泛代数

胡庆平　李丹　著

华中理工大学出版社

泛 代 数

胡庆平 李 丹 著

华中理工大学出版社

泛代数

胡庆平　李丹著

责任编辑　龙纯曼

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

开本:850×1168　1/32　印张:14.125　字数:355 000

1993年2月第1版　1993年2月第1次印刷

印数:1—1 500

ISBN　7-5609-0747-4/O·100

定价:3.86元

（鄂）新登字第10号

内 容 简 介

泛代数是现代代数研究的重要分支之一，是一门前沿学科。

本书是作者自 1980 年以来长期研究和多次给本科生、研究生讲授泛代数的产物。全书共四章，分别介绍泛代数的基本概念、新代数的生成、代数结构和各类代数等，比较系统、全面和仔细地向读者介绍了泛代数的基础理论。作者在本书中比较详细地介绍了中、外许多数学工作者在泛代数方面的研究工作，尤其介绍了作者自 1980 年至 1990 年 12 月的许多研究成果。

本书是国内出版的第一部关于泛代数的书。本书适用于大、专院校本科高年级学生、研究生、教师和数学工作者。

序　言

作为国内第一部关于泛代数的书现在出版了，当然这是使我们既高兴、又紧张的。

泛代数是现代代数研究的重要分支之一，是一门前沿学科。在现代代数研究中，群、环、域、格、模、BCI-代数和 BCH-代数等都是比较活跃的分支，泛代数是这些分支代数进一步抽象而发展起来的更抽象的代数理论。泛代数理论一般地研究代数(一个集合，带有一个有限元运算的集合)，研究代数的性质、生成、结构和各类代数等基本问题。

现在，国际上泛代数研究已十分热烈，研究人员多，活动多，成果多(论文多、著作多)。但是，国内在泛代数研究方面起步较晚。1964 年，王世强先生在《数学进展》上发表的《关于代数系统的自同构群的一个注记》，是国内发表的第一篇泛代数论文。自 1980 年以来，国内有少数人在泛代数方面做了一些工作。

本书作者自 1980 年起研究一类重要的泛代数——BCI-代数，1981 年本书的第一作者引入了 BCH-代数。在对 BCI-代数和 BCH-代数研究的同时作者开始对一般的泛代数进行了研究和学习。自 1985 年起，本书的作者先后给西北大学数学系八二级、八四级、八六级本科生和八九级研究生讲授泛代数，并先后指导多名研究生和本科生撰写关于泛代数和 BCH-代数的论文。在使用了多遍的教学讲稿的基础上，又于 1990 年整理、编写了这部关于泛代数基础理论的书。

本书共四章，分别介绍泛代数的基本概念、新代数的生成、代数结构和各类代数等，比较系统、全面和仔细地介绍了泛代数的基础理论。本书比较详细地介绍了中、外许多数学工作者在泛代数方

面的研究工作，尤其介绍了作者自1980年至1990年的许多研究成果。书后还附有比较详尽的参考文献。作者力求使读者在较短的时间内能尽快接触到国内外泛代数研究的最新成果，了解最基本的内容、方法，以促进我国的泛代数研究工作。

泛代数是一门综合性较强的、较抽象的代数理论，书中常常要涉及群、半群、格、模、BCH-代数等，也常常要涉及集合论、范畴论和拓扑学等。作者虽然已研究泛代数上十年，发表了一批有关论文，讲授了数遍，但要写好这本书，特别是要适合各方面人士的需要，应当说是比较困难的，免不了会有缺点和错误。这是作者感到紧张的原因。作者恳请有关专家和读者多批评、指教，以求进一步修改和完善本书。

作者自1980年以来，在泛代数和BCH-代数的研究和教学中，一贯得到北京大学数学系段学复教授、北京师范大学数学系王世强教授、山西大学数学系张宝林教授、陕西师范大学数学系王国俊教授、西北大学数学系任建华教授、赵根榕教授、胡希正教授和上海师范大学数学系吴望名教授等的支持和帮助，在此一并表示感谢。

西北大学数学系　胡庆平
西北大学经济学院　李　丹

1990年12月24日

目　　录

第一章　基本概念

本章将介绍与泛代数概念有关的一些基本概念.我们认为读者阅读过有关集合论、近世代数和点集拓扑的一些初等教材,而对于尚未具备这些数学基础知识的读者,建议阅读有关专著,如参考文献中的[3,4,5,10]等,其中[3,5,10]有中译本.

