

4

下冊

第 6 - 9 章

高中數學新探索

(必修部分)

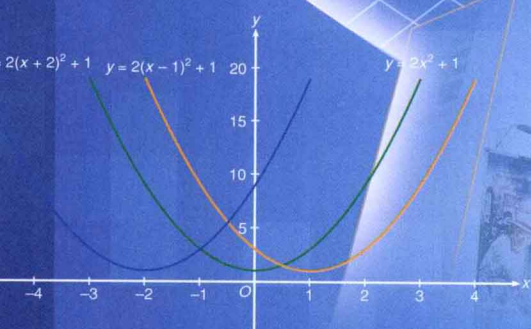
顧問 張百康 孫淑南
編著 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

4

下冊



第6-9章

高中數學新探索

(必修部分)

顧問 張百康 孫淑南
編著 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲

香港教育圖書公司

新高中適用

高中數學新探索

4

下冊

第6-9章

必修部分

本書遵照香港課程發展議會與香港考試及評核局聯合於 2007 年頒佈之《數學課程及評估指引（中四至中六）》編寫。

顧問 張百康 孫淑南

編著者 管俊傑 張美華 莊書榮 蔡銘哲

出版者 香港教育圖書公司
〔商務印書館（香港）有限公司全資附屬機構〕
香港筲箕灣耀興道3號東匯廣場8樓
電話：2565 1371
網址：<http://www.hkep.com>

印刷者 中華商務彩色印刷有限公司
新界大埔汀麗路36號中華商務印刷大廈

發行者 香港聯合書刊物流有限公司
新界大埔汀麗路36號中華商務印刷大廈3字樓
電話：2150 2100
網址：<http://www.commercialpress.com.hk>

2009 年初版

2010 年重印

© 2009 2010 香港教育圖書公司

ISBN 978-988-200-908-0

版權所有，如未經本公司書面批准，不得以任何方式，在世界任何地區，以中文或任何文字翻印、仿製或轉載本書圖版和文字之一部分或全部。

學校查詢 香港教育圖書公司市場部
電話：2887 8018
電郵：sales@hkep.com
網址：<http://www.hkep.com>

《高中數學新探索（必修部分）》是根據香港課程發展議會與香港考試及評核局聯合於2007年頒佈之《數學課程及評估指引（中四至中六）》編寫。全套教科書共分五冊，按六個階段供學生使用。

第4冊： 第一階段 實數及複數、一元二次方程、函數及其圖像 (1)、
函數及其圖像 (2)、指數及對數函數
第二階段 直線方程、圓的基本性質 (1)、圓的基本性質 (2)、
數學的進一步應用 (1)

第5冊： 第三階段 續多項式、續方程 (1)、續方程 (2)、變分
第四階段 三角學 (1)、三角學 (2)、三角學 (3)、數學的進一步應用 (2)

第6A冊： 第五階段 等差與等比數列、排列與組合、續概率、離差的量度、
統計的應用及誤用
第六階段 軌跡、不等式與線性規劃、數學的進一步應用 (3)

第6B及6C冊： 涵蓋整個初中數學科課程及高中數學科課程的必修部分的內容。提供精簡的溫習提要及解題示範，並配合不同程度的練習。

本書旨在：

- (a) 發展學生的數學知識、技能、概念及培養對學習數學的興趣；
- (b) 提升學生在生活中運用數學解決問題的能力和信心；以及
- (c) 著重學生理解及運用數學知識，以協助其日後升學及就業。

此外，透過書中多元化的內容如**數學工作坊**、**簡例示範**、**課堂練習**、**例題**及**跟進練習**等，協助學生鞏固所學及提升學習效益。

在編寫本教科書時，難免有疏漏及未盡完善之處。我們歡迎各位老師、同學及使用本教科書的人士不吝賜教，提供寶貴意見，至深銘感。

香港教育圖書公司
編輯出版部

承蒙各顧問及教師提供寶貴意見，使本系列數學教科書之內容充實及準確無誤，本社謹致以衷心謝意。

顧問

張百康先生
港島民生書院

孫淑南先生
資深數學科老師

編審

廖蔡生博士
華東師範大學數學系

審校老師

李永揚先生
順德聯誼總會鄭裕彤中學

卓永康先生
景嶺書院

林振雄先生
基督教四方福音會深培中學

陳百源先生
明愛沙田馬登基金中學

陳詠詩女士
嶺南中學

董志良先生
基督教四方福音會深培中學

潘嘉亮先生
港島民生書院

鄧俊偉先生
宣道會鄭榮之中學

本書內所引用的香港中學會考及香港高級程度會考試題，蒙香港考試及評核局准予使用，特此致謝。

本書內所引用的GCE Ordinary Level Mathematics Examination試題，蒙University of Cambridge Local Examinations Syndicate 准予使用，特此致謝。（University of Cambridge Local Examinations Syndicate 對答案的準確性概不負責，有關責任由本公司承擔。）

