



李永乐·李正元考研数学②

2005年版

# 数学

【经济类】

## 复习全书

主编 北京大学 范培华  
清华大学 李永乐  
中国人民大学 袁荫棠  
策划 高联



国家行政学院出版社



李永乐·李正元考研数学② (2005 年版)

# 数学复习全书

【经济类】

主编 北 京 大 学 范培华  
清 华 大 学 李永乐  
中国人民大学 袁荫棠

编者 (按姓氏笔画)

|   |   |   |   |     |   |     |
|---|---|---|---|-----|---|-----|
| 北 | 京 | 大 | 学 | 李正元 |   |     |
| 清 | 华 | 大 | 学 | 李永乐 |   |     |
| 北 | 京 | 大 | 学 | 刘西垣 |   |     |
| 中 | 国 | 人 | 民 | 大   | 学 | 严 颖 |
| 北 | 京 | 大 | 学 | 范培华 |   |     |
| 中 | 国 | 人 | 民 | 大   | 学 | 袁荫棠 |
| 空 | 军 | 雷 | 达 | 大   | 学 | 徐宝庆 |
| 东 | 北 | 财 | 经 | 大   | 学 | 龚兆仁 |
| 天 | 津 | 财 | 经 | 大   | 学 | 鹿立江 |

策划 高联

国家行政学院出版社

· 北 京 ·

**图书在版编目(CIP)数据**

考研必备数学复习全书:经济类/范培华等主编.

-北京:国家行政学院出版社,2000

ISBN 7-80140-113-1

I. 考… II. 范… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 16808 号

**数学复习全书(2005 年版)**

**[经济类]**

范培华 李永乐 袁荫棠 主编

\*

国家行政学院出版社出版发行

北京市海淀区长春桥路 6 号

邮政编码:100089

发行部电话:68920615

北京市朝阳区印刷厂印刷 新华书店经销

\*

787×1092 1/16 开本 31.75 印张 800 千字

2004 年 2 月第 5 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-80140-113-1/O·8 定价:45.00 元

## 第五版前言

本书出版、修订四年多来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有“特色”，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外，文科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进行一次全面修订，以便及时反映当前研究生最新考试信息，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2005年《全书》（修订第五版）将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书2005年版是在2004年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

**微积分部分：**按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了大幅度调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，二重积分的计算与应用，数学建模，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。

**线性代数部分：**主要是针对一些重点概念和公式的运用，调换并增加了若干例题进行讲解，使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透，对一些常考题型，如：抽象行列式的计算，有关伴随矩阵的命题， $n$ 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结，并给典型例题进行讲解，消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑，以便考生在考试中应对自如，提高应试水平。

**概率统计部分：**与微积分部分一样也进行了大幅度调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

本书的高等数学部分由北京大学范培华、刘西垣修改完成，线性代数部分由清华大学李永乐修改完成，概率论与数理统计部分由中国人民大学袁荫棠修改完成。

编者

2004年2月

# 前 言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学,达到硕士学习阶段应具备的数学能力,提高考研数学应试水平,以合格的数学成绩任国家挑选,作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神,深入研究了近年来考研命题的特点及动态,并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验,编写了这本《考研数学复习全书》(经济类)及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时,作者特别注重与学生的实际相结合,注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成:

**一、内容概要与重难点提示**——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点,让考生弄清各知识点之间的相互联系,以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

**二、考核知识要点讲解**——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述,并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析,指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误,同时给出了相应的注意事项,以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

**三、常考题型及其解题方法与技巧**——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类,归纳总结了各种题型的解题方法,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能综合、灵活地解决问题。

**四、题型训练及参考答案**——本部分精选了适量的题型训练,并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识,复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,作者特优化设计与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中,以供考生选用。

特别需要强调的是,在'98北大百年校庆之际,我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园,畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作,并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历,对各类院校的考生有广泛的接触与了解,深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习,在大家的一致建议下,由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》(经济类)及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》,期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友,也是各类院校的学生自学教学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促,书中疏漏之处在所难免,诚请专家和读者指正。

编 者

2000年3月于北大燕园

## 第一篇 微积分

### 第一章 极限、连续 ..... (1)

内容概要与重难点提示 ..... (1)

考核知识要点讲解 ..... (1)

一、函数 ..... (1)

