21世纪高等学校规划教材

医用高等数学

长沙医学院 中南大学 编著

21st Century University Planned Textbooks

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

应用高等数学

21st Century University Planned Textbooks

21世纪高等学校规划教材

医用高等数学

长沙医学院 中南大学 编著

21st Century University
Planned Textbooks

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学 / 长沙医学院，中南大学编著. -- 北京 : 人民邮电出版社，2012.9
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-115-29056-4

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①长… ②中… Ⅲ. ①医用数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第178083号

内 容 提 要

本书自 1983 年出版至今、历经多次修订，内容从微积分到线性代数，从微分方程到概率论，涵盖了当今大学基础数学的各主要门类，书中所有定理都进行了严格的数学证明，这是本书的重要特点.

本书内容包括集合论，函数、极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学，常微分方程，线性代数初步，概率论和数理统计. 共 12 章，每章后备有练习题（包括基本题和补充题），书后附有不定积分表和各种数理统计分布表. 本书有英文译本.

本书可供医药高等院校五年制、七年制本科及研究生各专业使用，也可作为普通高等院校的高等数学教材.

21 世纪高等学校规划教材

医用高等数学

◆ 编　　著　长沙医学院　中南大学
　责任编辑　邹文波
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　三河市潮河印业有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：22.5　　　　2012 年 9 月第 1 版
　字数：562 千字　　2012 年 9 月河北第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-29056-4

定价：48.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

本书编委会

主　编：张惠安　刘　蓉　刘　浪　易非易　赵　廉

主　审：陈怀义　刘泗章　孙玉文

副主编：邓松海　陈骥龙　朱惠延　刘明芝　王延红
黄凤娟　刘礼恩

编　者：张美媛　刘建华　马建中　车　文　刘　鑫
屈　昕　李飞宇　郑洁刚　杨立群　赵修忠
张佃中　曹伟丽

序

数学从来是人类智力训练和精神遗产的一个重要组成部分.在当今,数学又是从事现代医学教学、科研不可缺少的工具.

由湖南医科大学等六所医科院校联合编写的《医用高等数学》将数学理论、方法与医学应用有机地融为一体,真正做到了逻辑条理通达严谨,取材内容生动活泼,语言文字简洁流畅,堪称一本在医学领域内难以多得的数学著作.

人们经历了近200年的不断探索,终于把极限概念建立在坚实的数学基础上,最终体现为寥寥数语的“$\varepsilon-\delta$”语言.它是一把打开微积分门扉的钥匙,且贯串微积分始终.然而初学者往往不能一下子领悟它,于是就有所谓“形象化”的描述.该教材采用了平行的两种描述极限的方式:形象直观的定义与严格的数学定义,犹如设置两块跳板过河,既相互独立,又相互映照,相得益彰,形成了该教材特有的风格.

该教材内容充实.从微积分到线性代数,从微分方程到概率论,覆盖了当今大学基础数学的各主要门类,形成了有特色的医用高等数学.本书可作为本科生、进修生及研究生的教材,也可供生物科学和医学工作者参考.

当前,数学教育的改革势在必行.我国在近几年开展的“全国大学生数学模型竞赛”生机勃勃,已有愈来愈多的院校参加,学生不论专业,面对同一套试题.这就给教师提出一个值得深省的问题,如何提高学生解决实际问题的能力.教材中构造的大量医学数学模型无疑是对学生一种良好的启迪与训练.

任重而道远,愿在我国医学田园中辛勤耕耘的数学工作者,培育出更多更美的科技之花.

侯振挺

一九九六年四月

前　言

本书自 1983 年出版至今，历经多次修订. 1995 年我们与原湖南医科大学、中国医科大学、沈阳医学院、衡阳医学院、湖南中医学院、白求恩医科大学等院校的同仁多次讨论，达成了基本共识，构建了现今的内容框架. "模糊数学"、"计算机知识"等内容不再出现在"医用高等数学"教材之中.

由于引进了"集合论初步"一章内容，致使微积分的全部定理得到严格论证，这是本书的重要特点之一.

本书具有姐妹篇英文译本："Higher Mathematics for Medical Science"，这是该书的另一特色.

全书内容包括集合论，函数、极限与连续，导数与微分，不定积分，定积分，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学，常微分方程，线性代数初步，概率论和数理统计. 共 12 章，每章后备有练习题(包括基本题和补充题)，书后附有不定积分表和各种数理统计分布表.

