聚焦考研

数学复习指南

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

理工类

2005版

主编 陈文灯/黄先开
曹显兵

用正版书 赠 增值卡

基础加题型

——考研数学成功的保证

紧扣考试大纲，首创“以题型为纲”的思想，科学安排复习章节。考生在短期内，对照本书归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融会贯通、举一反三、达到事半功倍的效果。

世界图书出版公司

聚焦考研

数学复习指南

NETEM MATHS

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

理工类

2005版

主编 陈文灯/黄先开
曹显兵

用正版书 赠 增值卡

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安

FOCUS 聚焦图书

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯,黄先开,曹显兵编著. —10 版. —北京:世界图书出版公司北京公司,2002. 3
ISBN 7-5062-5211-2

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①陈...②黄...③曹... Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类)
(2005 版)

主　　编: 陈文灯　黄先开　曹显兵
责任编辑: 武海燕
封面设计: 京 A 企划

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话 62116800　邮编 100010)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 廊坊人民印刷厂

开　　本: 787 × 1092 毫米　1/16
印　　张: 38
字　　数: 898 千字
版　　次: 2004 年 2 月第 10 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O · 332　　**定价:49.80 元**

服务热线: 010 - 62198078

第十版最新修订说明

◆ **2005 版《数学复习指南》(理工版)主要改动如下:**

① 根据新的考研数学中数学一和数学二的大纲要求,将数学二不作要求内容用“*”号进行重新标注,使考生复习时更加有的放矢。

② 将文字和内容进行了逐字逐题校对,力争做到无差错率出版。

③ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。

④ 赠送网络版 2004 年数学一、二真题详解,网络名师答疑。具体内容详见封三。

◆ **本书主要特色如下:**

① 全面覆盖大纲所要求的知识点,对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性错误及错用公式和定理。

② 本书根据考研数学的知识体系,科学安排相应章节,使读者复习时循序渐进,理解和吃透大纲,掌握解题方法和技巧,奠定坚实的应试知识基础。同时对“考研”题型,深入分析研究,总结出解题方法和技巧,易为读者掌握和运用。

③ 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的做法,使读者应试时思路畅通,更加得心应手。

④ 介绍许多新的快速解题方法、技巧,可节约宝贵的解题时间。同时,设计和改造的众多的新题,使读者在做似曾相识的题型中熟悉考研综合题的编制过程和规律性,减少对试题的神秘感,多几分“攻坚”的信心和勇气。

⑤ 广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

◆ **本书长销不衰、大受历年考生追捧,究其原因:**

本书执笔作者陈文灯教授、黄先开教授、曹显兵教授皆为常年工作在教学一线的考研辅导名师,且理论功底深厚、全面。他们谙熟考生不同层次的复习需求,严格依据《数学考试大纲》的要求,通过对最近几年各知识点已有考题的分析及各类题型的精确统计,准确指点考试夺分所必备的基础知识、应掌握的规律和应谙熟的重要题型的解题技巧,科学预测各类题型的命题趋势,探索考研试题内容和形式的变迁轨迹,对于应对考研试题模式有很大的启示。

毋庸置疑,近几年专升本试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合,这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。相信会对你的考试有所帮助。

恳请广大读者和使用本书的老师们提出批评和指正。

编　者

目　录

注：带＊篇、章，数二考生不作要求。

篇前篇　高数解题的四种思维定式

先赠送给大家四句话,相信在考研中能起到关键作用,请考生务必牢记.

第一句话:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,"不管三七二十一",把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例 1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=C,\quad \lim_{x\to\infty}f'''(x)=0.$$

求证:$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

【证】 由泰勒公式有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\quad x<\xi_1<x+1,\qquad ①$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\quad x-1<\xi_2<x.\qquad ②$$

由 ① + ② 得, $f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)$. ③

由 ① - ② 得, $2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$. ④

当 $x\to\infty$ 时,$\xi_1\to\infty$,$\xi_2\to\infty$,于是有

$$\lim_{x\to\infty}f''(x)=2C-2C+\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}2f'(x)=C-C-\frac{1}{6}\times0-\frac{1}{6}\times0=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0.$

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续,$f(0)=f(1)=0$,并且当 $x\in(0,1)$ 时,$|f''(x)|\leqslant A$. 求证:$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$,$x\in[0,1]$.