二、极限的概念与性质 ..... (4)

三、极限存在性的判别 ..... (6)

四、无穷小及其比较 ..... (8)

五、函数的连续性及其判断 ..... (11)

六、求极限的方法 ..... (15)

七、连续函数的性质 ..... (24)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (25)

题型训练及参考答案 ..... (47)

### 第二章 一元函数微分学 ..... (50)

内容概要与重难点提示 ..... (50)

考核知识要点讲解 ..... (51)

一、导数与微分 ..... (51)

二、基本初等函数导数表与导数

四则运算法则 ..... (54)

三、复合函数的微分法则 ..... (55)

四、由复合函数求导法则导出的

微分法则 ..... (56)

五、分段函数求导法 ..... (59)

六、高阶导数的求法 ..... (62)

七、微分中值定理 ..... (64)

八、利用导数研究函数的性态 ..... (65)

九、微分学的几何应用与经济

应用 ..... (71)

十、一元函数的最大值与最小值

问题 ..... (74)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (75)

题型训练及参考答案 ..... (108)

### 第三章 一元函数积分学 ..... (112)

内容概要与重难点提示 ..... (112)

考核知识要点讲解 ..... (112)

一、原函数与不定积分的概念

及基本性质 ..... (112)

二、不定积分的计算 ..... (114)

三、定积分的概念与基本性质、基

本定理 ..... (129)

四、定积分的计算 ..... (132)

五、广义积分 ..... (136)

六、定积分的几何应用 ..... (138)

七、定积分的简单经济应用 ..... (141)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (142)

题型训练及参考答案 ..... (176)

### 第四章 多元函数微积分学 ..... (179)

内容概要与重难点提示 ..... (179)

考核知识要点讲解 ..... (179)

一、极限与连续 ..... (179)

二、偏导数与全微分 ..... (181)

三、多元函数的极值 ..... (187)

四、多元函数的最大值与最小值

问题 ..... (188)

五、二重积分的概念与计算 ..... (191)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (194)

题型训练及参考答案 ..... (212)

## 第五章 无穷级数 (215)

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 内容概要与重难点提示      | (215) |
| 考核知识要点讲解        | (215) |
| 一、常数项级数的概念与基本性质 | (215) |
| 二、正项级数敛散性的判定    | (217) |
| 三、交错级数的敛散性判别法   | (218) |
| 四、绝对收敛与条件收敛     | (219) |
| 五、幂级数的收敛域       | (219) |
| 六、幂级数的运算与和函数的性质 | (220) |
| 七、函数的幂级数展开      | (221) |
| 常考题型及其解题方法与技巧   | (223) |
| 题型训练及参考答案       | (241) |

## 第六章 常微分方程与差分方程 (243)

|                |       |
|----------------|-------|
| 内容概要与重难点提示     | (243) |
| 考核知识要点讲解       | (243) |
| 一、基本概念         | (243) |
| 二、一阶微分方程       | (244) |
| 三、二阶常系数齐次线性方程  | (245) |
| 四、二阶常系数非齐次线性方程 | (246) |
| 五、差分的概念及其性质    | (247) |
| 六、一阶常系数线性差分方程  | (248) |
| 常考题型及其解题方法与技巧  | (248) |
| 题型训练及参考答案      | (261) |

## 第二篇 线性代数

## 第一章 行列式 (264)

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示        | (264) |
| 考核知识要点讲解          | (264) |
| 一、行列式的概念、展开公式及其性质 | (264) |
| 常考题型及其解题方法与技巧     | (269) |
| 题型训练及参考答案         | (279) |

## 第二章 矩阵及其运算 (282)

|                  |       |
|------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示       | (282) |
| 考核知识要点讲解         | (282) |
| 一、矩阵的概念及几类特殊方阵   | (282) |
| 二、矩阵的运算          | (284) |
| 三、矩阵可逆的充分必要条件    | (285) |
| 四、初等变换           | (285) |
| 五、初等矩阵           | (285) |
| 六、矩阵等价的概念及充分必要条件 | (286) |
| 七、矩阵方程           | (287) |
| 常考题型及其解题方法与技巧    | (287) |
| 题型训练及参考答案        | (302) |