對於提供相片版權的人士，以及未能取得聯絡或無由查詢之相片版權持有者，本公司謹致以衷心謝意。若有疏漏之處，請合法之相片版權持有者與本公司聯絡。

本書特色

本章概要

扼要列出每章課題。

導言

引發同學對學習數學的興趣。

個案研究

提供與課題相關的現實生活個案，讓同學對相關數學概念及其應用建立初步的認識。

2 一元二次方程

本章概要

前言及導言研究	P28
小結	P29
2.1 二次方程	P30
2.2 利用平方差法因式分解二次方程	P30
2.3 利用二次公式解二次方程	P35
2.4 二次方程的根與係數的關係	P44
2.5 二次方程的應用問題	P48
2.6 二次方程的幾何應用	P53
本章小結	P53
2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6	

前言

在日常生活中，我們有時會遇到涉及二次方程的問題。它可用於描述有關噴泉的形狀、跳遠及跳高運動員的動作等，同時亦可應用於建築的問題上。此外，二次方程也應用在數學的不同範疇上，如多邊形的一般公式。在本章中，我們將學習以不同的方法來解一元二次方程。

個案研究



在初中階段，我們學過若一個數可排列成一個三角形的形狀（如下圖所示），則該數被稱為三角形數。

圖 2.1

對於所有三角形數 p ，我們均可以用 $p = \frac{n(n+1)}{2}$ 的形式表示，其中 n 為正整數。該公式可寫成 $n^2 + n - 2p = 0$ ，變為 n 的二次方程。我們將在本書的 2.2 節及 2.3 節介紹解二次方程的方法。

想一想

在檢查 36 是否三角形數時，我們需解以下的方程來求 n 。

$$36 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (*)$$

- (a) 把 (*) 寫成 $an^2 + bn + c = 0$ 的形式。
(b) 證明 n 滿足 (a) 的方程。由此，證明 36 是第八個三角形數。

課程內的「非基礎部分」會以特別符號標示出來。

想一想

提供配合個案研究的思考題，以引起學習動機。

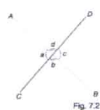
小回顧

讓學生重溫及鞏固在低年級，或在先前的章節所學的知識。

Let's Review

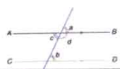
1. Angles Related to Straight Lines

- (a) The sum of all angles at a point is 360° .
 $a + b + c + d = 360^\circ$ (Reference: $\angle s$ at a point)
- (b) Vertically opposite angles are equal.
 $a = c$ and $b = d$ (Reference: vert. opp. $\angle s$)
- (c) The sum of all adjacent angles on a straight line is 180° .
 $a + b = 180^\circ$ (Reference: adj. $\angle s$ on st. line)



2. Angles Related to Parallel Lines

- (a) If $AB \parallel CD$, then the corresponding angles are equal.
 $a = b$ (Reference: corr. $\angle s$, $AB \parallel CD$)
- (b) If $AB \parallel CD$, then the alternate angles are equal.
 $b = c$ (Reference: alt. $\angle s$, $AB \parallel CD$)



數學工作坊 7.3

探究圓內接四邊形的性質

我們將使用「WinGeom」軟件來完成此工作坊。

1. 在繪圖區域上繪畫出圓形 ABCD 及直線 AB、BC、CD 及 AD，如有需要可參考數學工作坊 7.2 步驟 1-3。



圖 7.177

選擇「on Segment」，輸入「BC」及「1.5」，從圓心 BC 延長至 E 點，然

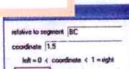


圖 7.178



圖 7.179

簡例示範

提供清晰及簡易的範例，展示如何應用所學。

簡例示範

以 i 表示下列各數。

(a) $\sqrt{-9}$

(b) $\sqrt{-125}$

解：

(a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)}$
 $= \sqrt{9} \times \sqrt{-1}$
 $= 3i$

(b) $\sqrt{-125} = \sqrt{25 \times 5 \times (-1)}$
 $= 5 \times \sqrt{5} \times \sqrt{-1}$
 $= 5\sqrt{5}i$

◀ 樣式的簡化

課堂練習

以 i 表示下列各數。

(a) $\sqrt{-16}$

(b) $\sqrt{-121}$

(c) $\sqrt{-48}$

(d) $\sqrt{-768}$

兩實數相等當且僅當它們對應的實部及虛部均相等。

若 $a + bi = c + di$ 為實數，則

$$a + bi = a + 0i$$

課堂練習

提供基礎訓練，讓同學重溫剛學習的概念。

數學工作坊

透過富趣味性的活動，鼓勵同學主動探究。

例題

鞏固已學的數學概念。

思路分析

提供解題的思考方法及步驟。

另一種解法

提供同一問題的多種解法，鼓勵同學作多角度思考。

例題 2.3

解下列各二次方程。

(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

解：

(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)(x - 4) = 0$

$x = 4$ (重根)

(b) $9x^2 - 2x = 0$

$x(9x - 2) = 0$

$x = 0$ 或 $9x - 2 = 0$

$x = 0$ 或 $\frac{2}{9}$

跟進練習

解下列各二次方程。

(a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

(c) $5x^2 - 3x = 0$

例題 2.4

解下列各二次方程。

(a) $x^2 - 12x + 36 = 0$

(b) $(5x - 3)^2 = 0$

思路分析

我們可利用平方差公式

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

來解 (a)，即

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$x^2 - 2x(4) + (4)^2 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