此次修订得到了长沙医学院董事长何彬生教授、长沙医学院教务长周启良教授及人民邮电出版社的关怀和支持，此外张浩伟博士、倪小娟博士和易义珍教授提供了具体帮助，在此谨致谢忱.

华中科技大学陆传务教授、魏尧生教授的专著《微积分与场论初步》给本书很深的教益，在此感激致谢.

中国医科大学赵廉教授曾为本书尽心尽力，深表敬仰之情.

张惠安　刘蓉　刘浪

2012 年 7 月

目　　录

第一章　集合论初步

§1.1　集　合　论

集合论是由 Boole(1815～1864)和 Cantor(1845～1918)于 19 世纪的晚期发展起来的,它对于 20 世纪的数学产生了深刻的影响.它把许多看来不相关的概念统一起来了,并且有助于用一种巧妙的和系统的方式把许多概念引导到逻辑的基础上.

在数学中,“集”这个词是用来表示看做单独一个实体的一组对象,即一组具有一个共同性质 P 的对象.组中的个体对象叫做集的元素或成员,并称这些元素属于集或包含于集中,也称集含有它的元素或由它的元素组成.

我们主要将对数学对象的集感兴趣,如数集、曲线集、几何图形集等.

集通常用大写字母 $A,B,\cdots,Z$ 表示,元素记为字母 $a,b,\cdots,z$.我们用特殊的记号 $x\in S$ 表示“x 是 S 的一个元素”或“x 属于 S”.如果 x 不属于 S,则写成 $x\notin S$.例如,所有正数的集记为 $S=\{x\mid x>0\}$,式中 $x>0$ 是所谓的性质 P.

把一个集与另一个集联系起来的第一个基本概念是集的相等性.

定义 1　二集 A、B 称为相等(或一样),如果它们恰好由相同的元素组成,这时写 $A=B$.如果二集合之一含有一个不在另一集中的元素,则称二集不相等,写成 $A\neq B$.

例如,按这个定义,集 $A=\{2,4,6,8\}$ 和 $B=\{2,6,8,4\}$ 是相等的;集 $C=\{2,4,6,8\}$ 和 $D=\{2,2,4,4,6,8\}$ 也是相等的.

由一个给定集 S,我们可以构成新的集,叫做 S 的子集.

定义 2　一个集 B 称为一个集 C 的一个子集,并写作 $B\subseteq C$,只要 B 的每个元素都是 C 的一个元素,我们也称 B 含于 C 或 C 含有 B,关系 $\subseteq$ 称为集的包含关系.

命题 $B\subseteq C$ 不排除 $C\subseteq B$ 的可能性.事实上,我们可有 $B\subseteq C$ 和 $C\subseteq B$ 两者,但是,这只有当 B 和 C 含有相同的元素时才发生.换句话说,

$$B=C \text{ 当且仅当 } B\subseteq C \text{ 和 } C\subseteq B.$$

如果 $B\subseteq C$,但 $B\neq C$,则称 B 是 C 的一个真子集,并写成 $B\subset C$ 以指出这点.

在集合论的所有应用中,事先有一个给定集,而且我们仅仅论及这个给定集的子集.基础集 S 可因应用的不同而变化,它在每个具体的问题中将被看做泛集.

记号 $\{x\mid x\in S, x \text{ 满足 } P\}$ 将表示 S 中的一个集,其中的所有元素满足性质 P,当所涉及的泛集是明确的,我们就略去 S 的解释而写成 $\{x\mid x \text{ 满足 } P\}$,这读作“所有 x 构成的集,使得 x 满足 P”.例如,所有正实数的集能够标志作 $\{x\mid x>0\}$,这时的泛集都知道是所有实数构成的集.自然,字母 x 是哑符号,可以用其他方便的符号来代替.所以,可写成

$$\{x\mid x>0\}=\{y\mid y>0\}=\{t\mid t>0\}$$

等

一个集不含有任何东西,是可能的,这个集叫做空集,将记为符号 $\varnothing$.我们将把 $\varnothing$ 看做是每个集的一个子集.

为了避免逻辑上的困难,我们必须区别 x 与集 $\{x\}$,后者的仅有的元素是 x.特别,空集 $\varnothing$

与集$\{\varnothing\}$是不一样的. 事实上,空集$\varnothing$不含有元素,而集$\{\varnothing\}$含有一个元素$\varnothing$.

图表常帮助我们看清集与集之间的关系. 例如,我们可把一个集想像为一个平面域,而集的每个元素看做域中的一个点. 这样,S的子集可想象为S内部点的集合.

