

聚 焦 考 研

数 学

MATHS

NETEM

理 工 类

2005 版

主 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 | 用正版书 **赠** 增值卡

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

复习指南

基础加题型

——考研数学成功的保证

紧扣考试大纲，首创“以题型为纲”的思想，科学安排复习章节。考生在短期内，对照本书归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融会贯通、举一反三，达到事半功倍的效果。

 世界图书出版公司



有此防伪标志皆为正版

 **FOCUS**
聚 焦 图 书

聚 焦 考 研

数 学

NETEM
MATHS

理 工 类

2005 版

主 编 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 用正版书 (赠) 增值卡

复习指南

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

 世界图书出版公司
北京 · 广州 · 上海 · 西安

 FOCUS
聚 焦 图 书

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 理工类 / 陈文灯, 黄先开, 曹显兵编著. —10 版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2002. 3

ISBN 7-5062-5211-2

I. 数... II. ①陈... ②黄... ③曹... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014886 号

数学复习指南(理工类) (2005 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

责任编辑: 武海燕

封面设计: 京 A 企划

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 62116800 邮编 100010)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 38

字 数: 898 千字

版 次: 2004 年 2 月第 10 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-5211-2/O · 332

定价: 49.80 元

服务热线: 010 - 62198078

第十版最新修订说明

◆ 2005 版《数学复习指南》(理工版)主要改动如下:

- ① 根据新的考研数学中数学一和数学二的大纲要求,将数学二不作要求内容用“*”号进行重新标注,使考生复习时更加有的放矢。
- ② 将文字和内容进行了逐字逐题校对,力争做到无差错率出版。
- ③ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。
- ④ 赠送网络版 2004 年数学一、二真题详解,网络名师答疑。具体内容详见封三。

◆ 本书主要特色如下:

- ① 全面覆盖大纲所要求的知识点,对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析,增强读者对这些内容的理解和记忆,避免犯概念性错误及错用公式和定理。
- ② 本书根据考研数学的知识体系,科学安排相应章节,使读者复习时循序渐进,理解和吃透大纲,掌握解题方法和技巧,奠定坚实的应试知识基础。同时对“考研”题型,深入分析研究,总结出解题方法和技巧,易为读者掌握和运用。
- ③ 用“举题型讲方法”的格式代替各书普遍采用的“讲方法套题型”的做法,使读者应试时思路畅通,更加得心应手。
- ④ 介绍许多新的快速解题方法、技巧,可节约宝贵的解题时间。同时,设计和改造的众多的新题,使读者在做似曾相识的题型中熟悉考研综合题的编制过程和规律性,减少对试题的神秘感,多几分“攻坚”的信心和勇气。
- ⑤ 广泛采用表格法,使读者对要点一目了然。

◆ 本书长销不衰、大受历年考生追捧,究其原因:

本书执笔者陈文灯教授、黄先开教授、曹显兵教授皆为常年工作在教学一线的考研辅导名师,且理论功底深厚、全面。他们谙熟考生不同层次的复习需求,严格依据《数学考试大纲》的要求,通过对最近几年各知识点已有考题的分析及各类题型的精确统计,准确指点考试夺分所必备的基础知识、应掌握的规律和应谙熟的重要题型的解题技巧,科学预测各类题型的命题趋势,探索考研试题内容和形式的变迁轨迹,对于应对考研试题模式有很大的启示。

毋庸置疑,近几年专升本试题中的难题与本书的较简单例题不谋而合,这就促使专升本考生和辅导老师使用本书。相信会对你的考试有所帮助。

恳请广大读者和使用本书的老们提出批评和指正。

编者

目 录

篇前篇 高数解题的四种思维定式

..... 1

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续..... 7

一、函数..... 7

1. 函数的定义..... 7
2. 函数的定义域的求法..... 8
3. 函数的基本性质..... 9
4. 分段函数..... 14
5. 初等函数..... 14

二、函数的极限及其连续性..... 18

1. 概念..... 18
2. 重要定理与公式..... 20

三、极限的求法..... 28

1. 未定式的定值法..... 28
2. 类未定式..... 32
3. 数列的极限..... 33
4. 极限式中常数的确定(重点)..... 38
5. 杂例..... 41

习题一..... 45

第二章 导数与微分..... 48

一、定义·定理·公式..... 48

1. 导数与微分的定义..... 48
2. 定理..... 50
3. 导数与微分的运算法则..... 50
4. 基本公式..... 51
5. 弧微分..... 51