若 $a^2 = 0$ ，則 $a = 0$ 。

不要犯方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

在解題時，我們應注意方程中兩邊的 x 約去，否則會失去 $x = 0$ 這個根。

例題 2.3

圖中， BC 為圓的直徑及 $PQ \perp BC$ 。

解：

由於 BC 為直徑，

$\angle BAC = 90^\circ$

$\angle PQC = 90^\circ$

$\therefore \angle BAC = \angle PQC$

$\therefore A, B, Q$ 及 P 共圓。

(外角 = 內對角)

另一種解法：

由於 BC 為直徑，

$\angle BAC = 90^\circ$

$\angle PQC = 90^\circ$

$\therefore \angle BAC + \angle PQC = 90^\circ + 90^\circ$

$= 180^\circ$

$\therefore A, B, Q$ 及 P 共圓。

(半圓上的圓周角)

(已知)

(對角互補)

生活中的數學



在日常生活中，我們可觀察到很多切線的例子，如相片中的電車車輪與路軌便是其中一個例子。

生活中的數學

介紹日常生活中相關知識的應用。

跨學科資料館

簡介相關知識在其他學科領域中的應用或資訊。

歷史資料館

約公元前 400 年的中國，墨子在

其著作《墨經》裏，也有對幾何

學中的基本平面圖形作定義。

約公元前 400 年的中國，墨子在

其著作《墨經》裏，也有對幾何

學中的基本平面圖形作定義。

傑出數學家簡介

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

1734 年，歐拉 (1707—1783)

在一篇文章中首次以記號 $f(x)$

來表示函數，有關他的生平，

可瀏覽以下網址：

<http://www.math.nku.edu.tw/activity/euler.html>

傑出數學家簡介

簡介一些傑出數學家的成就及貢獻。

練習

按程度分為初階題及進階題，方便同學進行測試及了解自己的學習進度。

練習 5.3

解下列 (第 1—9 題) 各對數方程。

1. $\log(x+4) = 1$

2. $\log(x-3) = 2$

3. $\log(3x-5) = 0$

4. $\log\sqrt{x-1} = 1$

5. $\log\frac{2}{x+3} = 0$

6. $\log(x^2+1)^2 = 2$

7. $\log x + \log 4 = \log 48$

綜合例題

聯繫該章內不同課節所教授的數學概念，讓同學融匯貫通，靈活運用所學知識。

內容摘要

綜合例題

例 6

(a) 圓中， O 為圓心， $\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD} = 3 : 4 : 3$ 。

- 求 $\angle COD$ 。
- 求 $\angle CAD$ 。
- 求 $\angle CDA$ 。

(b) 若 $OP \perp AB$ ， $OQ \perp CD$ ， $OP = 4.5$ cm 及 $AB = 4.4$ cm，求

- 圓的半徑及
- OQ 的長度。

(如需幫助，答案請準確至一位小數。)

解：

(a) (i) $\angle AOB : \angle BOC : \angle COD = \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CD}$ (圓心角所對的弧長比) $\leftarrow$ 7.3 弧及弧的性質

$$= 3 : 4 : 3$$

$$\angle COD = 180^\circ \times \frac{3}{3+4+3}$$

$$= 54^\circ$$

$$(ii) \angle CAD = \frac{1}{2} \times \angle COD$$

$$= \frac{1}{2} \times 54^\circ$$

$$= 27^\circ$$

$$(iii) \angle ACD = 90^\circ$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中，}$$

$$\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180^\circ$$

$$\angle CDA = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ$$

$$= 63^\circ$$

(b) (i) $PR = \left(\frac{1}{2} \times 4.4\right)$ cm = 2.2 cm (圓心至弦的垂線平分弦) $\leftarrow$ 7.1 圓的性質



圖 7.250

數學增潤篇

每章末均以趣味性及生活化的數學知識及應用作為總結，引發同學對學習數學的興趣。

增潤篇

數學

托勒密定理及其應用

在第 7.4 節中，我們學習了有關圓內接四邊形的性質。現在讓我們再學習另一個有關圓內接四邊形的性質定理——托勒密定理。此定理是以希臘數學家及天文學家托勒密 (85–165) 的名字命名的。人們對托勒密的生平所知不多，只知道他對天文學及地理學的發展起了重要作用。

