2005年 硕士研究生入学考试

数学

(理工类)历年真题及解析

透析专家的编写思路
考研状元的学习心得

全国首套由名师与考研状元倾力打造的精品

策划：郭 璟
灯塔考研命题研究组 编写

1999年－2004年12套全真试卷详细解析

九州出版社
JIUZHOUPRESS

2005年硕士研究生入学考试历年真题及解析

数学（理工类）

郭　璟　策划

灯塔考研命题研究组　编写

肖　川　审定

（北京师范大学　副教授、博士）

九州出版社

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试历年真题及解析．数学．理工类 / 灯塔考研命题研究组编写．—北京：九州出版社，2004.8

ISBN 7－80195－109－3

Ⅰ．硕...　Ⅱ．灯...　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—解题　Ⅳ．G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 072701 号

硕士研究生入学考试历年真题及解析—数学（理工类）

作　　者/灯塔考研命题研究组　编写

出版发行/九州出版社
出 版 人/徐尚定
地　　址/北京市西城区阜外大街甲 35 号
邮政编码/100037
发行电话/（010）68992192/3/5/6
邮购热线/（010）68992190
电子信箱/jiuzhoupress@vip. sina. com

印　　刷/北京市梨园彩印厂
开　　本/787×1092 毫米　16 开
印　　张/13.25
字　　数/322 千字
版　　次/2004 年 8 月第 1 版
印　　次/2004 年 8 月第 1 印刷

书　　号/ISBN 7－80195－109－3/G・325
定　　价/86.00 元（共四册）

前　　言

《2005 年硕士研究生入学考试历年真题及解析—数学（理工类）》以 2005 考试大纲为基础，并结合名校名师多年考研试题研究的经验和考研高分学生的心得编著而成，适合考生临考模拟和查漏补缺之用。

本书收集了 1999 年到 2004 年数学一和数学二真题，每套试卷由三部分内容组成，第一部分是真题，第二部分是详细答案，第三部分是解析。答案部分不仅给出了试卷评分的标准答案，有些题还列出了多种不同的解法，以扩展考生的解题思路，解析部分对每道真题进行了精辟的解说，使考生能够触类旁通，更全面地掌握考试内容，更全面地了解考研的特点。

本书的最大特点是由考研高分学生和名校名师共同完成，既反映了名校名师多年考研试题研究的经验，也反映了考研高分学生的心得。虽然各种版本的真题在内容上没有太大的差别，但本书凝聚了考研高分学生对真题的理解，反映了他们作为考研人对历年真题的解读，同时加上了名校名师的指导，这是本书与其他同类型的书的最大差别，而我们的目的在于使本书更贴近考生实际，使其成为一本真正属于考研人的书，更好地为考生服务。

本书适合考生临考模拟和复习之用。

编　者

2004 年 8 月于北京

名师点拨

随着考研浪潮又一次到来，我们“考研人”被推向浪潮的前沿，是成为“弄潮人儿”还是随波逐流，这是我们“考研人”必须要走的历程。

纵观历年考研的状况，我们能够深深感触到近年考研试题的变化，但从现状看来，考研在整体水平不会再有太大的提高，2005 年试题难度应保持在这一水平线上，但试题将更具特色，具体表现为以下特点：

1. 考研试题覆盖面扩大，试题更多体现在实用性、灵活性上，知识面覆盖大纲中的所有内容。因此考研要注重全面复习，不要死记硬背大纲的知识，要抓住大纲中要领，掌握精髓。
2. 各门学科重大热点问题往往是大分值考题的切入点。考研要想取得好成绩，就要全面复习，掌握基础知识的同时，加强自身综合思维的能力，所以平时做题要尽量拓展解题思路。
3. 目前考研试题不仅是测试考生的基础知识，同样注重考生运用知识解决问题的能力，要做到这点就应该对知识要有深刻的理解；往往大分值考题所涉及的知识都是跨章节跨学科，有很强的综合性、应用性和技巧性。