【证】 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式,即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2,\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

取 $x=0,x_0=x$,则

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+f''(\xi_1)\frac{(0-x)^2}{2!},\quad 0<\xi_1<x\leqslant1;\qquad ①$$

取 $x=1,x_0=x$,则

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2!},\quad 0\leqslant x<\xi_2<1.\qquad ②$$

② - ① 得

$$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\xlongequal{f(0)=f(1)=0}\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)|\leqslant A, x\in(0,1)$,则

$$|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}[x^2+(1-x)^2]=\frac{A}{2}(2x^2-2x+1).$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$2x^2-2x+1\leqslant 1$. 故 $|f'(x)|\leqslant\frac{A}{2}$.

【例3】 试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0)=1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-1\right]$ 绝对收敛.

【证】 因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数,$f'(0)=0$. 又

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

从而 $|u_n|=\left|f(\frac{1}{n})-1\right|\sim\frac{|f''(0)|}{2n^2}$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

【例4】 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0, x\in(-\infty,+\infty)$,函数 u 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right].$$

【证】 令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t$,将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

由于 $f''(x)\geqslant 0$, 则 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

令 $x=u(t)$, 则 $f[u(t)]\geqslant f(x_0)+f'(x_0)[u(t)-x_0]$.

上式两边在 $[0,a]$ 上对 t 积分,得

$$\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^a f(x_0)\mathrm{d}t+\int_0^a f'(x_0)[u(t)-x_0]\mathrm{d}t$$

$$=af(x_0)+f'(x_0)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-ax_0\right]=af(x_0).$$

故 $\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]\mathrm{d}t\geqslant f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]$.

【另证】 因 $f''(x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此,具有性质:

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\text{(其中 }\lambda\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1).$$

由 u 在 $[0,a]$ 上连续，从而可积. 将 $[0,a]$ n 等分，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t.$$

由 f 的凸性及连续性，有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{u(\xi_i)}{a}\frac{a}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f[u(\xi_i)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(u(\xi_i))}{a}\frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n\to\infty$ 取极限，由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\,\mathrm{d}t.$$

第二句话：在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时，则"不管三七二十一"先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例 5】设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(\frac{1}{2})$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(2)$.

证明：存在一个 $\xi\in(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【证】$f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x\xlongequal{\text{积分中值定理}}2(1-\frac{1}{2})f(\eta)=f(\eta)$，$\frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta,2]$ 上满足洛尔定理，即存在一个 $\xi_1\in(\eta,2)$，使

$f'(\xi_1)=0$.　①

又 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理，于是存在一个 $\xi_2\in(0,\frac{1}{2})$，使

$f'(\xi_2)=0$.　②

由 ①，② 可知　$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上使用洛尔定理，于是 $\exists\,\xi\in(\xi_2,\xi_1)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

【例 6】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是非负、单调递减的连续函数，且 $0<a<b<1$. 证明：

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=af(\xi_1)\geqslant af(a),\quad \xi_1\in[0,a],$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi_2)\leqslant(b-a)f(a),\quad \xi_2\in[a,b].$$

于是　$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(a)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

故　$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【另证】$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{a}{b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\quad\Leftrightarrow\quad b\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

令　$F(x)=b\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$f'(x)=bf(x)-\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)=\int_x^b f(x)\,\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t+2xf(x)$$

$$= \int_x^b [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t + 2xf(x) \geqslant 0, (\text{由于} f(x) \geqslant f(t) \geqslant 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$,故

$F(a) > F(0) = 0$,即 $b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x - a\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$,

亦即 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a}{b}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

