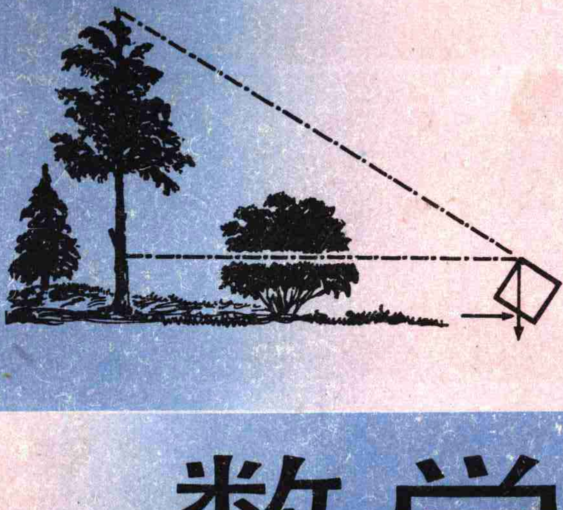
·初中毕业班师生对话丛书·



数学

刘增佑　陈纪芳　林秀贞　编著

科学普及出版社

初中毕业班师生对话丛书

数　学

刘增佑　陈纪芳　林秀贞　编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书以师生对话的形式，对初中数学的基本概念、基础知识以及重点难点、解题技巧、证题思路进行了分析、讨论和讲解，内容包括代数、平面几何与怎样学好和复习初中数学三个部分。

本书可作为普通中学初中毕业生进行数学总复习的参考书，也可供同等程度的青年自学时阅读。

（京）新登字026号

初中毕业班师生对话丛书

数 学

刘增佑 陈纪芳 林秀贞 编著

责任编辑：刘 黎

封面设计：王序德

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京昌平长城印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：10 字数：223千字

1991年10月第1版 1991年10月第1次印刷

印数：1—2500册 定价：4.80元

ISBN 7-110-01898-9/G·456

前　言

《初中毕业班师生对话丛书》包括语文、数学、物理、化学等四科，是由北京师大附中组织编写的。

这套丛书基本上是按照各学科的知识结构，把各科基础知识与基本技能中的重点、特点、难点，以师生对话的形式，由浅入深、由表及里地抓住问题的关键，逐步进行解决。力求让学生掌握问题的本质和规律，以提高分析问题和解决问题的能力。因此，它不仅对初中毕业班学生进行复习有指导作用，同时对各年级在校的初中学生在掌握知识体系、学习方法和技巧等方面都会有所启迪。此外，本书还可为其他人员参加成人高考提供参考与借鉴。

在参加这套丛书编写工作的教师中，既有教学多年、经验丰富的中老年教师，也有思想敏捷、勇于创新的青年教师。他们把自己的教学心得、体会，通过集体讨论，进行了分工编写。在丛书编写过程中，由李广钧、秘际韩、韩忠等老师负责组织和统稿工作，科普出版社的高宝成、杨艳等同志在组稿和审定等工作中，也给予了许多帮助并做了大量的具体工作，为本丛书的早日出版作出了贡献。

限于丛书编者水平有限，对错误和不当之处敬请批评指正。

北京师大附中《对话丛书》编委会

1990年9月

编者的话

数学是初中的一门重要的基础课，绝大部分初中生都喜欢学习这门课，并且非常希望学好数学，尤其是在临近初中毕业的时候，更是迫切地需要把三年来的数学知识很好地复习一下，以便提高自己的学习成绩。为满足初中毕业生的这个愿望，我们编写了这本书。它通过师生对话的形式，以简明、自然、朴实的语言在初中数学的重点和关键处，设问、讨论、作答、力求做到：

1.对初中数学中的基本概念进行深入浅出的讲解，使读者能更好地掌握概念、理解概念和运用概念；

2.对数学学习中易出错误的地方和常见的一些典型错误进行剖析，通过师生间的对话使读者能留下深刻的印象，从中汲取经验教训以便在学习中得以避免；

3.根据教学大纲，对初中数学中的重点、难点进行分析，使读者阅读本书，实际上就是一次系统的初中数学总复习；

4.老师在解答问题时所选用的例题，具有广泛的代表性、典型性，通过这些向读者介绍一些初中毕业生应具备的解题技巧和证题思路，从而培养灵活而又扎实的解题能力。

以上谈及的这些特点，是我们编写本书的目的和愿望，在复习数学时，还应适当地选做一定量的习题，使之联系实际、熟能生巧，收到更好的效果。由于我们的水平有限，书中的不足及错误在所难免，欢迎广大读者批评指正。