## 第三章 $n$ 维向量与向量空间 (305)

|                  |       |
|------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示       | (305) |
| 考核知识要点讲解         | (305) |
| 一、 $n$ 维向量的概念与运算 | (305) |
| 二、线性组合与线性表出      | (306) |
| 三、线性相关与线性无关      | (307) |
| 四、线性相关性与线性表出的关系  | (308) |
| 五、向量组的秩与矩阵的秩的关系  | (308) |
| 六、矩阵秩的重要公式       | (309) |
| 七、Schmidt 正交化    | (310) |
| 常考题型及其解题方法与技巧    | (310) |
| 题型训练及参考答案        | (324) |

## 第四章 线性方程组 (328)

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 内容概要与重难点提示      | (328) |
| 考核知识要点讲解        | (328) |
| 一、线性方程组的各种表达形式  | (328) |
| 二、基础解系的概念及其求法   | (328) |
| 三、齐次方程组有非零解的判定  | (329) |
| 四、非齐次线性方程组有解的判定 | (329) |
| 五、非齐次线性方程组解的结构  | (329) |

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 六、克莱姆 (Cramer) 法则 ..... | (330) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 .....     | (330) |
| 题型训练及参考答案 .....         | (342) |

## 第五章 $n$ 阶矩阵的特征值与特征向量 .....

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....             | (345) |
| 考核知识要点讲解 .....               | (345) |
| 一、矩阵的特征值与特征向量的概念、性质及求法 ..... | (345) |
| 二、相似矩阵的概念与性质 .....           | (347) |
| 三、矩阵可相似对角化的充分必要条件及解题步骤 ..... | (347) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 .....          | (349) |
| 题型训练及参考答案 .....              | (367) |

## 第六章 二次型 .....

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....    | (369) |
| 考核知识要点讲解 .....      | (369) |
| 一、二次型的概念及其标准形 ..... | (369) |
| 二、合同矩阵及正定矩阵 .....   | (371) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 ..... | (372) |
| 题型训练及参考答案 .....     | (381) |

# 第三篇 概率论与数理统计

## 第一章 随机事件与概率 .....

|                      |       |
|----------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....     | (383) |
| 考核知识要点讲解 .....       | (383) |
| 一、随机事件的关系与运算 .....   | (383) |
| 二、随机事件的概率 .....      | (385) |
| 三、条件概率与全概率公式 .....   | (387) |
| 四、事件的独立性与伯努利公式 ..... | (388) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 .....  | (390) |
| 题型训练及参考答案 .....      | (399) |

## 第二章 随机变量的概率分布 .....

|                  |       |
|------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 ..... | (402) |
|------------------|-------|

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 考核知识要点讲解 .....          | (402) |
| 一、随机变量与分布函数 .....       | (402) |
| 二、离散型随机变量与连续型随机变量 ..... | (403) |
| 三、几个常见分布 .....          | (404) |
| 四、随机变量函数的分布的求法 .....    | (408) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 .....     | (408) |
| 题型训练及参考答案 .....         | (419) |

## 第三章 二维随机变量的概率分布 .....

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....             | (422) |
| 考核知识要点讲解 .....               | (422) |
| 一、二维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数 ..... | (422) |
| 二、二维离散型随机变量 .....            | (423) |
| 三、二维连续型随机变量 .....            | (424) |
| 四、两个常见的二维连续型随机变量的分布 .....    | (426) |
| 五、二维随机变量的独立性 .....           | (427) |
| 六、二维随机变量函数的分布的求法 .....       | (428) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 .....          | (429) |
| 题型训练及参考答案 .....              | (443) |

## 第四章 随机变量的数字特征 .....

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....    | (446) |
| 考核知识要点讲解 .....      | (446) |
| 一、一维随机变量的数字特征 ..... | (446) |
| 二、二维随机变量的数字特征 ..... | (448) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 ..... | (449) |
| 题型训练及参考答案 .....     | (464) |

## 第五章 大数定律和中心极限定理 .....

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 内容概要与重难点提示 .....    | (466) |
| 考核知识要点讲解 .....      | (466) |
| 一、大数定律 .....        | (466) |
| 二、中心极限定理 .....      | (467) |
| 常考题型及其解题方法与技巧 ..... | (468) |
| 题型训练及参考答案 .....     | (473) |