复习建议：

全面理解基础知识，注重培养解决实际问题的能力。

英语　以词汇、语法、听力为重点，同时进行阅读理解训练。目前虽已取消单独词汇、语法的考题，但它们是基础，因此必须要强化过关。听力也是很多人的弱项，平时注意多练习，对复杂的长句、难句要加大阅读巩固语法、词汇和句式，平时注意多听，培养语感，接下来进行大量真题的练习，加强英语的写作能力。

数学　全面整理基本概念，定理公式，要做到透彻的理解，如要加强记忆，建议大家牢记公式、定理，熟悉来龙去脉，这将有助于对公式、定理的灵活运用，接下来做真题和试卷是极为重要的，不仅要做，而且要多做，这样有助于在实际的应用方面的提高，揣摩各类题型，掌握解题规律，最终达到熟能生巧的地步。

政治　结合最新大纲特点，注重基本理论的分析，加强记忆，由于政治目前呈现基本理论与时事政治相结合的特点，所以在加大对基本理论的理解与记忆的同时，关注时事，注重大纲中新特点和增加的内容。

专业课　无论是本校本专业，还是跨校跨专业，熟练掌握专业知识，有意识地按门类归纳知识内容，整理本专业的整体框架，建立专业知识体系。

基础、重复、细心

——2004年考研数学（一）148分获得者　陈智

（鉴于笔者要求，使用的是同音名）

虽然考研几科都很重要，但事实上最容易拉开分数差距的是数学，考研数学很容易拉开20—30分的差距，而其他科目拉开10分差距都比较困难，所以在考研中，数学也就是我复习的重中之重。

数学复习的体会可以用六个字概括：基础、重复、细心。下面我从数学复习的三个阶段介绍对这六个字的认识。

第一阶段，无论考生的数学基础多好，我认为刚开始复习数学的时候，认真看一遍教材是非常必要的，尤其要理解基本概念、基本定理和基本方法的内涵和外延，能够理解到这些概念、定理和基本方法的文字下面的含义，而这种理解只能通过适当地做题完成，所以考生在首次复习时，可以将教材内容及教材里的习题完成。当然这也根据考生情况不同而不同，对于基础比较弱的考生，这方面花的功夫多点，建议1—2个月时间，而对于基础比较好的同学，教材内容全看，但教材里的习题可以选做，时间10—20天就够了，事实上，我只是用了10天时间看了看教材，就直接做辅导书籍，这种方法既和我数学基础比较好有关，也和我从小养成的复习方法有关，大家不一定适应。但无论如何，对数学教材的复习是非常有必要的。

然后就是在做题中继续掌握，牢固记忆和理解所有的定义、定理、公式，一定要先把所有的公式、定理、定义记牢，然后再做大量的练习基础题。做这些基础题时如能达到一看便知其过程，这样就说明真正掌握了基础习题的内容。这些题看起来简单，但它们能帮助我们熟悉和掌握定义、定理、公式，所以考生不能因为这些题简单而不去看它，不去重视它。在这个过程中，重复是必不可少的，有些考生在复习数学中有种情况，即只看不做，或者以前做过类似的题型，所以下次碰到时只看不做，这是复习数学的大忌。因为数学也是一个熟能生巧的科目，只有通过大量做题才能避免解题时的各种困惑（我不赞成题海战术，但不做相当多的习题，数学拿高分确实比较难）。有些考生在考研中出现一种情况，即考试中觉得所有题型都看过，但真正做题时却没有充分的把握，考完以后估分能上130，事实上只考了100，这就是基础不牢的原因，说明平时做题时对重复性的题目重视不够，我个人认为，同一种题型应该做10遍才会比较熟悉（即在考试的时间压力下也能准确无误地解答出来），其实考研数学中题型并不多，所以工作量并不大。

这个阶段的辅导书选用因人而异。我认为平时复习中，最好比考研难度高点，这样在考研的时候才有一种居高临下的感觉。而对于数学基础比较弱的同学，挑选一些容易点的题做，而选择一些其他较容易的辅导书。在第一阶段，我认为一、两本参考书就足够了，主要是将这些辅导书吃透点，同时最好在这个阶段将自己没有做出的题用笔记本记下来，以备第