刘增佑　陈纪芳　林秀贞

1990年9月

目　录

一、代数……………………………………………………1

1.怎样理解和运用算术根的意义？……………………1

2.用根式的基本性质$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$时要注意什么问题？……………………………………………………6

3.怎样化简根式$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$？……………………………9

4.代数式求值有什么技巧？……………………………11

5.怎样理解因式分解的概念？…………………………15

6.解分式方程和无理方程为什么必须验根？怎样验根？……………………………………………21

7.分式方程和无理方程的解法有哪些技巧？…………28

8.方程$ax=b$的解一定是$\frac{b}{a}$吗？方程$(m-1)x^2+2mx+(m+3)=0$的解是什么？
——谈谈解字母系数方程要注意什么问题？………32

9.怎样证明和运用一元二次方程根的判别式定理和韦达定理的逆定理？……………………………35

10.运用一元二次方程根的判别式定理和韦达定理时，要注意什么问题？…………………………38

11.怎样列方程（方程组）解应用题？ ……………45

12.怎样理解幂的概念和进行幂的运算？ …………52

13.怎样才能学好对数？ ……………………………59

14.什么叫不等式？初中阶段应该掌握不等

式的哪些性质？……………………………………67
15.什么叫一元一次不等式？怎样解一元一次
不等式？……………………………………………70
16.怎样解一元一次不等式组？ ……………………73
17.怎样解$|x|<a$，$|x|>a$，($a>0$)型
的不等式？………………………………………76
18.用什么方法解一元二次不等式比较简便？ ……78
19.为什么说解不等式是数学中的一个重要的
基础知识？………………………………………84
20.为什么要确定函数中自变量x的取值
范围？求x的取值范围时有哪些规律？ ………88
21.怎样建立正比例函数、反比例函数和一次
函数的解析式？…………………………………91
22.怎样画二次函数$y=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$)
的图象？…………………………………………95
23.怎样确定二次函数的表达式？ …………………98
24.二次函数的最值怎样在实际中应用？…………103
25.怎样理解和掌握三角函数的概念？……………107
26.互余两角、互补两角的三角函数间有什么
关系？ ……………………………………………114
27.怎样灵活运用同角三角函数间的关系式？……118
28.怎样解直角三角形？……………………………123
29.什么是正弦定理？怎样运用正弦定理解题？……126
30.什么是余弦定理？怎样运用余弦定理解题？……132
31.怎样解斜三角形？………………………………138
32.你能掌握几种计算三角形面积的公式？………144
33.如何根据所给条件判断一个三角形的形状？……151

34.解三角形怎样在实际问题中应用？……………157
二、平面几何……………………………………164
35.什么是概念的定义？……………………………164
36.什么是原始概念？………………………………166
37.你能正确区分直线、线段和射线吗？……………168
38.具有同一个角的顶点的两个角是对顶角吗？……171
39.怎样辨认“三线八角”？…………………………172
40.你都学过哪些有关距离的概念？…………………174
41.三角形中的“主要线段”是指哪些线段？…………175
42.怎样正确理解相似三角形的概念？………………177
43.轴对称与轴对称图形是一码事吗？………………180
44.中心对称与中心对称图形是同一概念吗？………182
45.如何把四边形进行分类？…………………………184
46.什么叫做两条线段的比、线段的第四比例项、
比例中项和第三比例线段？…………………………185
47.黄金分割是怎么回事？……………………………187
48.到底哪个是圆的定义？……………………………188
49.与圆有关的切线都有哪些？………………………189
50.和圆有关的角都有哪些？…………………………194
51.你会判断两圆的位置关系吗？……………………196
52.点的轨迹的定义是什么？…………………………199
53.什么是命题…………………………………………201
54.命题四种形式之间存在什么关系？………………202
55.怎样造一个命题的逆命题？………………………204
56.什么叫做公理、定理？……………………………205
57.如何区分性质定理与判定定理？…………………207
58.等腰三角形的“三线合一”是怎么回事？…………208