二、各类函数导数的求法..... 52

1. 复合函数微分法..... 52
2. 参数方程微分法..... 53
3. 隐函数微分法..... 54
4. 幂指函数微分法..... 55
5. 函数表达式为若干因子连乘积、
乘方、开方或商形式的微分法..... 56

6. 分段函数微分法..... 56

三、高阶导数..... 57

1. 定义与基本公式..... 57
2. 高阶导数的求法..... 58

习题二..... 61

第三章 不定积分..... 64

一、不定积分的概念与性质..... 64

1. 不定积分的概念..... 64
2. 基本性质..... 64
3. 基本公式..... 65

二、基本积分法..... 66

1. 第一换元积分法(也称凑微分法)..... 66
2. 第二换元积分法..... 70
3. 分部积分法..... 74

三、各类函数积分的技巧及分析..... 80

1. 有理函数的积分..... 80
2. 简单无理函数的积分..... 81
3. 三角有理式的积分..... 83
4. 含有反三角函数的不定积分..... 86
5. 抽象函数的不定积分..... 87
6. 分段函数的不定积分..... 88

习题三..... 89

第四章 定积分及广义积分..... 93

一、定积分性质及有关定理与公式..... 93

1. 基本性质..... 93
2. 定理与公式..... 96

二、定积分的计算法..... 100

1. 牛顿—莱布尼兹公式..... 100
2. 定积分的换元积分法..... 100
3. 定积分的分部积分法..... 102

三、特殊形式的定积分计算..... 103

1. 分段函数的积分..... 103
2. 被积函数带有绝对值符号的积分..... 105
3. 被积函数中含有“变上限积分”
的积分..... 106

4. 对称区间上的积分	108
5. 被积函数的分母为两项,而分子为 其中一项的积分	109
6. 由三角有理式与其它初等函数通 过四则或复合而成的函数的积分	110
7. 杂例	112
四、定积分有关命题证明的技巧	114
1. 定积分等式的证明	114
2. 定积分不等式的证明	122
习题四(1)	127
五、广义积分	130
1. 基本概念及判别法则	130
2. 广义积分的计算及判别	131
习题四(2)	135

第五章 中值定理的证明技巧 137

一、连续函数在闭区间上的性质	137
1. 基本定理	137
2. 有关闭区间上连续函数的命题 的证法	137

习题五(1)	139
--------------	-----

二、微分中值定理及泰勒公式 140

1. 基本定理	140
2. 泰勒公式	141

三、证题技巧分析 144

1. 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题证法	144
2. 欲证结论:至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = k (\neq 0)$ 及其代数式 的证法	146

3. 欲证结论:在 (a, b) 内至少 $\exists \xi, \eta$, $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	151
---	-----

习题五(2)	151
--------------	-----

第六章 常微分方程 153

一、基本概念 153

1. 微分方程	153
2. 微分方程的阶	153
3. 微分方程的解	153

二、一阶微分方程 154

1. 各类一阶方程解法一览表	154
2. 解题技巧及分析	155

三、可降阶的高阶方程 163

1. 可降阶的高阶方程解法一览表	163
2. 解题技巧及分析	163

四、高阶线性微分方程 164

1. 二阶线性微分方程解的结构	164
2. 二阶常系数线性微分方程	166
3. n 阶常系数线性方程	167
4. 欧拉方程	172

五、微分方程的应用 173

1. 在几何中的应用	173
2. 在力学中的应用	175

习题六	176
-----------	-----

第七章 一元微积分的应用 179

一、导数的应用 179

1. 利用导数判别函数的单调增减性	179
2. 利用导数研究函数的极值与最值	180
3. 关于方程根的研究	186
4. 函数作图	190

二、定积分的应用 193

1. 微元法及其应用	193
2. 平面图形的面积	195
3. 立体体积	197
4. 平面曲线的弧长	198
5. 旋转体的侧面积	199
6. 变力做功、引力、液体的静压力	199