**第六章 数理统计的基本概念 ..... (475)**

内容概要与重难点提示 ..... (475)

考核知识要点讲解 ..... (475)

一、总体、样本、样本的数字特征  
..... (475)

二、统计量及抽样分布 ..... (476)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (479)

题型训练及参考答案 ..... (483)

**第七章 参数估计和假设检验 ..... (484)**

内容概要与重难点提示 ..... (484)

考核知识要点讲解 ..... (484)

一、统计估计 ..... (484)

二、假设检验 ..... (488)

常考题型及其解题方法与技巧 ..... (490)

题型训练及参考答案 ..... (499)

# 第一篇 微积分

## 第一章 函数、极限、连续

### 内容概要与重难点提示

**1. 微积分中研究的对象是函数** 函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系, 就看是否存在一种对应规则, 使得按照这个对应规则, 当其中一个变量或几个变量的取值确定后, 余下的另一个变量的取值也就被唯一确定, 前者是一元函数, 后者是多元函数.

函数这部分的重点是: 复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.

**2. 极限是微积分的理论基础** 微积分中的重要概念, 如连续、导数、定积分等实质上是各种类型的极限. 由此可见极限的重要性. 本章的重点内容是极限. 既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件, 又要能准确地求出各种极限. 求极限的方法很多, 综合起来主要有:

- ① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则;
- ② 利用洛必达法则;
- ③ 利用函数的连续性;
- ④ 利用变量替换与两个重要极限;
- ⑤ 数列极限转化为函数极限;
- ⑥ 利用夹逼定理;
- ⑦ 对递归数列先证明极限存在(常用到“单调有界数列有极限”的准则), 再利用递归关系求出极限;
- ⑧ 利用导数的定义求极限.

**3. 无穷小就是极限为零的变量** 极限问题可归结为无穷小问题. 要理解无穷小的概念, 掌握无穷小的比较方法, 会用几个重要的等价无穷小因子替换求极限.

**4. 我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数** 由于函数的连续性是通过极限定义的, 所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限. 因此这部分也是本章的重点. 要掌握判断函数连续性 & 求间断点的方法, 特别是分段函数在连接点处的连续性, 会判别函数间断点的类型.

**5. 有界闭区间上连续函数的基本性质** 连续函数是我们研究的基本对象, 函数的许多重要性质都与连续性有关. 因此, 我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质, 包括: 有界性定理, 最大值、最小值定理和介值(中间值)定理, 并掌握这些定理的简单应用.

### 核心知识要点讲解

#### 一、函数

##### (一) 函数概念

函数关系的实质是变量之间的一种确定的对应关系. 定义域与对应规则是决定因素, 有了它们, 函数的值域就自然被确定.

通常函数关系可写成表达式. 若对自变量的不同变化范围, 对应规则要用不同的式子来表示, 这就是所谓分段函数.

常量与变量,自变量与因变量是相对的.一个量在某个过程中是常量,在另一过程中可以是变量,一个量在某个过程中是自变量,在另一过程中可以是因变量.例如:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在极限过程  $\Delta x \rightarrow 0$  中,  $x$  是常量,求完了极限,  $x$  是变量.  $f'(x)$  成为  $x$  的函数,它是  $f(x)$  的导函数.  $y = f(u)$  与  $u = g(x)$  的复合函数中  $u$  是中间变量,它在函数  $f$  中是自变量,在函数  $g$  中是因变量.

## (二) 几类常见的函数

1. **有界函数** 若存在正数  $M$ ,使得  $\forall x \in X$  都有  $|f(x)| \leq M$ ,则称  $f(x)$  是  $X$  上的有界函数或  $f(x)$  在  $X$  上有界.它的几何意义是:函数图形界于直线  $y = M$  与  $y = -M$  之间.

2. **奇函数与偶函数** 设区间  $X$  关于原点对称(若  $x \in X$ ,则  $-x \in X$ ),若  $\forall x \in X$ ,有  $f(x) = f(-x)$  ( $f(x) = -f(-x)$ ),则称  $f(x)$  在  $X$  上是偶函数(奇函数).它的几何意义是:奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于  $y$  轴对称.