§1　泛代数的概念

1.　历史概况

代数学是数学中一个古老的分支.在远古时代,人们学会了数数,又逐步开始研究数的性质及数与数之间的关系.以后,人们逐渐用字母代替数,从而产生了初等代数学.这是数学中用抽象方法进行研究的一次质变,由此产生了线性代数、线性空间和方程论等重要内容,也产生了行列式、矩阵和线性变换等重要研究工具.

代数学中的第二次抽象性质变产生于 19 世纪.1830 年前后,法国青年数学家 Galois 首先提出了群的概念.直到 19 世纪 50 至 60 年代数学界才认识到群的概念的重要性,一些数学家开始研究群,并逐步地开始了环、域、格、模等分支代数的研究.到 20 世纪 30 年代开始出现了系统的近世代数教材,近世代数研究达到了较高的水平,成为当时代数研究的主流.在这之后的五十多年中近世代数仍不断发展,成果累累,尤其是 20 世纪 80 年代初,有限单群分类问题的完全解决,标志着分支代数已逐步走向成熟.

泛代数的出现和研究是代数学中的第三次抽象性质变.19 世纪 80 至 90 年代,数学界开始有人把群、环、域、格、模等进一步抽

象起来进行研究，出现了一些原始论文，成为泛代数研究的萌芽.著名的哲学数学家 Alfred North Whitehead 在 1898 年发表了他的一本书《A Treatise on Universal Algebra With Applications》，这是较早的泛代数论文集.

20 世纪 30 至 40 年代是古典泛代数理论研究成果比较集中的一个时期.在这一时期内一批著名的数学家(如 G. Birkhoff，Tarski 和 Jónsson 等)对泛代数进行了一些重要的研究，发表了一批重要的论文.古典泛代数理论在这一时期逐步丰富起来，开始显示出这种抽象研究的作用，且逐步地培养和锻炼了第二代泛代数研究人员和专家.

对泛代数研究的意义的理解迟至 20 世纪 50 年代.随着电子计算机的出现和不断发展，计算机语言和语义理论的研究逐步深入，泛代数理论在计算机理论研究方面的作用越来越大.反过来，这也促进了泛代数的研究:50、60 年代泛代数古典理论进一步发展，70、80 年代泛代数现代理论逐步建立.50 至 80 年代泛代数的研究工作培养和锻炼了第三代泛代数研究人员和专家，发表了大批论文，出版了一批专著，如 G. Gratzer 的[1]和 P. M. Cohn 的[2].

从现在来看，各国都有数学家在研究泛代数.加拿大、美国、英国、原苏联和日本等国的泛代数研究工作比较出色.现在，常有泛代数的国际会议召开，有的国家还办有专门的泛代数杂志，而且世界上主要的数学杂志上都发表过泛代数的论文.Zentbl. Math. 及 Math. Review 每期上都有关于泛代数论文的评论.

在这一时期中，在泛代数理论不断深入发展的同时，泛代数理论也逐步有了较广泛的应用.现在，泛代数已广泛应用于模型论、语言代数、计算机语言和语义理论、数理逻辑、证明论、Boole 代数、Jordan 代数和范畴论中，它还应用于群论、环论、格论、模论和 BCI-代数中.泛代数理论有丰富的实际背景，也有广阔的应用前景.

中国在泛代数研究方面起步比较慢. 王世强于 1964 年在《数学进展》上发表的[15]是中国数学工作者在泛代数方面发表的最早的论文. 80 年代以来,我国一些数学工作者开始注意到泛代数. 西北大学数学系自 1984 年以来多次开设与泛代数有关的一些课程,并指导数学专业本科毕业生做关于泛代数的毕业论文,还开始培养泛代数方向的硕士研究生. 在我国一批数学工作者的共同努力下,发表了一批关于泛代数的论文,出版了与泛代数关系很密切的专著《BCI-代数》(见[16]),且召开了全国第四次双 B 代数和泛代数会议,逐步地建立起一支研究泛代数和 BCI-代数的队伍,并不断地加强与国际同行的联系和交流. 在我国,泛代数研究将会克服种种困难,不断深入发展,也将会得到有关方面人士的理解和支持.