二、第三阶段使用。

在这个阶段要处理好基础和提高的关系。基础的重要性已不言而喻，但是只注重基础，也是不行的。太注重基础，就会拘泥于书本，难以适应考研试题。但太重提高就会基础不牢，导致头重脚轻，力不从心。一般来说，基础与提高是交插和分段进行的，在一个时期的某一个阶段以基础为主，基础扎实了，再行提高。然后又进入了另一个阶段，同样还要先扎实基础再提高水平，如此反复循环。也就是上面所说的“在做题中继续掌握，牢固记忆和理解所有的定义、定理、公式”。

第二阶段，在这个阶段主要以提高为主。这个阶段可以不再看教材了。考研试题与教科书上的习题的不同点在于，前者是在对基本概念、基本定理、基本方法充分理解的基础上的综合应用，有较大的灵活性，往往一个命题覆盖多个内容，涉及到概念、直观背景、推理和计算等多种角度。因此一定要力争在解题思路上有所突破，要在打好基础的同时做大量的综合性练习题，并对试题多分析多归纳多总结，力求对常见考题类型、特点、思路有一个系统的把握。

在这个阶段复习应该注意几点：

首先，辅导书仍然是重要的工具。对于好的辅导书，考生重复做两、三遍也不为过，另外考生可以适当扩大辅导书的范围，做些比较经典的习题册，这样可以接触更多的题型。

其次，这个阶段做题应该是选做，在保持一定的重复率的基础上，考生可以放过一些熟悉的考题（即那种认为无论何时都不会再出错的题），将精力放在没有掌握的题型和知识点上，选用的参考书也不要全做，只需根据自己需要挑选一部分就行。

最后，这个阶段的复习还是要坚持第一个阶段记笔记的习惯，同时在复习的时候，充分发挥自己的笔记的作用。比如在第一个复习阶段的复习指南之类的辅导书，如果考生在复习的时候能够将所有不知道的题型记下来，这个阶段复习时，只需要将记在笔记本上的题重新做一遍就相当于将原来的辅导书重新复习了一次，这样节省了很多的时间和精力。当然，如果复习完后，发现一本书上的一半要重新记在笔记本上，那么就将原来的书重新做两遍或者找一般更容易的参考书吧。

第三阶段，模拟题阶段。一般考生都不太重视模拟题阶段，认为只要平时复习好了，考试就没有什么问题，所以大多考生只是在考前两三个星期做几套模拟题。这种想法是片面的，我认为模拟题阶段是一个很重要的复习阶段。

考生在复习的时候，一般都有一种感觉，就是考生之间复习的差别不是很大，一本参考书中考生们不会解答的题都是共同的，一般考题都能解答，甚至考试完以后，考生也都说自己能上 120、130，但为什么实际分数出来相差很多呢？我认为就是对模拟题阶段复习不够重视。虽然平时的复习是数学拿高分的前提条件，但不是必然条件。考试中一方面受心理情绪的影响，一方面是受时间限制，双重影响下考生容易出现不知道“熟题不熟，生题不解”的情况。

模拟题阶段的作用主要体现在一方面可以使自己很好地把握做题的节奏和时间，从而不会出现考研时因时间紧张和慌乱的情况，其次可以培养自己的细心程度。其实考研题目的难度一般都低于考生平时做题的难度，很多考生不能拿高分的原因在于两个，一是平时基础不牢，即重复题做的不够（这些重复题往往都是重点题型），从而在考试时熟题也不熟悉了，生题没法做的情况，二是考生不细心，能不能细心其实反映的还是基础能力，但很多考生在考试中莫名其妙地丢掉十几分也很常见，做模拟题是弥补这方面失误的重要手段和方法。模

拟题阶段最后的作用就是保持感觉，数学和英语一样，即使考生水平很高，也要经常做题，虽然不一定能提高很多（对高手而言），但能够保持对数学的感觉，从而保持原有的数学水平。