59.直角三角形的性质都有哪些？……………………210
60.怎样证明“勾股定理”？……………………………214
61.勾股定理的逆定理存在吗？…………………………217
62.如何用两种方法证明三角形中位线定理？………219
63.如何巧证梯形中位线定理？…………………………221
64.你能应用比例的性质解题吗？………………………224
65.三角形内、外角平分线都有哪些性质？……………227
66.判定四点共圆都有哪些方法？………………………234
67.怎样正确理解和运用圆幂定理？……………………238
68.什么叫证明？…………………………………………241
69.你学过哪些证明方法？………………………………243
70.如何证明两条直线平行？……………………………245
71.如何证明两条直线互相垂直？………………………250
72.证明线段相等都有哪些方法？………………………254
73.证明两个角相等都有哪些方法？……………………259
74.怎样证明线段或角的不等关系？……………………263
75.遇到线段或角的和、差、倍、分关系的命题如何证明？……………………………………………267
76.怎样证明等积式“$a \cdot d = b \cdot c$”？……………………271
三、怎样学好和复习初中数学……………………………278
77.如何重视用定义解题？………………………………278
78.什么是配方法？怎样运用配方法？…………………281
79.怎样添加辅助线？……………………………………289
80.怎样才能解答好选择题？……………………………296
81.怎样解数学中的综合题？……………………………301
82.一些常见错误如何辨析？……………………………306

一、代　　数

1. 怎样理解和运用算术根的意义？

师　算术平方根的定义是：正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根，零的平方根也叫做零的算术平方根，你们能否用比它更简炼的语言给出算术平方根的定义？

甲生　非负数 a 的非负的平方根叫做 a 的算术平方根。

师　很好，这样定义不仅字数少，且对于抓住实质理解算术平方根的定义也很有好处。实际上我们在理解和运用算术平方根的概念时，只要抓住下面两个"非负数"就可以了。只有非负数才有算术平方根；任何一个算术平方根的值都是非负的。即：

①当唯有$a\geqslant0$时，$\sqrt{a}$才有意义；

②若$\sqrt{a}$有意义，则$\sqrt{a}\geqslant0$。

因为对于任何实数 x 定有 $x^2\geqslant0$，所以$\sqrt{x^2}$对任何实数都有意义。又因为$\sqrt{x^2}\geqslant0$，所以按定义有$\sqrt{x^2}=|x|$。记住这个关系是很重要的，它是我们在化简算术平方根时的主要根据。

下面请你们看一道题：

化　简　$\frac{1}{b}\sqrt{ab^3}+\frac{1}{a}\sqrt{a^3b}$，$(a<0)$。能否简单地得到：原式$=\frac{b}{b}\sqrt{ab}+\frac{a}{a}\sqrt{ab}$

$$= 2\sqrt{ab}?$$

乙生 不可以。化简之前必须据已知条件和算术平方根的意义判断出 b 的取值范围，在化简过程中注意利用公式 $\sqrt{x^2}=|x|$，并根据 a、b 的取值范围来去掉绝对值符号。应当这样做：

解：$\because a<0$，又 ab^3，a^3b 皆是非负的，且 b 是除数

$\therefore b\neq 0$，故 $b<0$，则

$$原式=\frac{|b|}{b}\sqrt{ab}+\frac{|a|}{a}\sqrt{ab}$$

$$=\frac{-b}{b}\sqrt{ab}+\frac{-a}{a}\sqrt{ab}$$

$$=-2\sqrt{ab}.$$

师 很好，用完全类似的方法，请解下面的题：

当 $0<a<1$ 时，化简 $\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}$.

甲生解 原式 $=\sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{a^2}}$

$$=\frac{|a^2-1|}{|a|}$$

$\because\quad 0<a<1$,

$\therefore\quad |a|=a$，$|a^2-1|=1-a^2$

又如，原式 $=\frac{1-a^2}{a}$.