3. **单调函数** 设  $f(x)$  定义在区间  $X$  上,  $\forall x_1, x_2 \in X$ ,若  $x_1 < x_2$ ,有  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ),则称  $f(x)$  在区间  $X$  上单调增加(单调减少).它们统称为单调函数.  $\forall x_1, x_2 \in X$ ,若  $x_1 < x_2$ ,有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ),则称  $f(x)$  在区间  $X$  上单调不减(单调不减).在导数应用中将给出判断单调性的方法.

4. **周期函数** 设  $f(x)$  定义在  $X$  上,若存在常数  $T \neq 0$ ,满足:  $\forall x \in X$ ,有  $x \pm T \in X$  且  $f(x + T) = f(x)$ ,则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  为  $f(x)$  的周期.它的几何意义是:自变量每增加或减少一固定的距离  $T$  后,图形重复出现.

若  $f(x)$  以  $T$  为周期,则  $f(x)$  有无穷多个周期,  $nT$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 均为周期.若  $f(x)$  的无穷多个正周期中存在最小数,称它为  $f(x)$  的最小正周期,简称最小周期或周期.

【例 1.1】 设  $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$ , 则  $f(x)$  是( ).

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【解法一】 由  $e^{\sin x}$  有正下界:  $e^{\sin x} \geq e^{-1}$  及  $x$  和  $\tan x$  无界,并利用  $f(x)$  无界  $\Leftrightarrow$  在  $f(x)$  的定义域中存在数列  $\{x_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ ,即可证  $f(x)$  无界.

设  $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),于是  $f(x_n) = (2n\pi + \frac{\pi}{4})e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ),即  $f(x)$  无界.因此选(B).

【解法二】 (排除法) 由于  $f(-x) = (-x) \tan(-x) e^{\sin(-x)} = x \tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$ ,当  $\sin x \neq 0$  时,  $f(x)$  不是偶函数.由  $f(0) = f(\pi) = 0$ ,知  $f(x)$  不是单调函数.又  $f(x)$  也不是周期函数,因此选(B).

【例 1.2】 设数列的通项为  $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$  则当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  是( ).

(A) 无穷大量 (B) 无穷小量 (C) 有界变量 (D) 无界变量

【解】 因为当  $n$  取奇数且趋于无穷大时,  $x_n = \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} \rightarrow \infty$ ,当  $n$  取偶数且趋于无穷大时,  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .所以选(D).

【例 1.3】 判断  $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$  的奇偶性.

【解】  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \ln \frac{a^2}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \ln a^2 - \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \ln a^2 - f(x)$ ,

即  $f(x) + f(-x) = \ln a^2$ .

当  $|a| = 1$  时,  $f(-x) = -f(x)$ , 故  $f(x)$  为奇函数.

当  $|a| \neq 1$  时,  $f(x)$  非奇非偶.

### (三) 复合函数

设函数  $y = f(u)$ , 定义域为  $D_f$ , 又有函数  $u = g(x)$ , 定义域为  $D_g$ , 值域为  $R_g$ .

若  $R_g \cap D_f = \emptyset$ , 则不能构成复合函数  $y = f(g(x))$ ;

若  $R_g \subset D_f$ , 则可构成复合函数  $y = f(g(x))$ , 定义域为  $D_g$ ;

若  $R_g \cap D_f \neq \emptyset, R_g \not\subset D_f$ , 则可构成复合函数  $y = f(g(x))$ , 定义域为  $\{x \mid x \in D_g \text{ 且 } g(x) \in D_f\}$ .

【例 1.4】 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x, \quad \text{求 } f(g(x)) \text{ 与 } g(f(x)).$

【解】 基本方法是代入法. 求复合函数  $g(f(x))$  的第一步是用  $f(x)$  代替  $g(x)$  表达式中的自变量  $x$ , 得  $g(f(x)) = e^{f(x)}$ , 然后再根据  $f(x)$  的定义, 把  $e^{f(x)}$  写成分段函数的形式, 即

$$g(f(x)) = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

求  $f(g(x))$  时, 首先得到

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & |g(x)| < 1, \\ 0, & |g(x)| = 1, \\ -1, & |g(x)| > 1. \end{cases}$$

然后考察当  $x$  在什么范围内  $|g(x)| = e^x$  分别  $< 1, > 1$  或  $= 1$ :

$$|g(x)| = e^x \quad \begin{cases} < 1, & x < 0, \\ = 1, & x = 0, \\ > 1, & x > 0, \end{cases} \quad \text{因此} \quad f(g(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

【例 1.5】 设  $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ ,  $g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$  求  $f(g(x))$  与  $g(f(x))$ .