以下為托勒密定理：

托勒密定理
對任意圓內接四邊形，其兩組對邊的乘積之和等於其對角線的乘積。



圖 7.307

$$\text{即：} AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

現在，讓我們一起證明此定理：

證明：

設 BD 與 AC 相交於 E ，畫一條 BQ 使得 $\angle ABD = \angle QBC$ ，交於 P 。

考慮 $\triangle ABP$ 及 $\triangle QBC$ 。

$$\angle ABP = \angle ABD = \angle QBC$$

$$\angle BAP = \angle BQP$$

$$\angle BAC = \angle BQC$$

$$\angle BAP = \angle BQC$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle QBC$$

$$\frac{AB}{QB} = \frac{BP}{BC}$$

$$\frac{AB \times BC}{BP \times QB} = 1$$

$$\frac{AB \times BC}{BP \times QB} = \frac{AC \times BD}{BP \times QB}$$

$$\therefore AB \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

$$\therefore AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$



托勒密



圖 7.308

網上遊蹤

建議相關及有用的網頁。

綜合練習

提供精心設計的模擬會考及高級程度會考試題。「所屬章節」更標明了各題所屬章節，而較難的題目則附以「*」為記號。此外，當中更包括 1990–1996 年度的會考及高級程度會考試題。

綜合練習

在下列各題中，答案中所有直線的方程皆以一般式的形式表示。

初步

1. 根據下列各條件，求直線的方程。

- 過點 $A(2, 4)$ 及 $B(7, 4)$ 兩點。
- 過點 $A(-12, 2)$ 及 $B(-12, -1)$ 兩點。
- 過點 $A(3, 3)$ 且平行於 x 軸。

2. 根據下列各條件，求直線的方程。

- 過點 $A(0, -2)$ 且斜率為 $-\frac{2}{3}$ 。
- 過點 $A(2, 5)$ 且斜率為 0。

3. 根據下列各條件，求直線的方程。

- 斜率為 -1 且 y 軸截距為 4。
- 斜率為 $-\frac{3}{4}$ 且 y 軸截距為 3。

4. 根據下列各條件，求直線的方程。

- 過點 $A(-2, 3)$ 及 $B(3, 1)$ 兩點。
- 過點 $A(1, 3)$ 及 $B(9, 2)$ 兩點。

5. 已知兩點 $A(-3, 4)$ 及 $B(6, -2)$ 。

延展題

提供具挑戰性或跨學科的題目，進一步訓練分析及解難技巧。

解題策略

提供分析問題的重點及解題步驟。

延展題

- 已知 $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 。
- 求 $g(2)$ 的值。
- 求 x 的值使得 $g(x) = -1$ 。

解題策略

將 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 及 $y = -1$ 代入等式 $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ 中，化簡後以 y 表示。

開放式問題

- 求一函數使得對於任意的實數 a 及 b ， $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 。
- (a) 寫出兩條 y 軸截距均為 2 的直線的方程，其中一個開口向上，另一個開口向下。
- (b) 繪畫出以上兩條直線的圖像。

開放式問題

有助擴闊思考空間，以及鍛鍊表達技巧。

多項選擇題

- 下列何者為常數函數？
A. $f(x) = 9$
B. $f(x) = 3x$
C. $f(x) = 6x + 5$
D. $f(x) = (x+3)(x-2)$
- 若 $f(x) = x^{2008} - (x+1)^{2009} - (x+2)^{2010}$ ，則 $f(-1) =$
A. -1
B. 0
C. 1
D. 3

5. 圖中所示為 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖像，下列何者為正確？



圖 3.87

多項選擇題

提供模擬公開考試的題目。

總複習

提供精心設計的模擬會考及高級程度會考試題及 1997–2007 年度的會考及高級程度會考試目，幫助同學應付考試。

總複習二

在下列各題中，除特別指明外， O 為圓心。

初步 (I)

- 一過點 $(1, -2)$ 及 y 軸截距為 2 的直線之方程。
- 求一斜率為 $-\frac{1}{2}$ ，且 x 軸截距為 -2 的直線之方程。
- 圖中所示為直線 l 及 l_1 相交所成的角 θ 。
(a) 求 θ 及 θ 的補角。
(b) 求 $\angle OPO$ 。

- $\angle AOG = \angle EAG$
- $\angle ABO = \angle AGO$
- $\angle BAE = \angle ADB$

A. 只有 I

B. 只有 II

C. 只有 I 及 III

D. 只有 II 及 III



圖 2.55

- $\angle AOG = \angle EAG$
- $\angle ABO = \angle AGO$
- $\angle BAE = \angle ADB$

A. 只有 I

B. 只有 II

C. 只有 I 及 III

D. 只有 II 及 III

(香港中學會考 2002)

27. 圖中， $ABCD$ 為一圓， AC 與 BD 相交於 E 。若 $AD = 4$ ， $AE = 2$ ， $EC = 5$ 及 $BE = 4$ ，則 $BC =$
A. 6
B. 7
C. 8
D. 10



圖 2.58

(香港中學會考 2004)

28. 圖中， l_1 及 l_2 為兩條直線，且相交於 y 軸上。

29. 圖中， $ABCD$ 為一圓， AC 與 BD 相交於 E 。若 $AD = 4$ ， $AE = 2$ ， $EC = 5$ 及 $BE = 4$ ，則 $BC =$
A. 6
B. 7
C. 8
D. 10

(香港中學會考 2002)

27. 圖中， $ABCD$ 為一圓， AC 與 BD 相交於 E 。若 $AD = 4$ ， $AE = 2$ ， $EC = 5$ 及 $BE = 4$ ，則 $BC =$
A. 6
B. 7
C. 8
D. 10