如图 1 - 1 所示,由两个给定的集A和集B,能构成一个新的集,叫做A和B的并集,这个新集记为符号$A\cup B$(读作:"A并B"),它被定义为这些元素构成的一个集,它们是在A中,在B中,或在A,B两者中. 也就是说,$A\cup B$是至少属于集A,B之一的元素构成的集.

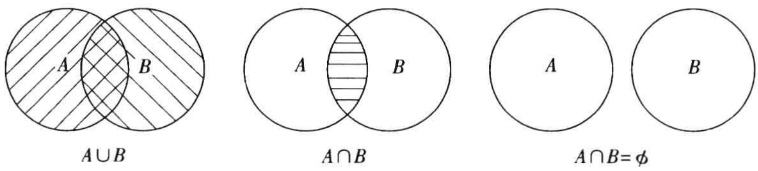


图 1 - 1

同样,A和B的交记为$A\cap B$(读作:"A交B"),它被定义为A和B中那些公共元素构成的集. 如果两集A和B没有公共的元素,则其交是空集$\varnothing$. 如果$A\cap B=\varnothing$,称两集A和B不相交.

如果A和B为两集,差$A-B$(也叫做B关于A的补集)定义为不在B中的所有A中的元素构成的一个集. 所以,由定义,有

$$A-B=\{x \mid x\in A,\text{且 } x\notin B\}.$$

不难证明对于集的并和交,下列法则成立.

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律:$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C, A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(3)分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

其他:$A\cap A=A, A\cup A=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$,

$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A, A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

例 1.1 用定义证明:$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

证明 对于任一个$x\in A-(B\cap C)$,我们有三种可能情况:即$x\in(A-B)\cap(A-C)$;$x\in A-B, x\notin A-C$;或$x\in A-C, x\notin A-B$. 因此,我们总有$x\in(A-B)\cup(A-C)$.

反之,如果任意$x\in(A-B)\cup(A-C)$,则有上面三种可能情况. 所以,得到$x\in A-(B\cap C)$. 因而

$$x\in A-(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A-B)\cup(A-C),$$

即

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

§1.2 数集的上确界和下确界

在微积分中,数集是大量出现的. 因此我们讨论实数集的一些基本性质如下:

设S是一非空实数集,并且有一个数b,使得对于S的每个元素x,有$x\leqslant b$,就称S上囿于b. 数b叫做S的一个上界. 为方便起见,我们把"对于S中每个x,有$x\leqslant b$"记为"$x\leqslant b, \forall x\in S$". 如果一个上界$b$也是$S$的元素,则$b$叫做$S$的最大元或极大元,这样的$b$最多有一个. 如果它存在,则写成$b=\max S$. 没有上界的集叫上无界.

用一个例子来说明这些说法的意义.

例 1.2 区间(a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$和$(a,b]$都是有上界的，且$[a,b]$，$(a,b]$两者有公共的极大元 b，即 $\max[a,b]=\max(a,b]=b$. (a,b)，$[a,b)$两者没有极大元. 区间(a,∞)和$(-\infty,\infty)$都是无上界的.

一些集是上有界的，但没有极大元. 对于这些集，有一个取代极大元的概念，这叫做集的最小上界，它被定义如下.

定义 3 一个数 b 叫做一个非空集的最小上界，如果 b 有下列两个性质：

(1) b 是 S 的一个上界；

(2) 没有小于 b 的数是 S 的上界.

如果 S 有极大元，这个极大元也是 S 的最小上界. 但是，如果 S 没有极大元，则它仍然有最小上界. 例如，集 $S=\{x|0\leqslant x<1\}$ 上有界，但它没有极大元. 它仍然有最小上界 1.

不难证明一个集的最小上界是唯一的.

习惯上，用上确界 supremum(简写为 sup)这个更加确切的词来称最小上界. 我们将采用这个约定并写作 $b=\sup S$ 以表示 b 是 S 的最小上界或上确界这个事实.

现在我们准备叙述实数系的最小上界公理(完备性公理).

公理 上有界的每个非空的实数集有一上确界. 即有一实数 b，使得 $b=\sup S$.

这个公理是微积分理论的一个逻辑基础.

我们再一次强调 $\sup S$ 未必是 S 的一个元素. 事实上，$\sup S$ 属于 S 当且仅当 S 有极大元 $\max S$，这时 $\max S=\sup S$.