第三句话:在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$,则"不管三七二十一"先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 $f(x) \xlongequal{f(b)=0} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$

若 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数,且 $f(a) = f(b) = 0$,$M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$,试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

【证】 $f(x) \xlongequal{f(a)=0} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x,$ 则

$|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leqslant (x-a)M.$

同理 $|f(x)| \leqslant (b-x)M.$

于是 $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x$

$$\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4}M.$$

故 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}M.$

即 $\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$

【例 8】 已知在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值,试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

【证】 设 $f(c) = \max\limits_{x\in(0,a)}\{f(x)\}$,则 $f'(c) = 0$.(费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$ 与 $[c,a]$ 内分别用拉格朗日中值定理,有

$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$

$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$

于是 $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leqslant Mc,$

$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leqslant M(a-c).$

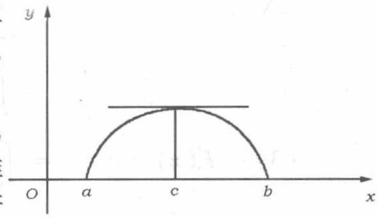
故 $|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Mc + M(a-c) = Ma.$

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的 $f''(x)$,且 $f''(x) < 0$,$f(a) = f(b) = 0$,

则在 (a,b) 上 $f(x)>0$，且

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>\frac{4}{b-a}.$$

【证】 由 $f''(x)<0$ 可知，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹函数（图形上凸）；由凹函数性质知，$f(x)$ 大于连接 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 线段上点的纵坐标．而此线段所在直线即为 $y=0$（x 轴），所以在 (a,b) 上 $f(x)>0$．再由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 是严格单调减少的，从而知 $f(x)$ 在 (a,b) 内有惟一的极大值点，记为 $x=c$．此时 $f'(c)=0$，如右图所示，而在 (a,c) 上，$f'(x)>0$，在 (c,b) 上 $f'(x)<0$．



由拉格朗日中值定理，当 $x\in[a,c]$ 时，

$f(x)=f'(\xi_1)(x-a)+f(a)$，　$\xi_1\in(a,x)$．

由 $f'(x)$ 严格递减，$f'(\xi_1)<f'_+(a)$，注意到 $f(a)=0$，有

$f(x)<f'_+(a)(c-a)$，$x\in[a,c]$．

当 $x\in[c,b]$ 时，同理可得

$f(x)<[-f'_-(b)](b-c)$，$x\in[c,b]$．

于是　$\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(c-a)f'_+(a)}$，$x\in[a,c]$，

$\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}$，$x\in[c,b]$．

则

$$\int_a^b\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x=-\int_a^b\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^c\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

$$>\int_a^c\frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)}\mathrm{d}x+\int_c^b\frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{(c-a)f'_+(a)}[f'_+(a)-f'(c)]+\frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}[f'(c)-f'_-(b)]$$

$$=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{b-a}{(c-a)(b-c)}>(b-a)\frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}=\frac{4}{b-a}.$$

第四句话：对定限或变限积分，若被积函数或其主要部分为复合函数，则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说．

【例 10】求下列函数的导数（设 $f(u)$ 是 u 的连续函数）：

（1）　$F(y)=\int_0^y f(x-y)\mathrm{d}x$，求 $F'(y)$；（2）　$F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

（3）　$F(x)=\int_0^1 f(te^x)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；　（4）　$F(x)=\int_0^{x^2}xf(x+t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$．

【解】（1）　$F(y)\xlongequal{令 u=x-y}\int_{-y}^0 f(u)\mathrm{d}u$，则 $F'(y)=-f(-y)\cdot(-1)=f(-y)$．

（2）　$F(x)\xlongequal{令 u=x-t}\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)$

$$= -x\int_x^{x-x^2} f(u)\,du + \int_x^{x-x^2} uf(u)\,du,$$

则 $$F'(x) = -\int_x^{x-x^2} f(u)\,du - x[f(x-x^2)\cdot(1-2x) - f(x)]$$
$$+ (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x)$$
$$= \int_{x-x^2}^{x} f(u)\,du + x^2(2x-1)f(x-x^2).$$