【解】 由于  $g(x) \geq 0$ , 所以  $f(g(x)) = \frac{1}{2}[g(x) + |g(x)|] = g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

又因为对  $\forall x$ , 恒有  $f(x) \geq 0$ , 从而  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  则  $g(f(x)) = f^2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

### (四) 反函数

设有  $y = f(x)$ , 定义域  $D_f = X$ , 值域  $R_f = Y$ , 若  $\forall y \in Y$ , 有唯一确定的  $x \in X$  使得  $f(x) = y$ , 由此对应关系在  $Y$  上确定一个函数, 称为  $y = f(x)$  的反函数, 记为  $x = f^{-1}(y)$ . 习惯上, 记  $y = f(x)$  的反函数为  $y = f^{-1}(x)$ .

$y = f(x) (x \in X)$  存在反函数  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ , 有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . 特别地, 若  $y = f(x)$  在  $X$  上单调, 则  $y = f(x)$  在  $X$  上存在反函数.

函数  $y = f(x)$  与反函数  $y = f^{-1}(x)$  有如下关系:

1° 若  $D_f = X, R_f = Y$ , 则  $D_{f^{-1}} = Y, R_{f^{-1}} = X$ ;

2°  $f(f^{-1}(y)) = y (\forall y \in Y), \quad f^{-1}(f(x)) = x (\forall x \in D_f)$ ;

3°  $y = f(x)$  与  $y = f^{-1}(x)$  的图形关于  $y = x$  对称, 而  $y = f(x)$  与  $x = f^{-1}(y)$  的图形重合.

【例 1.6】求  $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2 \end{cases}$  的反函数.

【解】当  $x < -1$  时,  $y = 1 - 2x^2 < -1$ , 则  $x = -\sqrt{\frac{1-y}{2}}$  (另一舍去);

当  $-1 \leq x \leq 2$  时,  $y = x^3 \in [-1, 8]$ .  $\forall y \in [-1, 8]$ , 由  $y = x^3$ , 知  $x = \sqrt[3]{y}$ ;

当  $x > 2$  时,  $y = 12x - 16 > 8$ .  $\forall y > 8$ ,  $y = 12x - 16$ , 知  $x = \frac{y+16}{12}$ .

因此, 反函数  $y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$

## (五) 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而得到的一切函数称为初等函数.

六类基本初等函数即指:

$y = c$  (常数);  $y = x^\alpha$ ;  $y = a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ );  $y = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ );

$y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ ;  $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$ .

注意, 当其中方幂  $\alpha$  为实数时, 幂函数  $y = x^\alpha$  的定义域为  $x > 0$ .

## (六) 常见的函数形式

初等函数, 分段函数, 隐函数 ( $x - y + e^{xy} = 0$ ), 由变限积分确定的函数 ( $y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$ ), 以及由极限确定的函数等为考研中常见的函数形式.

# 二、极限的概念与性质

## (一) 极限的定义

【定义 1.1】 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

若  $a_n$  存在极限 (有限数), 又称  $\{a_n\}$  收敛, 否则称  $\{a_n\}$  发散.

【定义 1.2】 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  正数  $X$ , 当  $|x| > X$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

类似可定义:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

【定义 1.3】 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$  正数  $\delta$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

类似可定义:  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

## (二) 极限的基本性质与两个重要极限

### 1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质) 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$ .

若  $a > b$ , 则  $\exists N$ , 当  $n > N$  时, 有  $x_n > y_n$ ; 若  $n > N$  时,  $x_n \geq y_n$ , 则  $a \geq b$ .

【定理 1.2】(极限的唯一性) 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = b$ , 则  $a = b$ .

【定理 1.3】(收敛数列的有界性) 设  $x_n$  收敛, 则  $x_n$  有界 (即  $\exists$  常数  $M > 0$ , 使  $|x_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$ ).

## 2. 函数极限的基本性质

【定理 1.4】(极限的不等式性质) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ .

若  $A > B$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) > g(x)$ ;

若  $f(x) \geq g(x) (0 < |x - x_0| < \delta)$ , 则  $A \geq B$ .