习题七	201
-----------	-----

第八章* 无穷级数 204

一、基本概念及其性质 204

二、数项级数判别法 205

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 敛散性 的判别法	205
--	-----

2. 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 的判别法	210
--	-----

3. 任意项级数	211
----------------	-----

4. 杂例	213
-------------	-----

三、幂级数 217

1. 函数项级数的概念	217
2. 幂级数	219

四、无穷级数求和 225

1. 幂级数求和函数	225
------------------	-----

2. 数项级数求和	229
五、傅立叶级数	234
1. 概念、定理	234
2. 周期与非周期函数的傅立叶级数	236
习题八	240

第九章* 矢量代数与空间解析几何

.....	243
一、矢量的概念及其性质	243
1. 概念及其运算	243
2. 矢量之间的关系	244
二、平面与直线	248
三、投影方程	253
四、曲面方程	254
柱面与旋转面方程	254
习题九	258

第十章 多元函数微分学

一、基本概念及定理与公式	260
1. 二元函数的定义	260
2. 二元函数的极限及连续性	261
3. 偏导数、全导数及全微分	262
4. 基本定理	263
二、多元函数微分法	265
1. 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的 微分法	265
2. 复合函数微分法	266
3. 隐函数微分法	269
三、多元函数微分学在几何上的应用	272

1. 空间曲线在某点处的切线和法 平面方程	272
2. 空间曲面在其上某点处的切平 面和法线方程	273
四、多元函数的极值	275
1. 概念、定理与公式	275
2. 条件极值与无条件极值	275
习题十	281

第十一章 重积分

一、概念·性质·公式	283
1. 概念	283
2. 性质	283

3. 公式	285
二、二重积分的解题技巧	287

1. $\iint_D f(x,y) d\sigma$ 的解题程序	287
2. 极坐标系中积分限的确定	288
3. 典型例题分析	289
三、二重积分的证题技巧	296
1. 有关等式的证明	296
2. 二重积分不等式的证明	299
四*、三重积分的计算	301

1. $\iiint_V f(x,y,z) dv$ 的解题程序	301
2. 坐标系的选择	301
3. 球面坐标系中积分限的确定	302
4. 更换积分次序	303
5. 三重积分计算	303
习题十一	305

第十二章* 曲线、曲面积分及 场论初步

一、曲线积分的概念及性质	310
1. 对弧长的曲线积分	310
2. 对坐标的曲线积分	310
3. 两种曲线积分之间的关系	311
二、曲线积分的理论及计算方法	311
1. 基本定理	311
2. 对弧长的曲线积分的计算方法	312
3. 对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y) dx +$ $Q(x,y) dy$ 的计算法	313

三、曲面积分的概念与性质	319
1. 对面积的曲面积分	319
2. 对坐标的曲面积分	319
3. 两种曲面积分之间的关系	320
四、曲面积分的理论与计算方法	320
1. 基本定理	320
2. 对面积的曲面积分的计算法	321
3. 对坐标的曲面积分的计算法	322

五、曲面面积的计算法	327
------------------	-----

六、场论初步	328
1. 概念与公式	328
2. 例题选讲	330

习题十二	332
------------	-----

第十三章 函数方程与不等式证明

.....	334
一、 函数方程	334
1. 利用函数表示法与用何字母表示 无关的“特性”求解方程	334
2. 利用极限求解函数方程	335
3. 利用导数的定义求解方程	336
4. 利用变上限积分的可导性求解方程	336
5. 利用连续函数的可积性及原函数的 连续性求解	337
6. 利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	338
二、 不等式的证明	341
1. 引入参数法	341
2. 利用微分中值定理	342
3. 利用函数的单调增减性(重点)	344
4. 利用函数的极值与最值	345
5. 利用函数图形的凹凸性	347
6. 利用泰勒展开式	347
7. 杂例	349
习题十三	350

第二篇 线性代数

第一章 行列式

一、 行列式的概念	353
1. 排列与逆序	353
2. n 阶行列式的定义	354
二、 性质、定理与公式	355
1. 行列式的基本性质	355
2. 行列式按行(列)展开定理	358
3. 重要公式与结论	358
三、 典型题型分析	359
题型 I 抽象行列式的计算	359
题型 II 低阶行列式的计算	360
题型 III n 阶行列式的计算	361
四、 杂例	367
习题一	368

第二章 矩阵

一、 矩阵的概念与运算	371
1. 矩阵的概念	371
2. 矩阵的运算	371
二、 逆 矩 阵	374

1. 逆矩阵的概念	374
2. 利用伴随矩阵求逆矩阵	374
3. 矩阵的初等变换与求逆	375
4. 分块矩阵及其求逆	376
5. 矩阵的秩及其求法	377