下界、下有界、最小元(或极小元)等说法的定义可同样地表述，读者应自己来表述这些说法. 如果 S 有极小元，则记为 $\min S$.

定义 4 一个数 l 叫做 S 的最大下界(或下确界)，如果(1) l 是 S 的一个下界；(2)没有大于 l 的数是 S 的下界.

集 S 的下确界，当它存在时，是唯一确定的，记为 $\inf S$. 如果 S 有极小元，则 $\min S=\inf S$.

用上述公理，能证下列命题：

每个下有界的非空集 S 有一最大下界，即有一个实数 l，使得 $l=\inf S$.

命 $-S$ 表示 S 的所有元的负号的元素构成的集，则 $-S$ 是非空和上有界的. 公理告诉我们，有一个数 b，它是 $\sup(-S)$，即 $b=\sup(-S)$，容易验证 $-b=\inf S$，因为 $\inf S=-\sup(-S)$.

例 1.3 假定 $S=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \mid n \text{ 是一整数}\right\}$，求 $\inf S$ 和 $\sup S$.

解 当 $n=1$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1=2$；

当 $n=2$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=1+1+\dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$；

当 $n=3$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=1+1+\dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3!}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{3}\right)$；

………………

一般地，对任意 n，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

因此，$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 逐项比较$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$和$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，得$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

另外，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

我们终于证明了 $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调递增，且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$. 所以得出结论 $\min S=\inf S=2$，$\sup S$ 存在（但不属于 S），且 $\sup S\leqslant 3$. 在后面的章节中，我们将会知道 $\sup S$ 是个无理数，近似等于 2.718，故 $\max S$ 不存在. $\sup S$ 是微积分中的一个重要数，叫欧拉数 e.

关于上确界和下确界有一些基本性质，我们取作下面的定理.

定理 1 命 h 是任一正数，又命 S 是实数集. i) 如果 S 有 $\sup S$，则 S 中存在某个 x，使得 $x>\sup S-h$. ii) 如果 S 有 $\inf S$，则 S 中存在某个 x，使得 $x<\inf S+h$.

证明 如果有 $x\leqslant\sup S-h$，$\forall x\in S$，则 $\sup S-h$ 是 S 的一个上界，但 $\sup S-h<\sup S$，这由 $\sup S$ 的定义是不可能的. 所以对于 S 中的某个 x，必有 $x>\sup S-h$. 这便证明了 i). ii) 的证明类似于 i) 的证明.

定理 2 可加性. 已知 R 的两非空子集 A 和 B，命 C 是集 $C=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$，式中 R 是所有实数构成的集. i) 如果 $\sup A$ 和 $\sup B$ 存在，则 $\sup C$ 存在，且 $\sup C=\sup A+\sup B$. ii) 如果 $\inf A$ 和 $\inf B$ 存在，则 $\inf C$ 存在，且 $\inf C=\inf A+\inf B$.

证明 假定 $\sup A$ 和 $\sup B$ 存在. 如果 $c\in C$，则 $c=a+b$，式中 $a\in A$，$b\in B$. 所以. $c\leqslant\sup A+\sup B$. 因此 $\sup A+\sup B$ 是 C 的一个上界. 这表明 C 有上确界，且 $\sup C\leqslant\sup A+\sup B$. 现在命 n 为任一正整数. 由定理 1，有某个 $a\in A$ 和某个 $b\in B$，使得 $a>\sup A-\frac{1}{n}$，$b>\sup B-\frac{1}{n}$，把这两个不等式加起来，得

$$a+b>\sup A+\sup B-\frac{2}{n} \text{ 或 } \sup A+\sup B<a+b+\frac{2}{n}\leqslant\sup C+\frac{2}{n}.$$

既然 $a+b=c\leqslant\sup C$，所以我们已经证明了

$$\sup C\leqslant\sup A+\sup B<\sup C+\frac{2}{n},\ \forall n\geqslant 1.$$

因为 n 是任意的，故得 $\sup C=\sup A+\sup B$，这便证明了 i). ii) 的证明类似于 i) 的证明.

定理 3 给定 R 的两非空子集 S 和 T，使得对于 $\forall s\in S$ 和 $\forall t\in T$，有 $s\leqslant t$，则 $\sup S$ 和 $\inf T$ 存在，且满足不等式 $\sup S\leqslant\inf T$.