(香港中學會考 2004)



下 冊

第二階段

6 直線方程

導言及個案研究	239
小回顧	240
6.1 直線方程	242
A. 導言	242
B. 特殊形式的直線	242
C. 在不同情況下求直線的方程	244
6.2 直線方程的一般式	251
A. 直線方程的一般式	251
B. 直線方程的特徵	252
C. 直線的交點	255
D. 平行線及垂直線	256
內容摘要	262
綜合練習	266
數學增潤篇	272

7 圓的基本性質 (1)

導言及個案研究	275
小回顧	276
7.1 圓的弦	278
A. 圓的基本名詞	278
B. 圓的弦	280
7.2 圓上的角	290
A. 圓周角	290
B. 半圓上的圓周角	293
C. 同弓形內的圓周角	295
7.3 圓的弦、弧及角的關係	301
7.4 圓內接四邊形的基本性質	311
A. 圓內接四邊形對角	311
B. 圓內接四邊形外角	314
C. 共圓點的驗證法	316
內容摘要	326
綜合練習	330
數學增潤篇	340

非基礎部分

8 圓的基本性質 (2)

導言及個案研究	343
8.1 圓的切線	344
8.2 從外點至圓的切線	355
8.3 交錯弓形的圓周角	366
內容摘要	378
綜合練習	382
數學增潤篇	394

答案	396
----	-----

索引	418
----	-----

9 數學的進一步應用 (1)

附錄 1 – 35

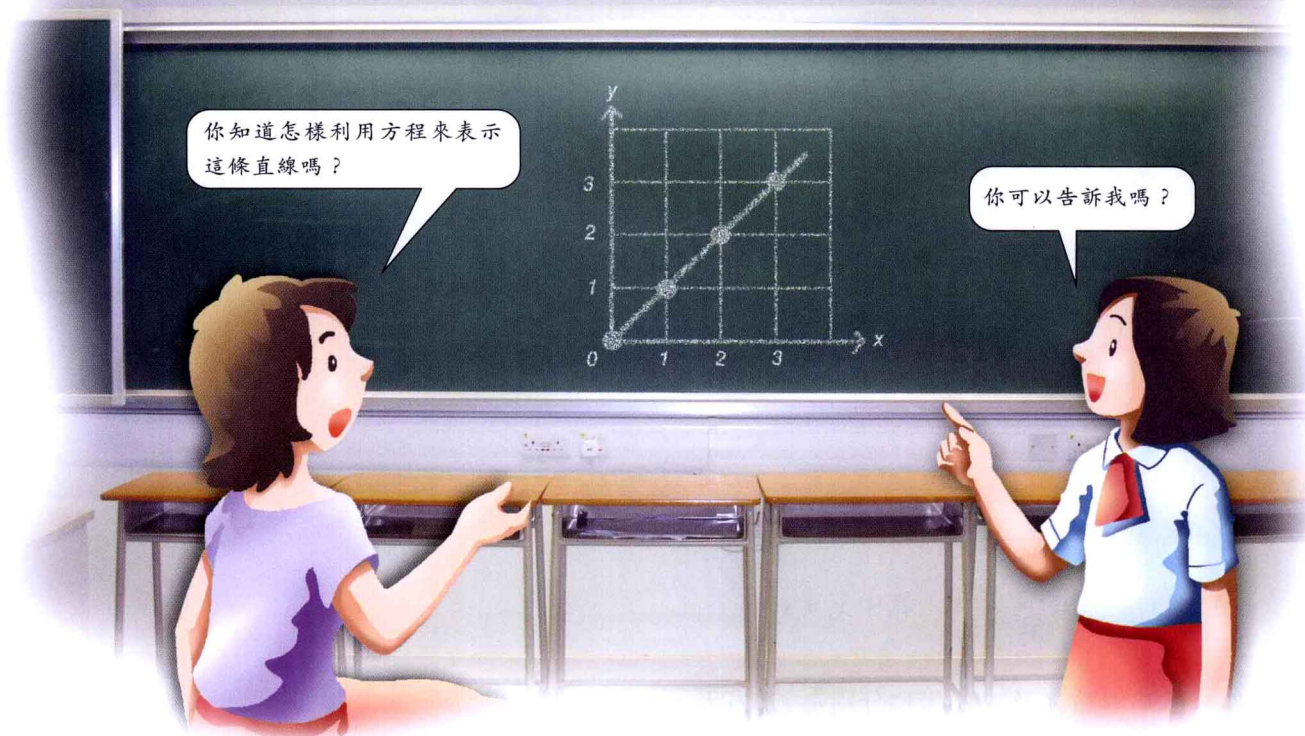
導言及個案研究	1
9.1 黃金比	2
A. 黃金比	2
B. 黃金比的應用	6
C. 斐波那契數列	8
9.2 指數及對數函數的應用	12
A. 在經濟學方面	12
B. 在化學方面	14
C. 在社會科學方面	15
D. 在考古學方面	16
9.3 重要的幾何定理	19
A. 三角形的外接圓	19
B. 塞瓦定理	23
C. 九點圓	25
內容摘要	28
綜合練習	30
數學增潤篇	34