三、 典型题型分析

题型 I 求逆矩阵	377
题型 II 求矩阵的高次幂 A^m	379
题型 III 有关初等矩阵的命题	381
题型 IV 解矩阵方程	382
题型 V 求矩阵的秩	384
题型 VI 关于矩阵对称、反对称命题 的证明	385
题型 VII 关于方阵 A 可逆的证明	386
题型 VIII 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的 命题的证明	387
题型 IX 关于矩阵秩的命题的证明	388
习题二	390

第三章 向量

一、 基本概念	395
1. 向量的概念与运算	395
2. 向量间的线性关系	395
3. 向量组的秩和矩阵的秩	396
4. 向量空间*	397
二、 重要定理与公式	398
三、 典型题型分析	399
题型 I 讨论向量组的线性相关性	399
题型 II 有关向量组线性相关性命题 的证明	402
题型 III 判定一个向量是否可由一组 向量线性表示	408
题型 IV 有关向量组线性表示命题的 证明	409
题型 V 求向量组的极大线性无关组	411
题型 VI 有关向量组或矩阵秩的计算 与证明	413
题型 VII 与向量空间有关的命题*	417
习题三	419

第四章 线性方程组

一、 概念、性质、定理	422
1. 克莱姆法则	422

2. 线性方程组的基本概念	422
3. 线性方程组解的判定	423
4. 非齐次组 $Ax=b$ 与齐次组 $Ax=0$ 解的关系	423
5. 线性方程组解的性质	424
6. 线性方程组解的结构	424

二、典型题型分析

题型 I 基本概念题(解的判定、性质、 结构)	425
题型 II 含有参数的线性方程组解 的讨论	428
题型 III 讨论两个方程组的公共解	433
题型 IV 有关基础解系的证明	435
题型 V 综合题	436

习题四

第五章 特征值和特征向量

一、概念与性质

1. 矩阵的特征值和特征向量的概念	444
2. 特征值与特征向量的计算方法	444
3. 相似矩阵及其性质	445
4. 矩阵可相似对角化的充要条件	445
5. 对称矩阵及其性质	445

二、重要公式与结论

三、典型题型分析

题型 I 求数值矩阵的特征值与特 征向量	447
题型 II 求抽象矩阵的特征值、特征向量	448
题型 III 特征值、特征向量的逆问题	449
题型 IV 相似的判定及其逆问题	451
题型 V 判断 A 是否可对角化	452
题型 VI 综合应用问题	455
题型 VII 有关特征值、特征向量的证明题	460

习题五

第六章* 二次型

一、基本概念与定理

1. 二次型及其矩阵表示	465
2. 化二次型为标准型	465
3. 用正交变换法化二次型为标准形	466
4. 二次型和矩阵的正定性及其判别法	466

二、典型题型分析

题型 I 二次型所对应的矩阵及其性质	469
--------------------------	-----

题型 II 化二次型为标准形	470
----------------------	-----

题型 III 已知二次型通过正交变换化 为标准形,反求参数	473
--	-----

题型 IV 有关二次型及其矩阵正定性 的判定与证明	474
------------------------------------	-----

习题六

第三篇* 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

一、基本概念、性质与公式

1. 随机试验和随机事件	479
2. 事件的关系及其运算	479
3. 事件的概率及其性质	481
4. 条件概率与事件的独立性	482
5. 重要概型	483
6. 重要公式	484

二、典型题型分析

题型 I 古典概型与几何概型	485
题型 II 事件的关系和概率性质的命题	488
题型 III 条件概率与积事件概率的计算	490
题型 IV 全概率公式与 Bayes 公式 的命题	491
题型 V 有关 Bernoulli 概型的命题	494

习题一

第二章 随机变量及其分布

一、基本概念、性质与公式

1. 概念与公式一览表	499
2. 重要的一维分布	502
3. 重要的二维分布	503

二、典型题型分析

题型 I 一维随机变量及其分布的概念、 性质的命题	504
题型 II 求一维随机变量的分布律、概率 密度或分布函数	508
题型 III 求一维随机变量函数的分布	511
题型 IV 二维随机变量及其分布的概念、 性质的考查	514
题型 V 求二维随机变量的各种分布与随 机变量独立性的讨论	516
题型 VI 求两个随机变量的简单函数的 分布	523