师 有些简单的无理方程也可以根据算术平方根概念中的这两个非负数直接判断出它们的解来。例如，请直接判断出下列方程的解。

①$\sqrt{x^2-1}+1=0$;

②$\sqrt{x}=-x^2$;

③$\sqrt{x^2}=-x$;

④$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4-x^2}=0$;

⑤$\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}=0$;

⑥$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=0$;

⑦$\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7}=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

乙生 第①个方程无解，因为方程①即方程

$$\sqrt{x^2-1}=-1,$$

因算术平方根的值皆是非负的，可知该方程无解。

甲生 那么方程②也无解，因为$-x^2<0$。

师 对吗？

乙生 不对，任何实数的平方是非负的，但不一定是正的。当$x=0$时，$x^2=0$，故$-x^2=0$，此时$\sqrt{x}=0$，故$x=0$是方程的根。

师 在解题时我们一定要注意区别正数与非负数。那么方程③呢？

甲生 解是$x<0$，因为$\sqrt{x^2}=|x|$，而$|x|=-x$时，$x<0$。

师 又没有注意特殊的值，因为$x=0$时，$|x|=-x$也成立。故解应当是$x\leqslant 0$。

乙生 对于第④个方程$\sqrt{x^2-4}-\sqrt{4-x^2}=0$，首先要考虑的是只有非负的数才有算术平方根，即该方程有意义

的前提是：$x^2-4\geqslant0$且$4-x^2\geqslant0$，故只能$x^2-4=0$，解得$x=\pm2$，而此时原方程成立，故方程的根是$x=\pm2$。

师 解方程⑤、⑥时，需要利用非负数之和为零的条件。请你们说出这两个方程的解，并说明理由。

乙生 方程⑤$\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}=0$的解是：$\begin{cases}x=2\\y=-3,\end{cases}$

因为算术平方根的值是非负的，而非负数之和为零的条件是每个数都为零，又只有零的算术平方根为零，所以只能$x-2=0$，且$y+3=0$，故得出$x=2$，且$y=-3$。

甲生 那么方程⑥$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=0$的解就是$x_1=2$，$x_2=-3$。

师 能这样说吗？

乙生 不可以，因为这个方程成立的条件是$x-2=0$且$x+3=0$，这是不可能的，故方程无解。

师 乙说的正确。最后一个方程$\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7}=l-\frac{1}{2}\sqrt{2}$也无解，这是利用较大数的算术平方根也较大的性质得出的结论。因为$x^2+5<x^2+7$，所以$\sqrt{x^2+5}<\sqrt{x^2+7}$，故$\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+7}<0$，而$1-\frac{1}{2}\sqrt{2}>0$，所以原方程无解。

上面我们就怎样理解算术平方根的意义和利用算术平方根的意义解题进行了讨论，有了这个基础再理解n次算术根的意义就很容易了。对n次算术根及符号$\sqrt[n]{a}$的意义，我们可归为下面几点。

①一个非负数a的非负的n次方根叫做a的n次算术

根，当$a\geqslant0$时，$\sqrt[n]{a}$表示a的n次算术根，此时$\sqrt[n]{a}\geqslant0$(其中n是大于1的整数）。

②当n是偶数时，$\sqrt[n]{a}$表示a的n次算术根，故只有$a\geqslant0$时，$\sqrt[n]{a}$有意义，且$\sqrt[n]{a}\geqslant0$，有公式$\sqrt[n]{a^n}=|a|$。

③当n是奇数时，$\sqrt[n]{a}$表示a的n次方根（若$a\geqslant0$，$\sqrt[n]{a}$也可叫a的n次算术根)，有公式$\sqrt[n]{a^n}=a$。

④ $(\sqrt[n]{a})^n=a$，但要注意：当n是奇数时，对一切实数a皆成立；当n是偶数时，只对非负数a成立。

请解下列各题：

①化简 $\sqrt[4]{(\sin^2\alpha-1)^4}-\sqrt[3]{\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-1}$；

②计算 $(\sqrt[3]{-3.8})^3+\sqrt[6]{(-5)^6}+\sqrt[3]{(-1.2)^3}$；

③当$m<n<0$时 化简$\sqrt[8]{(m+n)^8}-\sqrt[4]{(n-1)^4}$.