總複習一 附錄 37 – 51

總複習二 附錄 53 – 67

答案 附錄 68

索引 附錄 71



圖中，我們發現直線通過 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 2)$ 及 $(3, 3)$ 四點。這些點的特徵是都有相同的 x 坐標與 y 坐標。因此我們可以方程 $y = x$ 來表示該直線。若我們把直線延長，便會發現直線通過更多的點，像 $(4, 4)$ 及 $(5, 5)$ ，且這兩點均滿足方程 $y = x$ 。

在本章中，我們將會學習在不同情況下求直線的方程。

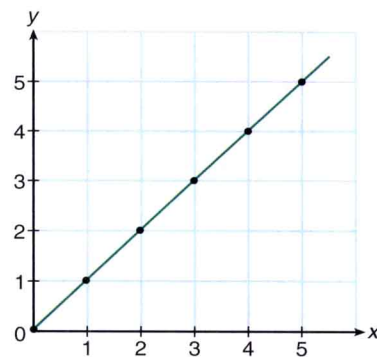


圖 6.1



我們怎樣以方程表示一通過 $(0, 0)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 、 $(3, 6)$ 四點的直線？（提示：首先找出直線通過的點的 x 坐標和 y 坐標之間的關係。）

小回顧

1. 兩點間的距離

已知坐標平面上的兩點 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 的距離為

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}。$$

上式稱為距離公式。

例如，已知兩點 A 及 B 的坐標分別為 $(1, 4)$ 及 $(-2, 0)$ ，則

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 - 4)^2} = 5。$$

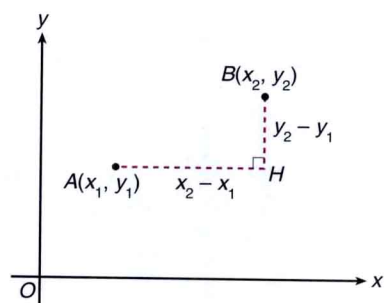


圖 6.2

2. 直線的斜率

假設 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 為直線上的任意兩點，則

$$\text{直線的斜率} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ 其中 } x_1 \neq x_2。$$

例如，已知兩點 A 及 B 的坐標分別為 $(2, 2)$ 及 $(-2, 0)$ ，則

$$AB \text{ 的斜率} = \frac{0 - 2}{-2 - 2} = \frac{1}{2}$$

注意：

(a) 若 $x_1 = x_2$ ，則直線為一鉛垂線且斜率沒有定義。

(b) 若 $y_1 = y_2$ ，則直線為一水平線且斜率等於零。

3. 傾角

若把一連接 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 兩點的直線延長至與 x 軸相交，則直線的傾角就是以逆時針方向量度由 x 軸至直線之間的夾角 θ 。

注意：

$$\tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{直線的斜率}$$

例如，圖中所示為一連接 $A(2, 4)$ 及 $B(-2, 0)$ 的直線。

$$\therefore \text{斜率} = \frac{4 - 0}{2 - (-2)} = 1$$

$$\therefore \tan \theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

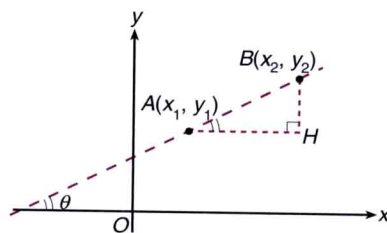


圖 6.3

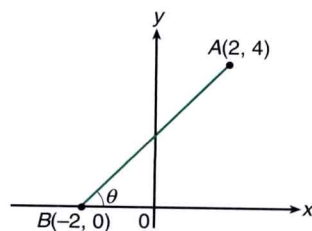


圖 6.4

4. 平行線及垂直線

已知 L_1 及 L_2 的斜率分別為 m_1 及 m_2 。

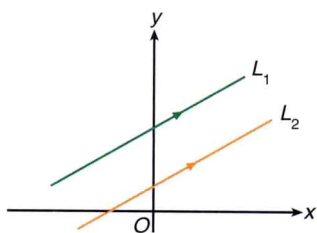


圖 6.5(a)

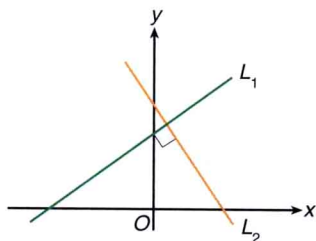


圖 6.5(b)