【推论】(极限的保号性) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . 若  $A > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $f(x) \geq 0$ . 若  $f(x) \geq 0 (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow A \geq 0$ .

【定理 1.5】(极限的唯一性) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$ , 则  $A = B$ .

【定理 1.6】(存在极限的函数局部有界性) 设存在极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  的空心邻域  $U_0(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$  内有界, 即  $\exists \delta > 0, M > 0$  使得  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $|f(x)| \leq M$ .

【注】其他的极限过程如  $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  等等也有类似的结论.

## 3. 两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \quad (\text{或} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e) \quad (1.1)$$

应会灵活运用下列由两个重要极限得出的已知极限:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} &= 1; & \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} &= 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a; & \lim_{\varphi(x) \rightarrow 0} \frac{[1 + \varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}}{e} &= 1. \end{aligned}$$

【例 1.7】求下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} + 2 \sin x}{x}; & (2) \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0); \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} \quad (\alpha \neq \beta). \end{aligned}$$

【解】 (1) 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sin x}{x} = 3 + 0 = 3$ ;

(2) 原式  $= \lim_{x \rightarrow a} a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} \xrightarrow{\text{令 } x - a = t} a^a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = a^a \ln a$ ;

(3) 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha x} - \beta \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta x}}{\frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha x} - \frac{\beta \sin \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$ .

评注 要注意重要极限成立的条件, 不要混淆, 应熟悉其几种等价表达式, 如:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0, \text{ 而不是 } 1.$$

## 三、极限存在性的判别

### (一) 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若  $\exists N$ , 当  $n > N$  时,  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理) 若数列  $x_n$  单调上升有上界, 即  $x_{n+1} \geq x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 并存在一个数  $M$  使得对一切的  $n$  有  $x_n \leq M$ , 则  $x_n$  收敛. 即存在一个数  $a$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \text{ 且有 } x_n \leq a \text{ } (n = 1, 2, \dots).$$

若数列  $x_n$  单调下降有下界, 即  $x_{n+1} \leq x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 并存在一个数  $m$  使得对一切的  $n$  有  $x_n \geq m$ , 则  $x_n$  收敛. 即存在一个数  $a$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 且有  $x_n \geq a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

此外, 还可通过数列与级数的关系讨论敛散性:  $x_n$  的敛散性与级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  的敛散性相同.

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  的部分和数列是  $\{x_{n+1} - x_1\}$ .

【例 1.8】(1) 设  $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ , 其中  $b > a > 0$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ;

(2) 设  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt[n \text{ 重根号}]{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

【解】(1)  $x_n$  满足不等式  $b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n}$ ,

此不等式两端的极限存在且相等, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} b = b, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} b = b$ .

由夹逼定理可知极限存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$ .

(2) 先证明  $x_n$  极限存在, 然后再求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

首先证明  $x_n$  单调增加:  $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$ , 若  $x_n > x_{n-1}$ , 则有

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2 + x_{n-1}} = x_n.$$

由归纳法可知  $x_n$  单调增加.

其次证明  $x_n$  是有界变量:  $x_1 = \sqrt{2} < 2$ , 若  $x_n < 2$ , 则有  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$ .

由单调有界准则, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在. 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , 由等式  $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$  两端取极限得

$$a = \sqrt{2 + a}, \text{ 即 } a^2 - a - 2 = 0 \text{ 且 } a > \sqrt{2}.$$

解方程可知  $a = 2$ . 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

【例 1.9】设  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ , 试证  $\{a_n\}$  收敛.

【证明】易见  $a_n < a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 只需证明  $a_n$  有上界.

因为  $a_n \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

故由单调有界数列必收敛定理得知  $\{a_n\}$  收敛.

【例 1.10】设连续函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上是正的, 单调减少, 且

$$\delta_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx.$$

证明: 数列  $\delta_1, \delta_2, \dots$  收敛.