习题二

第三章 随机变量的数字特征 534

一、基本概念、性质与公式 534

1. 一维随机变量的数字特征 534
2. 二维随机变量的数字特征 536
3. 几种重要的数学期望与方差 537
4. 重要公式与结论 538

二、典型题型分析 538

- 题型 I 求一维随机变量的数字特征 538
- 题型 II 求一维随机变量函数的数学期望 542
- 题型 III 求二维随机变量及其函数的数字特征 545
- 题型 IV 有关数字特征的证明题 555
- 题型 V 应用题 556

习题三 558

第四章 大数定律和中心极限定理

..... 562

一、基本概念与定理 562

1. 切比雪夫不等式 562
2. 中心极限定理 562
3. 重要公式与结论 563
4. 注意 563

二、典型题型分析 563

- 题型 I 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题 563
- 题型 II 有关中心极限定理的命题 565

习题四 568

第五章 数理统计的基本概念 569

一、基本概念、性质与公式 569

1. 几个基本概念 569
2. 三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布 570

3. 正态总体下常用统计量的性质 570

4. 重要公式与结论 571

二、典型题型分析 572

- 题型 I 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量 572
- 题型 II 求统计量的分布 573

习题五 575

第六章 参数估计 577

一、基本概念、性质与公式 577

1. 矩估计与极大似然估计 577
2. 估计量的评选标准 578
3. 区间估计 579
4. 重要公式与结论 580

二、典型题型分析 581

- 题型 I 求矩估计和极大似然估计 581
- 题型 II 评价估计的优劣 585
- 题型 III 区间估计或置信区间的命题 586

习题六 589

第七章 假设检验 591

一、基本概念与公式 591

1. 显著性检验的基本思想 591
2. 假设检验的基本步骤 591
3. 两类错误 591
4. 正态总体未知参数的假设检验 592
5. 假设检验与区间估计的联系 592

二、典型题型分析 593

- 题型 I 正态总体的均值和方差的假设检验 593
- 题型 II 有关两类错误的命题 594

习题七 595

注:带*篇、章,数二考生不作要求。

篇前篇 高数解题的四种思维定式

先赠送给大家四句话,相信在考研中能起到关键作用,请考生务必牢记.

第一句话:在题设条件中若函数 $f(x)$ 二阶或二阶以上可导,“不管三七二十一”,把 $f(x)$ 在指定点展成泰勒公式再说.

【例1】设 C 为实数,函数 $f(x)$ 满足下列两个等式:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'''(x) = 0.$$

$$\text{求证: } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

【证】由泰勒公式有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \quad x < \xi_1 < x+1, \quad (1)$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \quad x-1 < \xi_2 < x. \quad (2)$$

$$\text{由 } (1) + (2) \text{ 得, } f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1). \quad (3)$$

$$\text{由 } (1) - (2) \text{ 得, } 2f'(x) = f(x+1) - f(x-1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2). \quad (4)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi_1 \rightarrow \infty, \xi_2 \rightarrow \infty$, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 2C - 2C + \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2f'(x) = C - C - \frac{1}{6} \times 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0.$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0.$$

【例2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶导数连续, $f(0) = f(1) = 0$, 并且当 $x \in (0,1)$ 时, $|f''(x)| \leq$

$$A. \text{ 求证: } |f'(x)| \leq \frac{A}{2}, x \in [0,1].$$

【证】由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数, 则 $f(x)$ 可展成一阶泰勒公式, 即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x_0 \text{ 之间.}$$

取 $x = 0, x_0 = x$, 则

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1) \frac{(0 - x)^2}{2!}, \quad 0 < \xi_1 < x \leq 1; \quad (1)$$

取 $x = 1, x_0 = x$, 则

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1 - x) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2) \frac{(1 - x)^2}{2!}, \quad 0 \leq x < \xi_2 < 1. \quad (2)$$

② - ① 得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$\frac{f(0) - f(1) = 0}{2!}[f''(\xi_1)x^2 - f''(\xi_2)(1-x)^2].$$

又 $|f''(x)| \leq A, x \in (0, 1)$, 则

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2}[x^2 + (1-x)^2] = \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1).$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $2x^2 - 2x + 1 \leq 1$. 故 $|f'(x)| \leq \frac{A}{2}$.