2. 对应、关系和运算

在定义泛代数的概念之前,我们先复习一下集合论中对应、关系和运算等概念.

定义 1 设 A 和 B 是集合.

1) 称集合

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ 和 } b \in B\}$$

为 A 和 B 的笛卡尔积;

2) 如果

$$\varnothing \neq R \subseteq A \times B,$$

则称 R 为从 A 到 B 的一个对应;

3) 如果 f 是从 A 到 B 的一个对应,且对于每个 $a \in A$,存在唯一一个 $b \in B$,使得 $(a,b) \in f$,则称 f 为从 A 到 B 中的一个映射,记为

$$f: \quad A \to B, a \to f(a)(= b);$$

4) 如果 φ 是从 A 到 B 的一个对应,则称集合

$$\varphi^{-1} \equiv \{(b,a) : (a,b) \in \varphi\}$$

为 φ 的从 B 到 A 的一个逆对应；

5） 如果 φ 是从 A 到 B 的一个对应，ψ 是从 B 到集合 C 的一个对应，则记

$$\psi\varphi = \{(a,c) \in A \times C : \exists\, b \in B, (a,b) \in \varphi,\ \text{且}(b,c) \in \psi\}$$

（它是从 A 到 C 的一个对应）；

6） 如果 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$ 是两个映射，则称映射

$$gf: \quad A \to C, \quad a \to g(f(a))$$

为 f 和 g 的复合；

7） $1_A: A \to A$，表示集合 A 上的恒等映射，也可记为

$$1_A = \{(a,a) : a \in A\} \equiv \Delta,$$

也称它为集合 A 上的对角线.

容易验证下列结果成立：

定理 1 如果 φ 是从 A 到 B 的一个对应，ψ 是从 B 到 C 的一个对应，θ 是从 C 到 D 的一个对应，则下列各式成立：

1） $(\theta\psi)\varphi = \theta(\psi\varphi)$；

2） $(\psi\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\psi^{-1}$；

3） $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$；

4） $\varphi 1_A = \varphi = 1_B \varphi$.

定义 2 设 A 和 B 是集合.

1） 一切从 A 到 B 的映射作成的集合记为 B^A；

2） 如果 $A = \{1,2,\cdots,n\}$，其中 n 为一个自然数，则记

$$B^A = B^{(n)},$$

称 $B^{(n)}$ 的元素为集合 B 中的一个 n 元组（或 n 元序列）；

3） 如果 R 是 $A^{(n)}$ 的一个子集，则称 R 为集合 A 上的一个 n 元关系；

4） 如果 R 是 A 上的一个二元关系，记为

$$aRb \qquad \text{iff} \quad (a,b) \in R.$$

几种重要的二元关系：

定义 3 设 R 是 A 上的一个二元关系.

1) 如果 $\Delta\subseteq R$,即$\forall a\in A, aRa$,则称 R 是自反的;

2) 如果 $R=R^{-1}$,亦即 R 满足
$$aRb\Rightarrow bRa,\quad \forall a,b\in A,$$
则称 R 是对称的;

3) 如果 $R\circ R\subseteq R$,亦即 R 满足
$$aRb \text{ 且 } bRc\Rightarrow aRc,$$
则称 R 是传递的;

4) 如果 $R\cap R^{-1}=\Delta$,亦即 R 满足
$$aRb \text{ 且 } bRa\Rightarrow a=b,$$
则称 R 是反对称的;

5) 如果 R 是自反的、对称的和传递的关系,则称 R 是 A 上的一个等价关系;

6) 如果 R 是 A 上的一个等价关系,则记
$$[a]_R=[a]=\{b\in A : bRa\},$$
且称集合 $A/R=\{[a] : a\in A\}$为 A 关于 R 的商集.

等价关系与分划概念有密切的联系.

定义 4 设 A 是一个集合. A 的一个分划是指 A 的非空子集作成的一个集合 $\mathscr{A}$,使得:

1° $\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\{B : B\in\mathscr{A}\}=A$;

2° $\forall B_1,B_2\in\mathscr{A}, B_1\neq B_2\Rightarrow B_1\cap B_2=\varnothing$.

定理 2 设 A 是一个非空集合.

