间进行了不正确的划分,分割出的两部分不是等可能的,因而不能据此进行计算.

正确的解法如下:掷两枚骰子的样本空间可形象地表为 $\Omega=\{(i,j):i,j=1,$