证明 因为 $s\leqslant t$，$\forall s\in S$，$\forall t\in T$，故任一 t 是 S 的一个上界，所以 $\sup S$ 存在，并且满足 $\sup S\leqslant t$，$\forall t\in T$，因而 $\sup S$ 是 T 的一个下界，故 $\inf T$ 存在，且不小于 $\sup S$，换句话说，有 $\sup S\leqslant\inf T$，即为所证.

习 题 一

1. 用列举法标出下列实数集

$A=\{x\mid x^2-1=0\}$；　　$B=\{x\mid(x-1)^2=0\}$；　　$C=\{x\mid x+8=9\}$；

$D=\{x\mid x^3-2x^2+x=2\}$；　　$E=\{x\mid(x+8)^2=9^2\}$；　　$F=\{x\mid(x^2+16x)^2=17^2\}$.

2. 对于题 1 的集，注意到 $B\subseteq A$，列出存在于 A,B,C,D,E,F 间的所有包含关系.

3. 命 $A=\{1\}$，$B=\{1,2\}$，讨论下列命题的有效性（证明一些命题是真的，并解释其他一些为什么是不真的）.

(1) $A\subset B$，　(2) $A\subseteq B$，　(3) $A\in B$，

(4) $1\in A$，　(5) $1\subseteq A$，　(6) $1\subset B$.

4. 解题 3，如果 $A=\{1\}$ 和 $B=\{\{1\},\{1\}\}$.

5. 已知集 $S=\{1,2,3,4\}$，展示出 S 的所有子集，共有 16 个，包括 $\varnothing$ 和 S.

6. 已知下列 4 个集：$A=\{1,2\}$，$B=\{\{1\},\{2\}\}$，$C=\{\{1\},\{1,2\}\}$，$D=\{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$，

讨论下列命题的有效性（证明一些命题是真的，并解释其他命题为什么是假的）.

(1) $A=B$，　(2) $A\subseteq B$，　(3) $A\subset C$，　(4) $A\in C$，

(5) $A\subset D$，　(6) $B\subset C$，　(7) $B\subset D$，　(8) $B\in D$.

7. 证明集相等性的下列性质

(1) $\{a,a\}=\{a\}$；　(2) $\{a,b\}=\{b,a\}$；　(3) $\{a\}=\{b,c\}$，当且仅当 $a=b=c$.

证明题 8 ~ 题 19 中的集关系.

8. 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

9. 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

10. 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

11. $A\cup A=A$，$A\cap A=A$.

12. $A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq A$.

13. $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

14. $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$.

15. 如果 $A\subseteq C$ 和 $B\subseteq C$，则 $A\cup B\subseteq C$.

16. 如果 $C\subseteq A$ 和 $C\subseteq B$，则 $C\subseteq A\cap B$.

17. (1) 如果 $A\subset B$ 和 $B\subset C$，证明 $A\subset C$.　(2) 如果 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq C$，证明 $A\subseteq C$.

(3) 如果 $A\subset B$ 和 $B\subseteq C$，你能得出什么结论？　(4) 如果 $x\in A$ 和 $A\subseteq B$，$x\in B$ 必定是真的吗？

(5) 如果 $x\in A$ 和 $A\in B$，$x\in B$ 必定是真的吗？

18. $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

19. 命 $\mathscr{F}$ 是一个集类 $\mathscr{F}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，则 $B-\bigcup_{A_i\in\mathscr{F}}A_i=\bigcap_{A_i\in\mathscr{F}}(B-A_i)$ 和 $B-\bigcap_{A_i\in\mathscr{F}}A_i=\bigcup_{A_i\in\mathscr{F}}(B-A_i)$.

20. 证明下两式中的一个总是对的，而另一个有时是错的.

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$，　(2) $A-(B\cup C)=(A-B)-C$.

21. 证明 $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$，$\inf\{x_n\cdot y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}\inf\{y_n\}$，如果所有的上确界和下确界均存在，式中 $x_n,y_n\geqslant 0$.

第二章　函数、极限与连续

函数是高等数学的研究对象之一，而有关函数概念及其特性等读者已在中学学过一些，因此本章是在总结的基础上对某些方面再做适当深化拓广. 同时介绍曲线的直线化，这是将非线性问题变成线性问题的一个重要方法.

极限是高等数学的一个重要工具，高等数学中几乎所有的重要概念都离不开它，并且有了它才能使有些初等数学不能解决的问题得到解决.

函数的连续性是可微的必要条件，它又是保证可以积分的充分条件，因此连续函数是高等数学研究对象的主要函数，在本章将介绍函数连续、间断概念，并提出连续函数在闭区间上的一些性质，为后继章节做好准备.