(a) 若兩條直線互相平行，則 $m_1 = m_2$ 。

(b) 若兩條直線互相垂直，則 $m_1 \times m_2 = -1$ 。

例如，考慮 $A(1, 4)$ 、 $B(-2, -3)$ 、 $C(6, -1)$ 及 $D(2, 0)$ 四點。

$$AD \text{ 的斜率} = \frac{0-4}{2-1} = -4 \text{ 及 } BC \text{ 的斜率} = \frac{-1-(-3)}{6-(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$AD \text{ 的斜率} \times BC \text{ 的斜率} = -4 \times \frac{1}{4} = -1$$

$$\therefore AD \perp BC$$

非基礎部分

5. 直線上的分點

考慮坐標平面上的 $A(x_1, y_1)$ 及 $B(x_2, y_2)$ 兩點。若 $P(x, y)$ 把線段 AB 以 $r:s$ 之比劃分，即 $AP:PB = r:s$ ，則

$$x = \frac{rx_2 + sx_1}{r+s} \text{ 及 } y = \frac{ry_2 + sy_1}{r+s},$$

上式稱為截點公式。

若 M 為 AB 的中點，則 $r:s = 1:1$ ，

$$\text{即 } M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} \right).$$

例如，已知 $\triangle ABC$ 的頂點為 $A(4, 9)$ 、 $B(-1, 5)$ 及 $C(7, 3)$ 。若 P 為 BC 的中點及 Q 位於 AC 上使得 $AQ:QC = 1:2$ ，故可得

$$P = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (3, 4)$$

$$Q = \left(\frac{1(7) + 2(4)}{1+2}, \frac{1(3) + 2(9)}{1+2} \right) = (5, 7)$$

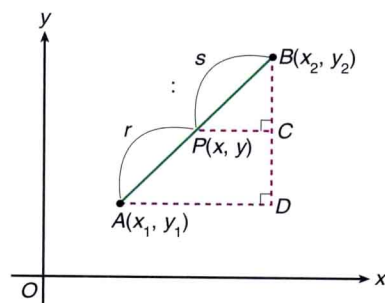


圖 6.6

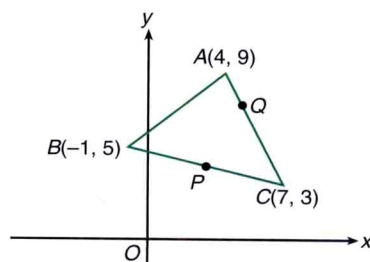


圖 6.7

6.1 直線方程

A 導言

在初中階段，我們已知道二元一次方程的圖像為一直線。如圖所示，方程 $y=x$ 及 $x+2y=5$ 的圖像均為直線。

圖中可見，每條直線均通過不同的點。直線 $y=x$ 及直線 $x+2y=5$ 分別通過點 $(2, 2)$ 及 $(1, 2)$ 。我們可觀察到在直線上的所有點的 x 及 y 坐標均滿足該直線的方程。

本節中，我們會探討如何在坐標平面中求直線的方程。

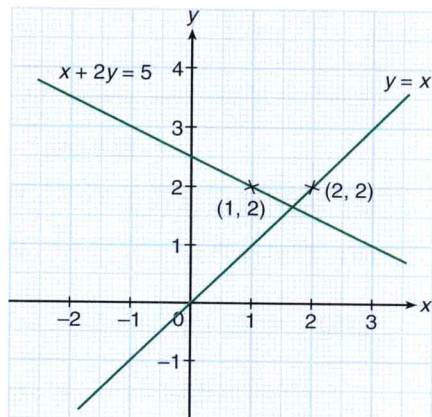


圖 6.8

B 特殊形式的直線

1. 水平線（平行於 x 軸的直線）

圖中所示為一平行於 x 軸的直線 L 。 $A(-4, 4)$ 、 $B(-1, 4)$ 、 $C(0, 4)$ 、 $D(2, 4)$ 及 $E(5, 4)$ 為直線上的五點。從圖中，我們觀察到以上五點的 y 坐標均為 4。事實上，所有位於直線 L 上的點的 y 坐標均為 4，因此直線 L 的方程為 $y=4$ 。

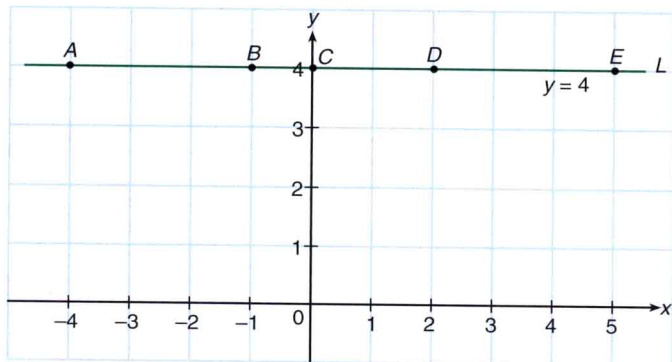


圖 6.9

生活中的數學

很多國家的國旗都以水平線作為圖紋，例如泰國和德國的國旗。



在一般情況下，一 y 軸截距為 k 的水平線的方程為

$$y = k。$$

注意：

x 軸的方程為 $y=0$ 。

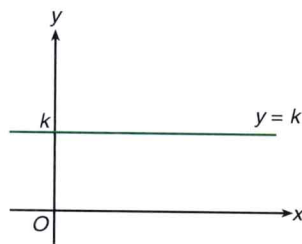


圖 6.10

2. 鉛垂線 (垂直於 x 軸的直線)