1) 如果 E 是 A 上的一个等价关系,则 A/E 是 A 的一个分划;

2) 如果 $\mathscr{A}$ 是 A 的一个分划,则如下定义的 R:
$$aRb \quad \text{iff} \quad a、b \text{ 同属于 } \mathscr{A} \text{ 的一个元素}$$
是 A 上的一个等价关系;

3) A 的分划的集合与 A 上等价关系的集合是一一对应的.

关于半序关系与运算的概念:

定义 5 设 A 是一个集合，如果 A 上的一个关系 $\geq$ 是自反的、反对称的和传递的，则称 $\geq$ 为 A 上的一个半序关系，且称 $(A, \geq)$ 为一个半序集.

注 1 记

$$O = \{(a,b) \in A \times A : a \geq b\},$$

则"$\geq$"的自反性、反对称性和传递性分别为：

$$O \supseteq 1_A,$$

$$O \cap O^{-1} \subseteq 1_A,$$

$$OO \subseteq O.$$

定义 6 设 A 是一个非空集合.

1） 如果 a_0 是 A 中一个固定的元素，称 a_0 为 A 上的一个零元运算；

2） 如果 n 是一个自然数，映射

$$f: \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{个}} \to A, \qquad (a_1, a_2, \cdots, a_n) \to f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

称为 A 上的一个 n 元运算.

注 2 设 f 是 A 上的一个 n 元运算. 如果 $n=0$，即 f 是 A 中的一个常元 a_0，那么 f 是 A 上的一个一元关系；如果 $n \neq 0$，且 f 由(1)式给出，那么

$$f \subseteq \underbrace{A \times A \times \cdots \times A \times A}_{(n+1)\text{个}},$$

因此 f 是一个 $(n+1)$ 元关系. 总之，我们把 A 上的任一 n 元运算 f 可看作 A 上的一个 $(n+1)$ 元关系. 但反之不真.

3. 泛代数的概念

本书中我们把泛代数简称为代数.

定义 7 一个代数是一个对子 $\mathscr{A} = (A; F)$，其中 A 是一个非空集合，称为这个代数的基础集，F 是 A 上有限元运算的一个集合.

注 3　在承认选择公理的条件下，代数 $\mathscr{A}=(A;F)$ 上有限元运算的集合 F 已有一个明确的良序：

$$F=\{f_0,f_1,f_2,\cdots,f_i,\cdots\}_{i<K}, \tag{2}$$

其中 K 为一个序数. 此时，代数 $\mathscr{A}$ 亦可记为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=(A;F)\\&=(A;f_0,f_1,f_2,\cdots,f_i,\cdots)_{i<K}.\end{aligned} \tag{3}$$

当 F 为一个非空有限集时，设 $F=\{f_0,f_1,\cdots,f_K\}$，此时代数 $\mathscr{A}$ 常记为

$$\mathscr{A}=(A;F)=(A;f_0,f_1,\cdots,f_K),$$

其中 $K<\omega$(最小的无限序数).

定义 8　设代数 $\mathscr{A}$ 由(3)式给出，其中 f_i 是 n_i 元的运算(n_i 可以为 0)，则称该代数 $\mathscr{A}$ 是

$$N=(n_0,n_1,\cdots,n_i,\cdots)_{i<K}$$

型的，且称 $K=O(N)$ 为型 N 的阶.

定义 9　一切代数作成的类记为 UA.

一切型 N 的代数作成的类称为型 N 代数的相似类，记为 $A(N)$ 或 $K(N)$ 或 $\Omega(N)$.

特别地，一切(2,0)型代数的类记为 $K(2,0)$ 或 $A(2,0)$.

代数概念有着丰富的实际背景，这是我们抽象地研究代数的根本原因之一. 这里列举几个例子.

例 1　一个广群$(G;\cdot)$，其中 G 是一个非空集合，$\cdot$ 是 G 上的一个二元运算，即

$$\cdot:\quad G\times G\to G,\quad (a,b)\to a\cdot b.$$

虽然，广群是一个(2)型代数(反之亦真).

一个半群$(G;\cdot)$是一个广群$(G;\cdot)$，且 G 满足结合律：

$$(ab)c=a(bc),\quad \forall\, a,b,c\in G.$$

显然，半群也是一个(2)型代数.