【例3】试证:若偶函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,且 $f(0) = 1$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right] \text{ 绝对收敛.}$$

【证】因 $f(x)$ 为偶函数,故 $f'(x)$ 为奇函数, $f'(0) = 0$. 又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{故 } u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{f''(0)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\text{从而 } |u_n| = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \sim \frac{|f''(0)|}{2n^2}.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f''(0)|}{2n^2}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

【例4】设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f''(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 函数 u 在区间 $[0, a] (a > 0)$ 上连续. 证明:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【证】令 $x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt$, 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展成一阶泰勒公式:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

令 $x = u(t)$, 则 $f[u(t)] \geq f(x_0) + f'(x_0)[u(t) - x_0]$.

上式两边在 $[0, a]$ 上对 t 积分,得

$$\begin{aligned} \int_0^a f[u(t)] dt &\geq \int_0^a f(x_0) dt + \int_0^a f'(x_0)[u(t) - x_0] dt \\ &= af(x_0) + f'(x_0) \left[\int_0^a u(t) dt - ax_0 \right] = af(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{故 } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)] dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right].$$

【另证】因 $f''(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 为凸函数. 因此, 具有性质:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad (\text{其中 } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1).$$

由 u 在 $[0, a]$ 上连续, 从而可积. 将 $[0, a]$ n 等分, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n} = \frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt.$$

由 f 的凸性及连续性, 有

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{u(\xi_i)}{a} \cdot \frac{a}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f[u(\xi_i)] = \sum_{i=1}^n \frac{f(u(\xi_i))}{a} \cdot \frac{a}{n}.$$

对上式两边令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 由可积性可得

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) dt\right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) dt.$$

第二句话: 在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时, 则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

【例5】设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $f(0) = f(\frac{1}{2})$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$.

证明: 存在一个 $\xi \in (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【证】 $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \xrightarrow{\text{积分中值定理}} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$, $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$.

于是 $f(x)$ 在 $[\eta, 2]$ 上满足洛尔定理, 即存在一个 $\xi_1 \in (\eta, 2)$, 使 $f'(\xi_1) = 0$. ①

又 $f(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上满足洛尔定理, 于是存在一个 $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$, 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad \text{②}$$

由 ①, ② 可知 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_1]$ 上使用洛尔定理, 于是 $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例6】设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是非负、单调递减的连续函数, 且 $0 < a < b < 1$. 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【证】由积分中值定理

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{故 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

【另证】 $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

令 $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$, 则

$$f'(x) = bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x).$$

$$= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0).$$

所以 $F(x)$ 单调递增. 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(a) > F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx > 0,$$

$$\text{亦即 } \int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$ 或 $f(a) = f(b) = 0$, 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

$$\text{或 } f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

$$\text{若 } f(a) = f(b) = 0, \text{ 则 } \begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$$

【例7】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【证】 $f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$, 则

$$|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$$

$$\text{同理 } |f(x)| \leq (b-x)M.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

$$\text{即 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

【例8】已知在 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, 且 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

【证】设 $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$, 则 $f'(c) = 0$. (费尔马定理)

对 $f'(x)$ 在 $[0, c]$ 与 $[c, a]$ 内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

$$\text{于是 } |f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$$

$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

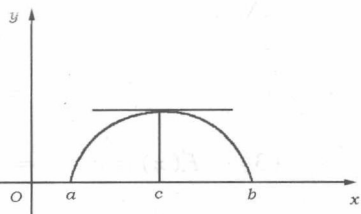
$$\text{故 } |f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$$

【例9】设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的 $f''(x)$, 且 $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$,

则在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

【证】由 $f''(x) < 0$ 可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹函数(图形上凸); 由凹函数性质知, $f(x)$ 大于连接 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为 $y = 0$ (x 轴), 所以在 (a, b) 上 $f(x) > 0$. 再由 $f''(x) < 0$ 知, $f'(x)$ 是严格单调减少的, 从而知 $f(x)$ 在 (a, b) 内有唯一的极大值点, 记为 $x = c$. 此时 $f'(c) = 0$, 如右图所示, 而在 (a, c) 上, $f'(x) > 0$, 在 (c, b) 上 $f'(x) < 0$.



由拉格朗日中值定理, 当 $x \in [a, c]$ 时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由 $f'(x)$ 严格递减, $f'(\xi_1) < f'_+(a)$, 注意到 $f(a) = 0$, 有 $f(x) < f'_+(a)(c-a)$, $x \in [a, c]$.