【证明】由题设,  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  内是正的, 单调减少, 根据积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} - \delta_n &= \left[ \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right] - \left[ \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right] \\ &= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx = f(n+1) - f(\xi_n) < 0, \quad n \leq \xi_n < n+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_n &= [f(1) + f(2) + \dots + f(n)] - \left[ \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \right] \\ &= [f(1) - f(\xi_1)] + [f(2) - f(\xi_2)] + \dots + [f(n-1) - f(\xi_{n-1})] + f(n),\end{aligned}$$

由于  $f(k) - f(\xi_k) \geq 0$ ,  $f(n) > 0$ ,  $k < \xi_k < k+1, k = 1, 2, \dots, n-1$ .

故  $\delta_n \geq f(n) > 0$ . 这说明  $\{\delta_n\}$  单调减少且有下界, 从而收敛.

## (二) 函数 $y = f(x)$ 的极限的存在性问题

【定理 1.9】(夹逼定理) 设  $\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$  时,  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ , 又  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

【注】其他的极限过程也有类似的结论.

【定理 1.10】(单侧极限与双侧极限的关系)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ .

对于分段函数  $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$  考察  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  是否存在就要分别求

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \quad \text{与} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x).$$

【例 1.11】设  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x^3}, & x < 0, \\ (1 + ax)^{\frac{1}{x}} - \frac{\ln(1+x)}{e^{3x} - 1}, & x > 0. \end{cases}$  问当  $a$  为何值时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在.

【解】由左右极限相等, 定出常数  $a$ .

$$\begin{aligned}f(0+0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (1 + ax)^{\frac{1}{x}} - \frac{\ln(1+x)}{e^{3x} - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{e^{3x} - 1} = e^a - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3(1+x)e^{3x}} = e^a - \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ 型}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

由  $f(0+0) = f(0-0)$ , 得  $e^a - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , 从而  $a = -\ln 2$ . 即当  $a = -\ln 2$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{6}$ .

【例 1.12】讨论下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}} \quad (a > 1); \quad (4) w = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}.$$

【解】(1) 因  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -1$ . 故  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  不存在.

(2) 因  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = -1$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$  不存在.

(3) 因  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\frac{1}{2} a^{\frac{x}{2}} \ln a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{a^{\frac{x}{2}} (\ln a)^2} = 0$ ,

故  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}}$  不存在.

(4) 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 属  $\frac{0}{0}$  型. 先用等价无穷小因子替换 ( $\ln(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$  ( $x \rightarrow \infty$ )), 再用洛必达法则, 有

$$w = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\arccot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1.$$

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\arccot x} = 0$ . 所以极限不存在.

【例 1.13】 设  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  的极限是( ).

(A) 0 (B)  $+\infty$  (C)  $-\infty$  (D) 不存在, 但也不是  $\infty$

【分析】 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ , 故应分左右极限来讨论.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{令 } \frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0. \quad \text{因此应选(D).}$$

【例 1.14】 设  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2}}$ , 求:

(1)  $f(x)$  的定义域; (2)  $\frac{1}{2} |f[f(x)]|^2$ ; (3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

【解】 (1)  $f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{2x}, & x > 0, \end{cases}$  其定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 且  $f(x) \geq 0$ .

(2)  $f[f(x)] = \sqrt{f(x) + \sqrt{f^2(x)}} = \sqrt{f(x) + |f(x)|} = \sqrt{2f(x)}$ ,

故  $\frac{1}{2} |f[f(x)]|^2 = f(x)$ .

(3) 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2x}}{x} = +\infty$ . 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  不存在.

**评注** ① 证明函数  $f(x)$  极限不存在的主要方法是考察左右极限. 若  $f(x_0+0)$  或  $f(x_0-0)$  中至少有一个不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在; 若  $f(x_0+0)$  与  $f(x_0-0)$  都存在, 但  $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  也不存在.

② 当  $x \rightarrow \infty$  时, 对含有函数  $a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 或  $\arctan x$  或  $\operatorname{arccot} x$  的极限, 一定要分别对  $x \rightarrow +\infty$  与  $x \rightarrow -\infty$  的情况进行讨论, 若两者相等, 则  $x \rightarrow \infty$  时极限存在, 否则不存在.

## 四、无穷小及其比较

(一) 无穷小与无穷大的定义

【定义 1.4】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为无穷小(量).

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 则称  $x_n$  为无穷小, 记为  $x_n = o(1)$  ( $n \rightarrow \infty$ );

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则称  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  为无穷小, 记为  $f(x) = o(1)$  ( $x \rightarrow x_0$ ).