在以上各个阶段的复习中，做真题并且不断地加深对真题的理解和把握，这是至关重要的。真题在命题形式、难度、综合性等方面都最有指导价值。真题和平常的题目是有不一样之处的。我想大家应该有这样的体会：真题似乎比平常的模拟题容易，可是，就是拿不到预料的分数。所以，大家应该在复习的时候时刻贯穿对真题的练习、研究和分析。另外，以我的经验，最近两年的试题，最好是在考试前，在一个自己给自己安排的模拟的考场环境中完成。虽然，试卷中的题目很多是已经做过的，但这种类似考场的作业会有助于调整自己的考试感觉。我是这么做的，而且觉得效果不错。

最后我要说的是，这里只是个人的一些体会，并不一定适用于所有人。大家一定要根据自己的实际情况制定复习计划和选择复习方法，复习的主动权应该始终把握在自己手中。这些东西只是给你一个参考。数学的复习很大程度上取决于个人的数学思维能力，却也并不是无章可循。归结起来两句话：狠抓基础，大量做题。课本要认真研读，尤其是概念、定义、定理的内涵和外延。这是极端重要的。

目　　录

1999 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ________.

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$ ________.

(3) $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ________.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是________.

(5) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\dfrac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\dfrac{9}{16}$,则 $P(A)=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 极限不存在. (B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导. (D) 可导. 【 】

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$,$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$,$-\infty<x<+\infty$,

其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$,$(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $-\dfrac{3}{4}$. 【 】

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$. 【 】

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$.　　【　】

三、(本题满分5分)

设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}$.

四、(本题满分5分)

求 $I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a、b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

五、(本题满分6分)

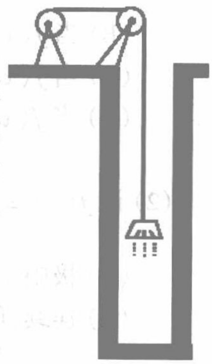
设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

六、(本题满分6分)

试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

七、(本题满分6分)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深30m，抓斗自重400N，缆绳每米重500N，抓斗抓起的污泥重2000N，提升速度为3m/s，在提升过程中，污泥以20N/s的速度从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？(说明：①1N × 1m = 1J；m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳，② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



八、(本题满分7分)

设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

九、(本题满分7分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

十、(本题满分8分)

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$,其行列式 $|A|=-1$,又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,-1,1)^T$,求 a、b、c 和 λ_0 的值.

十一、(本题满分6分)

设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定,B 为 $m\times n$ 实矩阵,B^T 为 B 的转置矩阵,试证:B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

十二、(本题满分8分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余数值填入表中的空白处.

	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_i\}=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

十三、(本题满分6分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

1999年全国硕士研究生入学统一考试 理工数学一试题详解及评析

一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}) = \underline{\quad\frac{1}{3}\quad}$.

【详解】 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

【评析】 未定式求极限，如"0—0"或"∞—∞"型，都要先进行通分，转化为"$\frac{0}{0}$"型或者是"$\frac{\infty}{\infty}$"型的未定式，然后再利用等价无穷小代换或者是洛毕达法则来处理. 此类问题的求解一般是先尽可能用无穷小量等价代换进行简化，然后再利用洛毕达法则来求解. 等价无穷小代换时必须注意：乘除项中作为因子的项才可以直接代换，加减项等非因子的项不能直接代换. 涉及到三解函数的极限问题时，一般要先将 $\tan x$、$\cot x$、$\sec x$、$\csc x$ 转化为 $\sin x$、$\cos x$ 再利用洛毕达法则来求极限可以简化计算. 本题也可作如下的求解：

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

(2) $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt = \underline{\quad\sin x^2\quad}$.

【详解】 $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt \xlongequal{x-t=u} \frac{d}{dx}\int_x^0 (-\sin u^2)du = \frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2 du = \sin x^2$.

故本题应填 $\sin x^2$.

【评析】 变限的积分求导，都是通过积分变量代换、交换积分次序等方法，将被积函数中的自变量 x（注意不是积分变量 t）换到积分上下限或者积分号外，然后再求导. 如果先将 $\sin(x-t)^2$ 按三角公式展开，然后把含 x 的项提到积分号外再积分，则计算过程非常复杂. 通常，对于形如 $\int_{a(x)}^{b(x)} f[g(x,t)]dt$ 的变限积分求导问题，都是要求先作变量代换：$g(x,t) = u$，然后再进行相关的讨论.