圖中所示為一垂直於 x 軸的直線 L 。 $A(-2, 5)$ 、 $B(-2, 3)$ 、 $C(-2, 0)$ 、 $D(-2, -1)$ 及 $E(-2, -3)$ 為直線上的五點。從圖中，我們觀察到以上五點的 x 坐標均為 -2 。事實上，所有位於直線 L 上的點的 x 坐標均為 -2 ，因此，直線 L 的方程為 $x = -2$ 。

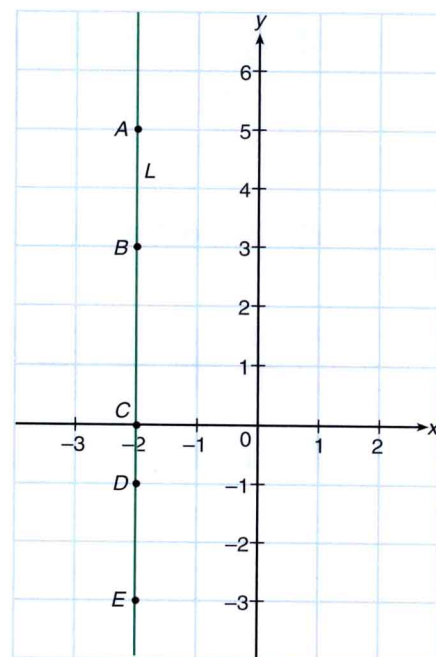


圖 6.11

在一般情況下，一 x 軸截距為 k 的鉛垂線的方程為

$$x = k。$$

注意：

y 軸的方程為 $x = 0$ 。

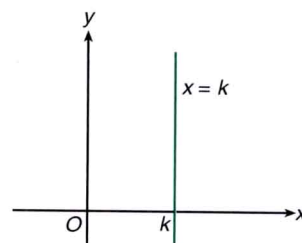
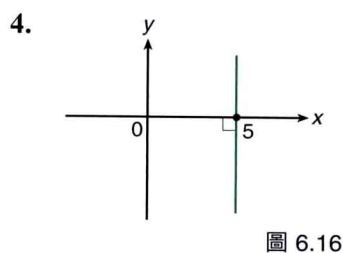
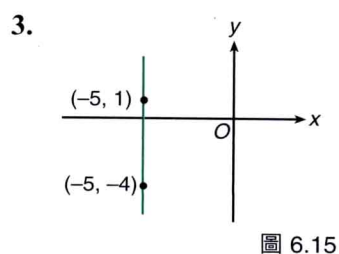
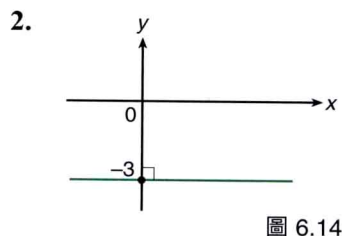
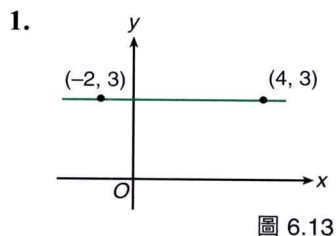


圖 6.12

課堂練習

寫出下列各直線的方程。



C 在不同情況下求直線的方程

在上一節中，我們已學習了兩種特殊直線的方程。現在，我們將會學習怎樣在不同情況下求直線的方程。

1. 已知直線的斜率及該直線上一點的坐標



數學工作坊 6.1

從已知直線的斜率及該直線上的點來確定一直線

回答下列各題。

1. 你可繪畫多少條穿過 A 點的直線？

2. 你可繪畫多少條穿過 A 點且平行於 L 的直線？

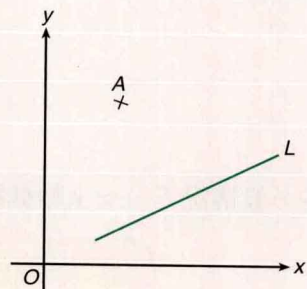


圖 6.17

從以上的工作坊可知，根據直線上的一點及其斜率，我們可確定該直線。

假設 $A(x_1, y_1)$ 位於一斜率為 m 的直線上。

設 $P(x, y)$ 為該直線上的任意一點，則

PA 的斜率 = 直線的斜率

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

因此， $y - y_1 = m(x - x_1)$

所以一通過 $A(x_1, y_1)$ 及斜率為 m 的直線的方程為

$$y - y_1 = m(x - x_1)。$$

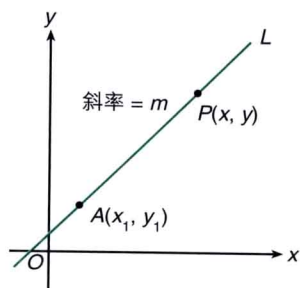


圖 6.18



智慧提示

這稱為直線方程的點斜式。

網上遊蹤

同學可瀏覽以下網頁以獲得更多直線方程的知識。

<http://www.ugrad.math.ubc.ca/coursedoc/math100/notes/zoo/eqline.html>