一个独异点(或么半群)$(G;\cdot,e)$是一个半群$(G;\cdot)$，且 G 有一个恒等元 e，满足

$$ae = ea = a, \quad \forall\, a \in G.$$

显然，一个独异点是一个(2,0)型代数.

一个群$(G;\cdot,e)$是一个独异点$(G;\cdot,e)$，且G中任一元素a都有逆元$a^{-1}(a^{-1}\in G)$，满足

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

显然，群是一个(2,0)型代数. 一切群作成的类记为Gr. 易知成立包含式：

$$Gr \subset A(2,0). \tag{4}$$

注意，(4)式是类之间的真包含式. 读者容易举一个不是群的(2,0)型代数的例子.

一个 Abel 群或交换群$(G;+,0)$是一个群$(G;+,0)$，且满足交换律：

$$ab = ba, \quad \forall\, a,b \in G$$

(在 Abel 群中我们把二元运算记作$+$，而恒等元记为 0). 显然，任一 Abel 群都是(2,0)型代数. 我们用Ab表示一切 Abel 群作成的类. 易知，成立类的真包含式：

$$Ab \subset Gr. \tag{5}$$

读者容易举一个非交换的群的例子.

例 2 一个环$(X;+,0,\cdot,1)$是一个五元组，使得$(X;+,0)$是一个 Abel 群，$(X;\cdot,1)$是一个独异点，且满足分配律：$\forall\, x,y,z \in X$，

$$x(y+z) = xy + xz,$$

$$(y+z)x = yx + zx$$

(本书中的环皆是具有乘法单位元 1 的). 显然，一个环是一个(2,0,2,0)型代数. 一切环作成的类记为$Ring$. 易知成立真包含式：

$$Ring \subset A(2,0,2,0). \tag{6}$$

读者容易举出一个非环的(2,0,2,0)型代数的例子.

一个除环或斜域是一个环$(R;+,0,\cdot,1)$，且R至少包含一个不等于 0 的元素，而R中每个不等于 0 的元素都有(乘法下的)

一个逆元. 因此，一个除环也是一个(2,0,2,0)型代数.

一个域是一个交换除环，因此也是(2,0,2,0)型代数.

注意，除环和域中的求逆运算

$$(\quad)^{-1}: R-\{0\} \rightarrow R,\ x \rightarrow x^{-1} \tag{7}$$

没有列入 R 的运算集，因为$(\quad)^{-1}$不是 R 上的运算. 也就是说，我们称除环和域是(2,0,2,0)代数是不考虑求逆运算的. 但是，如果考虑求逆运算(7)，那么除环和域就不是一个代数了. 它们是偏代数的重要实际例子.

例 3 一个半序集$(A;\leq)$. 如果对于任意的 $a,b\in A$，存在一个上确界 $a\vee b$ 和一个下确界 $a\wedge b$，则半序集$(A;\leqslant)$称为一个格. 由这个定义看，格似乎与代数没有什么关系. 但是，格却有下列等价定义：一个格是一个(2,2)型代数$(A;\vee,\wedge)$，且满足下列格公理：$\forall\, a,b,c\in A$，

L-1 $a\vee a=a, a\wedge a=a$；

L-2 $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$；

$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$；

L-3 $a\vee b=b\vee a$， $a\wedge b=b\wedge a$；

L-4 $a\wedge(a\vee b)=a$， $a\vee(a\wedge b)=a$.

这四个公理分别称为等幂律、结合律、交换律和吸收律.

如果一个格$(A;\vee,\wedge)$满足下列分配律：

L-5 $(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$，

$(a\wedge b)\vee c=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$，

则称它为一个分配格. 显然，一个分配格也是(2,2)型代数.

如果格$(A;\vee,\wedge)$中存在两个元素 0 和 1，使得$\forall\, a\in A$，

$$0\leq a \text{ 和 } a\leq 1, \tag{8}$$

则称$(A;\vee,\wedge,0,1)$是具有零元素 0 和恒等元素 1 的格. 显然，具有零元素 0 和恒等元素 1 的格$(A;\vee,\wedge,0,1)$是一个(2,2,0,0)型代数. 注意，(8)式中的“$\leq$”号是这样定义的：$\forall\, a,b\in A$