(3) $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\quad C_1e^{-2x} + (C_2 + \frac{1}{4}x)e^{2x}\text{，其中 } C_1\text{、}C_2 \text{ 为任意常数}\quad}$.

【详解】 特征方程为：$\lambda^2 - 4 = 0$，解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$.

故 $y'' - 4y = 0$ 的通解为 $y_1 = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. 由于非齐次项为 $f(x) = e^{2x}$，$\alpha = 2$ 为特征方程的单根，因此原方程的特解可设为 $y^* = Axe^{2x}$，代入原方程可求得 $A = \frac{1}{4}$，故所求通解为

$$y = y_1 + y^* = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}.$$

故本题应填 $C_1e^{-2x}+(C_2+\frac{1}{4}x)e^{2x}$.

【评析】 本题主要考查二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的求法.必须掌握利用特征方程 $\lambda^2+p_1x+p_2=0$ 来求二阶常系数线性方程:$y''+p_1y'+p_2y=0$ 的根,然后再利用特定系数法或微分算子法来求二阶常系数线性非齐次方程特解.必须特别注意特解的设置与特征方程根以及 $f(x)$ 的形式之间的关系.

(4) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素全为 1,则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是 $\underline{n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1个}}$.

【详解】 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值是 n 和 $0(n-1$ 重).

因此本题应填 $n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1个}$.

【评析】 矩阵的特征值有两种求法:$|\lambda E-A|=0$ 或 $Ax=\lambda x$.前一种方法主要用于矩阵元素已知的情形,可转化为行列计算问题;而后一种方法则经常用于 $\boldsymbol{A}$ 满足某一矩阵的情形.本题 $\boldsymbol{A}$ 可改写为 $A=\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}[1\cdots1]$,从而有 $A^2=nA$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值必须满足:$\lambda^2=n\lambda$,求得 $\lambda=n,x=0$.而对于任一矩阵有 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,因此同样可推导出本题 $\lambda_1=n$ 为单根,$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$ 为 $n-1$ 重根的结论.本题的常规解法为:$\boldsymbol{A}$ 的全体元素已知,直接用定义 $|\lambda E-A|=0$ 求解,转化为 n 阶行列式的计算问题.

(5) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=\underline{\ \frac{1}{4}\ }$.

【详解】 根据加法公式有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$.

由题设 A、B、C 两两独立,$ABC=\varnothing$ 且 $P(A)=P(B)=P(C)$,因此有 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=P^2(A),P(ABC)=P(\varnothing)=0$,

从而 $$P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16},$$

解得 $$P(A)=\frac{3}{4},P(A)=\frac{1}{4}.$$

又根据题设 $P(A)<\frac{1}{2}$,故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

因此本题应填$\frac{1}{4}$.

【评析】 本题要注意两两独立与相互独立的差异.题设条件中的 $P(A)<\frac{1}{2}$ 是多余的,去掉此条件仍可得出结论.实际上,若 $P(A)=\frac{3}{4}$,则有 $\frac{3}{4}P(A)\leq P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$ 矛盾.必须熟练掌握概率运算公式及其随机事件独立性的概念.

二、选择题

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数. 【 】

[答] 应选(A).

【详解】 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C\xlongequal{u=-t}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时,$f(-u)=-f(u)$,从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

故(A)为正确选项.至于(B)、(C)、(D)可分别举反例如下:

$f(x)=x^2$ 是偶函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数,可排除(B);

$f(x)=\cos^2x$ 是周期函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin2x$ 不是周期函数,可排除(C);

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数,但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数,可排除(D).

【评析】 一个函数若有原函数,其原函数便有无穷多个,如何表示它是问题的关键所在.而实际上,只要只找出一个原函数,则所有的原函数就可以表示出来,而 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 正好是所需要的一个原函数.若将原函数写成形如:$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,则结果推导 $F(-x)=F(x)$ 时非常困难,因此,特殊形式的原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 应被考虑到.函数的基本性质有:奇偶性、周期性、单调性和有界性.当 $f(x)$ 具有相应的性质时,是否其原函数 $F(x)$ 也具有相应的性质;反之若原函数 $F(x)$ 具有相应的性质时,是否 $f(x)$ 也具有相应的性质都必须要掌握.本题亦可变形为考虑 $f(x)$ 与 $f'(x)$[或 $f'(x)$ 与 $f(x)$] 的性质之间的关系.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 极限不存在. (B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导. (D) 可导. 【 】

[答] 应选(D).