当 $x \in [c, b]$ 时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), \quad x \in [c, b].$$

$$\text{于是 } \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, \quad x \in [a, c],$$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))}, \quad x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &= - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ &> \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)(-f'_-(b))} dx \\ &= \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)(-f'_-(b))} [f'(c) - f'_-(b)] \\ &= \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} > (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话: 对定限或变限积分, 若被积函数或其主要部分为复合函数, 则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式 $f(u)$ 再说.

【例 10】求下列函数的导数(设 $f(u)$ 是 u 的连续函数):

$$(1) \quad F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{ 求 } F'(y); \quad (2) \quad F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt, \text{ 求 } F'(x);$$

$$(3) \quad F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{ 求 } F'(x); \quad (4) \quad F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt, \text{ 求 } F'(x).$$

【解】(1) $F(y) \xrightarrow{\text{令 } u = x-y} \int_{-y}^0 f(u) du$, 则 $F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y)$.

$$(2) \quad F(x) \xrightarrow{\text{令 } u = x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u)f(u)(-du)$$

$$= -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} u f(u) du,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } F'(x) &= - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ &\quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ &= \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) \quad F(x) \stackrel{\text{令 } u = te^x}{=} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \quad \int_0^{x^2} f(x+t) dt \stackrel{\text{令 } u = x+t}{=} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{ 于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du,$$

$$\text{则 } F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2)(1+2x) - f(x)].$$

【例 11】设 $f(x)$ 可微, 且满足 $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{【解】 } \int_0^x t f(t-x) dt \stackrel{\text{令 } u = t-x}{=} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = - \int_0^{-x} u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$$

$$\text{于是原方程变为 } x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导, 得 } 1 = f(x) - (-x)f(-x)(-1) - \int_0^{-x} f(u) du - xf(-x)(-1).$$

$$\text{整理, 得 } 1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$$

$$\text{两边再对 } x \text{ 求导, 得 } 0 = f'(x) - f(-x)(-1),$$

$$\text{即 } f'(x) = -f(-x), \quad \text{①}$$

$$\text{上式两边对 } x \text{ 求导, 得 } f''(x) = f'(-x), \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①, ② 得 } f''(x) = -f(x),$$

$$\text{即 } f''(x) + f(x) = 0,$$

$$\text{解此方程得 } f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$\text{注意到 } f(0) = 1, f'(0) = -1, \text{ 故 } f(x) = \cos x - \sin x.$$

【注】第四句话可推广为: 若给定的函数为抽象的复合函数, 则运算之前应先做变量替换, 使之成为简单的形式.

$$\text{例如: } f[\varphi(x)] \stackrel{\text{令 } u = \varphi(x)}{=} f(u).$$

【例 12】设 $f(x^2-1) = \ln \frac{x^2}{x^2-2}$, $f[\varphi(x)] = \ln x$, 计算 $\int \varphi(x) dx$.

$$\text{【解】 令 } x^2-1 = t, \text{ 则 } f(t) = \ln \frac{t+1}{t-1}, \quad f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1},$$

$$\text{故 } \int \varphi(x) dx = \int \frac{x+1}{x-1} dx = x + 2 \ln |x-1| + C.$$

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

一、函数

1. 函数的定义

设有两个变量 x 和 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作

$$y = f(x)$$

x ——自变量, y ——因变量, 变域 D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素:

- ① 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围 (若函数是解析式子表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).
- ② 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值, 求 y 值的方法.

解题提示

当且仅当给定的两个函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

【例 1.1】与连续函数 $f(x) = \ln x + \int_1^x f(x) dx - f'(1)$ 等价的函数是

- (A) $e^{\ln(\ln x)}$.
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} (x > 0)$.
- (C) $\frac{1}{x}$ 的经过点 $(-1, 0)$ 的原函数.
- (D) 方程 $xyy' = \ln x$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【解】设 $A = \int_1^e f(x) dx$, $B = f'(1)$, 所以, $f(x) = \ln x + A - B$, 有

$$A = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x + A - B) dx = 1 + (A - B)(e - 1),$$

$$B = f'(1) = (\ln x + A - B)'_{|x=1} = 1, \text{ 得 } A = 1, \text{ 所以, } f(x) = \ln x.$$

对于 (A), $e^{\ln(\ln x)} = \ln x (x > 1)$, 与 $f(x)$ 的定义域不同.

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{n} \cdot k} = \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &= \ln x (x > 0), \quad \text{与 } f(x) \text{ 等价.} \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \quad \frac{1}{x} \text{ 的经过点 } (-1, 0) \text{ 的原函数为 } \ln(-x).$$