甲生 ①解：$\sqrt[4]{(\sin^2\alpha-1)^4}-$

$$\sqrt[3]{\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha+3\cos^2\alpha-1}$$

$$=|\sin^2\alpha-1|-\sqrt[3]{(\cos^2\alpha-1)^3}$$

$$=1-\sin^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)$$

$$=2-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$=1.$$

②解：$(\sqrt[3]{-3.8})^3+\sqrt[6]{(-5)^6}+\sqrt[3]{(-1.2)^3}$

$$=-3.8+|-5|+(-1.2)$$

$$=-3.8+5-1.2$$

$$=0$$

乙生 ③解：$\because m<n<0$,

$\therefore m+n<0$，$n-1<0$

$\therefore\quad \sqrt[8]{(m+n)^8}-\sqrt[4]{(n-1)^4}$

$=|m+n|-|n-1|$

$=-(m+n)-(1-n)$

$=-m-1.$

师 做得正确。最后请解：

④若$90°<\alpha<180°$，化简：$\sqrt[3]{\cos^3\alpha}+\sqrt{\cos^2\alpha}-\sqrt{\sin^2\alpha}+\sqrt[4]{(\cos\alpha-\sin\alpha)^4}$.

甲生 解：$\because 90°<\alpha<180°$

$\therefore\quad \cos\alpha<0,\ \sin\alpha>0,\ \sin\alpha-\cos\alpha>0.$

$\therefore\quad$ 原式$=\cos\alpha+|\cos\alpha|-|\sin\alpha|+|\cos\alpha-\sin\alpha|$

$=\cos\alpha+(-\cos\alpha)-\sin\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)$

$=-\cos\alpha.$

师 做得很好，你们在解这几道题时不仅注意到算术根的概念，还注意到奇次方根与偶次方根的区别，而且能综合运用三角函数的基础知识，准确地化简绝对值。

2.用根式的基本性质$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$时要注意什么问题

甲、乙二生同做一道根式计算题，结论不同：

甲生 解：$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$

$=\sqrt[6]{(1-\sqrt{3})^2\cdot(4+2\sqrt{3})}$

$=\sqrt[6]{16-12}$

$=\sqrt[3]{2}.$

乙生 解：$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$

$=\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{(1+\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$

$=\sqrt[3]{-2}$

$=-\sqrt[3]{2}$.

师 有可能是$\sqrt[3]{2}$的结果吗？你们应当先分析一下计算的结果应当是正数还是负数？只能是负数。因为$1-\sqrt{3}<0$，$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}<0$，而$\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}>0$，异号二数相乘其积为负，显然$\sqrt[3]{2}$的结论是错误的。你们能找出错的原因吗？

乙生 他是在利用根式的基本性质时产生的错误，将$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$化为六次根式时，不能直接利用根式的基本性质，因为$1-\sqrt{3}<0$。

师 说得对，根式的基本性质：$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$，实际上只是算术根的基本性质，它成立的条件是$a\geqslant0$，故要将$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}$化为六次根式必须先将被开方数化为正数，具体计算应当是：

解：$\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$

$=-\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$

$=-\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2(4+2\sqrt{3})}$

$$=-\sqrt[6]{16-12}$$
$$=-\sqrt[3]{2}$$

这样你们两人的结论就一致了。

请计算下面两例。

①化简 $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[6]{a^2}$;

②当$0<x<1$时，化简$\sqrt[3]{x^2+\frac{1}{x^2}-2}$

$$\cdot\sqrt[5]{(x-\frac{1}{x})^3}。$$

甲生 ①解：$\because\sqrt[4]{-a}$有意义的条件是$a\leqslant0$,

$\therefore$ 原式$=-\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[3]{-a}$

$$=-\sqrt[12]{(-a)^4\cdot(-a)^3(-a)^4}$$

$$=-\sqrt[12]{-a^{11}}.$$

②解：原式$=\sqrt[3]{(x-\frac{1}{x})^2}\cdot\sqrt[5]{(x-\frac{1}{x})^3}$

$\because$ $0<x<1$, $\therefore$ $\frac{1}{x}>x$,

$\therefore$ 原式$=-\sqrt[3]{(\frac{1}{x}-x)^2}\cdot\sqrt[5]{(\frac{1}{x}-x)^3}$

$$=-\sqrt[15]{(\frac{1}{x}-x)^{10}\cdot(\frac{1}{x}-x)^9}$$

$$=-(\frac{1}{x}-x)\sqrt[15]{(\frac{1}{x}-x)^4}$$

$$=(x-\frac{1}{x})\sqrt[15]{(\frac{1}{x}-x)^4}.$$

师 做得正确。千万注意根式的基本性质，实质上是算