【详解】 因为

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}g(x)x=0.$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右导数相等,因此,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.故正确选项为(D).

【评析】 分段函数在分段点的极限,连续和导数问题一般都需要采用定义通过左右两端进行讨论;含有绝对值的函数表达式本质上应作分段看待;极限、连续和导数三者之间的关系是:可导 → 连续 → 极限存在,但反过来却不成立.还应注意多元函数的极限、连续、可导(偏导、可微)之间的关系与一元函数的差异。本题若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则(A)、(B)、(C)三个答案可立即排除,因此可以从判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导入手.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$,$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\ -\infty<x<+\infty$,

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x,(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S(-\dfrac{5}{2})$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $-\dfrac{3}{4}$. 【 】

[答] 应选(C)

【详解】 由题设知,应先将 $f(x)$ 从 $[0,1)$ 作偶延拓,使之成为区间 $[-1,1]$ 上的偶函数,然后再作周期(周期为2)延拓,进一步展开为傅里叶级数,根据收敛定理有

$$S(-\frac{5}{2})=S(-2-\frac{1}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{3}{4}.$$

【评析】 本题主要为傅里叶级数的收敛定理,必须要熟练掌握奇偶延拓和收敛定理的具体形式与结论.而一般的收敛定理是:

$$S(x_0)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, & x_0\text{为向断点}\\ f(x_0), & x_0\text{为连续点}\end{cases}$$

具体计算 $S(x_0)$ 还应注意奇偶性和周期大小.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$. 【 】

[答] 应选(B)

【详解】 因为 $\boldsymbol{AB}$ 为 m 阶方阵,且

秩 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min[r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})]\leqslant\min(m,n)$.

当 $m>n$ 时，由上式可知，$r(AB)\leqslant n<m$，即 AB 不是满秩的，故有行列式 $|AB|=0$.因此正确选项为(B).

【评析】 四个选项在于区分行列式是否为零，而行列式是否为零又是矩阵是否可逆的充要条件，而矩阵是否可逆又与矩阵是否满秩相联系，所以最终只要判断 **AB** 是否满秩即可，本题未知 **AB** 的具体元素，因此不方便直接应用行列式的有关计算方法进行求解.对于此类抽象矩阵行列式往往考虑利用：①矩阵的秩（判断行列式是否为零）；②特征值（$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$）.本题也可用排除法求解.

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.　　【　】

[答]　应选(B)

【详解】 根据正态分布的性质，服从正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态分布.因此 $(X+Y)\sim N(1,2)$，$(X-Y)\sim N(-1,2)$.

利用正态分布在其数学期望左右两侧取值的概率均为 $\frac{1}{2}$ 知，(B) 为正确选项.

【评析】 一般而言，连续型随机变量 X 和 Y 的函数 $g(x,y)$ 满足一定条件下的概率可用如下分式进行计算：$P\{g(X,Y)\leq Z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leq Z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)$ 为 X 和 Y 的联合密度函数.本题若先求出 X 和 Y 的联合密度函数，再按上述公式进行计算也可得到相同的结论，但计算过程相当复杂.因此如果能解很方便地求得随机变量 X,Y 的函数的分布，将其转化为一变量来处理往往十分简单.

三、设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

【详解】 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+x(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})f' \\ F'_x+F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases},$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f+xf', \\ F'_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F'_x\end{cases}$$

解此方程组得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z},(F'_y+xf'F'_z\neq 0).$$

【评析】 隐函数求导原则：有几个中间变量，求导后就有几项；每一项都是先对中间变量求导，再乘以中间变量对自变量求导.应注意：$z=xf(x+y)$ 中的 $f(x+y)$ 只有一个中间