§2.1* 函　　数

一、变量、常量、区间

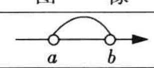
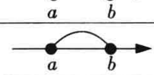
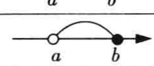
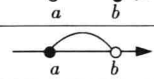
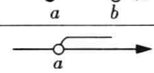
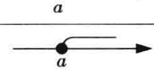
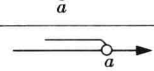
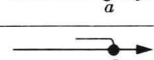
宇宙中的一切事物都是处在不间断的运动变化之中. 把在某个运动过程中变化着的量称为变量(variable)，而保持不变状态的量称为常量(constant). 如对每个具体人来说，在年龄的增长过程中，身高、体重都是变量，但器官个数是常量；再如在圆的半径增加过程中，圆的周长、面积都是变量，而其周长与直径之比却是常量(即圆周率).

常量(也称常数)可以看成是一个特殊的变量，即在某个运动过程中，量皆取相同的值.

我们常用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 与 $a,b,c,d,\cdots$ 分别表示变量与常量.

除特别声明者外，本书所说的数都是实数. 将全体实数组成的集合称为实数集，表记为 R. 则变量的变化范围是 R 的子集，其中许多可用所谓区间(interval)来表示，现将各种区间的定义、名称、符号及图像列如表 2－1(a 与 b 是两个实数，$a<b$)所列.

表 2－1　　**各种区间及其表示**

定义	名　称	符　号	图　像
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	左开右闭区间	$(a,b]$	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	左闭右开区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\}$	无穷区间	$(a,+\infty)$	
$\{x\mid a\leqslant x\}$	无穷区间	$[a,+\infty)$	
$\{x\mid x<a\}$	无穷区间	$(-\infty,a)$	
$\{x\mid x\leqslant a\}$	无穷区间	$(-\infty,a]$	

除表 2-1 所列出的各区间外，还有几个特殊区间要求熟悉：区间 $(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R$，开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$（其中 δ 是某个正数）称为点 a 的 δ 邻域（neighbour hood）. 记作 $U(a,\delta)$ 或 $N(a,\delta)$. 而称 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $U_0(a,\delta)$.

二、函数概念

在某个变化过程中，常常有两个或几个变量同时变化，而且它们的变化是互相联系着的，这就需引出函数概念.

定义 1 如果对于非空数集 D 中的任意 x，按照某一确定的对应关系 f 都有 R 中唯一一个实数 y 与之对应，则称对应关系 f 是定义在数集 D 上的函数（function）. 记为

$$f:D\to R$$

x 称为自变量（independent variable），y 称为因变量（dependent variable）或 x 的函数值，D 称为定义域（domain of definition），函数值的集合称为值域（range），可记为 $f(D)$.

习惯上，我们把变量 x、y 之间的函数关系记作

$$y=f(x),$$

在不引起混淆时也称 y 是 x 的函数.

在学习函数定义时，应注意它有两个要素，即定义域和对应规则. 只有这两者确定后，函数才算完全确定. 例如

$$f(x)=\lg x^2 \quad 和\ g(x)=2\lg x$$

不能认为是同一函数，因为它们的定义域不同.

定义域就是使得函数有意义的自变量的全体. 因此在实际问题中定义域是由问题的实际意义确定的，但当我们只是在数学上一般地研究由某一具体解析式所规定的函数时，则定义域由解析式本身确定.

例 2.1 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)$ 的定义域.

解 此函数是函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 与函数 $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的和，故它的定义域是这两个函数定义域的交集. 要使得函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ 有意义，必须使 $2-x^2>0$，即 $|x|<\sqrt{2}$，因此其定义域为 $(\sqrt{-2},\sqrt{2})$. 对于函数 $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$，必须使 $\left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1$，即 $0\leqslant x\leqslant 4$，因此其定义域为 $[0,4]$. 故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域为 $(\sqrt{-2},\sqrt{2})\cap[0,4]=[0,\sqrt{2})$.

例 2.2 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$，$u=\varphi(x)=x+1$，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 易知 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$，即 $[-2,2]$，$\varphi(x)=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 为了使 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$ 有意义，必须将 x 取在 $[-3,1]$ 才能使 $u=\varphi(x)=x+1$ 的值域在 $[-2,2]$ 内，故 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$.

对应规则 f 具有广泛的意义，不仅它的表达形式有很多，而且它的性质给今后讨论或运算带来不少说法，学习时要多加注意，下面我们还要详细讨论.