(3) $$F(x) \xlongequal{令\ u = te^x} \int_0^{e^x} f(u)\frac{1}{e^x}du = \frac{1}{e^x}\int_0^{e^x} f(u)\,du = e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\,du,$$

则 $$F'(x) = -e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\,du + e^{-x}f(e^x)\cdot e^x = f(e^x) - e^{-x}\int_0^{e^x} f(u)\,du.$$

(4) $\int_0^{x^2} f(x+t)\,dt \xlongequal{令\ u = x+t} \int_x^{x+x^2} f(u)\,du$，于是有 $F(x) = x\int_x^{x+x^2} f(u)\,du$，

则 $$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u)\,du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】 设 $f(x)$ 可微，且满足 $x = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x tf(t-x)\,dt$，求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x tf(t-x)\,dt \xlongequal{令\ u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\,du = -\int_0^{-x} uf(u)\,du + x\int_{-x}^0 f(u)\,du.$

于是原方程变为 $$x = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^{-x} uf(u)\,du - x\int_0^{-x} f(u)\,du.$$

两边对 x 求导，得 $$1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u)\,du - xf(-x)(-1).$$

整理，得 $$1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u)\,du,$$

两边再对 x 求导，得 $0 = f'(x) - f(-x)(-1)$，

即 $f'(x) = -f(-x)$， ①

上式两边对 x 求导，得 $f''(x) = f'(-x)$， ②

由 ①，② 得 $f''(x) = -f(x)$，

即 $f''(x) + f(x) = 0$，

解此方程得 $f(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$.

注意到 $f(0) = 1, f'(0) = -1$，故 $f(x) = \cos x - \sin x$.

【注】 第四句话可推广为：若给定的函数为抽象的复合函数，则运算之前应先做变量替换，使之成为简单的形式.

例如：$f[\varphi(x)] \xlongequal{令\ u = \varphi(x)} f(u)$.

【例 12】 设 $f(x^2-1) = \ln\frac{x^2}{x^2-2}$，$f[\varphi(x)] = \ln x$，计算 $\int\varphi(x)\,dx$.

【解】 令 $x^2 - 1 = t$，则 $f(t) = \ln\frac{t+1}{t-1}$，$f[\varphi(x)] = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x$，

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

故 $$\int\varphi(x)\,dx = \int\frac{x+1}{x-1}dx = x + 2\ln|x-1| + C.$$

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

一、函　数

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变域为 D，如果对于 D 中的每一个 x 值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

x—— 自变量，y—— 因变量，变域 D 为定义域，记为 D_f，变量 y 的取值的集合称为函数的值域，记作 Z_f.

函数概念的两要素：

① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围（若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域）.

② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法.

解题提示 当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

【例 1.1】 与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^e f(x)\,dx - f'(1)$ 等价的函数是

(A) $e^{\ln(\ln x)}$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x-1}{n+(x-1)k}(x>0)$.

(C) $\dfrac{1}{x}$ 的经过点 $(-1,0)$ 的原函数.

(D) 方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【解】 设 $A = \int_1^e f(x)\,dx$，$B = f'(1)$，所以，$f(x) = \ln x + A - B$，有

$$A = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (\ln x + A - B)\,dx = 1 + (A - B)(e - 1),$$

$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'\big|_{x=1} = 1$，得 $A = 1$，所以，$f(x) = \ln x$.

对于(A)，$e^{\ln(\ln x)} = \ln x (x > 1)$，与 $f(x)$ 的定义域不同.

(B)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n+(x-1)k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x-1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{n}\cdot k} = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$
$$= \ln x (x > 0),\quad 与 f(x) 等价.$$

(C) $\dfrac{1}{x}$ 的经过点 $(-1,0)$ 的原函数为 $\ln(-x)$.