21世纪高等学校规划教材

刘宪高 主编

高等数学（少学时）

Gaodeng Shuxue

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

高等数学

(少学时)

主　编　刘宪高
副主编　丁　勇
参　编　刘明鼎　张艳敏
　　　　朱素婷　王芬玲

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本文是在作者多年教学的基础上编写而成的，全书共7章，主要包括极限与函数的连续性、微分学、积分学及应用、无穷级数、常微分方程及应用、多元函数的微分学和多元函数的积分学.

本书讲述严谨，由浅入深，全书以极限思想阐述了高等数学的基础内容，从概念到推理以及应用，体现数学思想的发展过程.

本书可作为高等院校非数学专业学生及教师用书，也可作为自学者参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：少学时/刘宪高主编. -- 北京：北京邮电大学出版社，2010.9

ISBN 978-7-5635-2328-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 147716 号

书　　名	高等数学(少学时)
主　　编	刘宪高
责任编辑	付小霞
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京忠信诚胶印厂
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	11.5
字　　数	228 千字
版　　次	2010 年 9 月第 1 版　2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2328-3　　定价：24.00 元

如有质量问题请与发行部联系

版权所有　侵权必究

序　言

微积分是人类思想的结晶，它的发明标志着近代数学的开始. 微积分的思想可以追溯到古代希腊、中国和印度人的著作. 在牛顿(Isaac Newton，1643～1727，英国人)和莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz，1646～1716，德国人)真正创立微积分之前，经历了近一个世纪的知识积累. 在这个阶段，对微积分有直接贡献的先驱者包括：

(1)开普勒(Johannes Kepler，1571～1630，奥地利人). 他在 1609 年出版的《新天地学》中，宣布了著名的行星运动三大定律，奠定了他在天文学中的永久地位. 在数学方面，1615 年他发表了《测量酒桶的新立体几何》，阐述了求圆锥曲线绕其所在平面上某一条直线旋转而成的立体体积的积分法.

(2)卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri，1598～1647，意大利人). 他的著作《用新方法促进连续不可分量的几何学》中，模糊的不可分量概念，对 Newton 的"流数"和 Leibniz 的"微分"也不无启发.

(3)费马(Pierre de Fermat，1601～1665，法国人). 他的求极大和极小值方法几乎相当于现代的微积分的方法.

(4)沃利斯(John Wallis，1616～1707，英格兰人). 1649 年他成为牛律大学 Savilliam 几何教授，他是英国皇家学会的奠基人之一. 他在《无穷算术》一书中，计算半圆的面积，给出公式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times 2\times 4\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)\times(2n+2)\times\cdots}{1\times 3\times 3\times 5\times 5\times\cdots\times(2n+1)\times(2n+1)\times\cdots}.$$

用现代的语言来表述，他给出如下的积分：

$$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

沃利斯的工作对牛顿的影响颇深. 牛顿写道："About the beginning of my mathematical studies，as soon as the works of our celebrated countryman，Dr. Wallis，fell into my hands，by Considering the Series，by the intercalation of which，he exhibits the Area of Circle and the Hyperbola…".

牛顿 1661 年进入剑桥大学三一学院，受教于巴罗教授(Isaac Brrow，1630 ～ 1677，英国人). 牛顿的第一部关于微积分的著作《流数术》完成于 1671 年，但直到 1736 年才出版. 这一结果导致了牛顿和莱布尼茨共享微积分创始人的称号.

莱布尼茨1661年15岁时进入莱比锡大学学习哲学、数学.1667年2月获阿尔斯多夫大学法律学博士学位.1672年至1676年,莱布尼茨作为外交使节留居巴黎.在这期间,莱布尼茨在惠更斯的影响下开始研究数学、物理.正是在这一时期形成了莱布尼茨的微积分方法.1675年11月21日,在他的手稿中,第一次用了$\int f(x)\mathrm{d}x$的符号,并给出乘积的微分法则.1676年秋天,莱布尼茨发现了微分公式$\mathrm{d}(x^n)=nx^{n-1}\mathrm{d}x$.所有这些奠定了莱布尼茨微积分创始人的地位.

微积分使数学从常量数学进入了变量数学.然而牛顿-莱布尼茨的微积分本身也有不严密的地方,特别是在使用"无穷小"概念上的混乱.举例来说,牛顿称变量为"流量",流量的微小改变量为"瞬",变量的变化率为"流数".牛顿的"流数"相当于现代的"导数".以x^4为例,设流量x有一个改变量"瞬",牛顿记之为"o".于是x^4通过流动变为$(x+o)^4$,那么

$$\frac{(x+o)^4-x^4}{o}=\frac{4x^3o+6x^2o^2+4xo^3+o^4}{o}=4x^3+6x^2o+4xo^2+o^3.$$

再舍弃含o的乘积项,得到x^4的流数为$4x^3$.牛顿先认为"o"是非零增量,再认为与之相乘的结果可以算作0,这是矛盾的,从而引起人们的怀疑和批评.最强烈的抨击来自英国牧师、哲学家贝克莱(George Berkeley,1685～1753).贝克莱1734年成为克罗因地方主教,同年发表著名的小册子《分析学家》,"我所非议的不是您的结论,而是您的逻辑和方法.您是怎样进行证明的?您所熟悉的对象是什么?您的表述是否清楚?您依据的原理是什么?它们是否可靠?您是如何应用它们的?"这些切中要害的批评,激发了后来的数学家们,经过近200年的努力创建了现代的分析数学.第一个认识到导数是一种极限的数学家是达朗贝尔(Jean Le Rond d'Alembert,1717～1783,法国人).第一个开始分析严格化的数学家是波尔察诺(Bernard Bolzano,1781～1848,捷克人),1817年他出版的《纯分析的证明》对极限、收敛、导数提出了合适的定义,并对完善实数本身有所建树.

柯西(Augustin Louis Cauchy,1787～1857,法国人)是对严格化分析真正有影响的数学家.他对极限,连续性、导数、微分、收敛性等给出了精确的定义.他的工作成为现代分析的经典.然而柯西的极限概念是描述性的,依赖于几何直观.第一个将极限的概念算术化的数学家是魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass,1815～1897,德国人).现今被普遍采用的关于极限的"$\varepsilon-\delta$"表述,就是出自于他.

魏尔斯特拉斯最先认识到柯西的极限与实数概念的循环定义.但他的工作从未发表.其后,戴德金(Julius W. R. Dedekind,1831～1916,德国人)、康托尔(Georg F. L. P. Cantor,1845～1918,德国人)等人各自独立给出了实数的定义,从而真正完善了分析的基础.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　极　限

1.1　实　数

数是数学研究的基本对象. 数学分析的严格的理论都是建立在对于实数的理解之上的. 但是要给实数以严格的数学定义已经超出了本书的范围,我们将给出一些描述的定义和性质.

1. 实数和实轴

几何上,实数和数轴可以建立 1－1 对应的关系(如图 1 - 1 所示):每个实数对应于数轴上的一个点;反之,数轴上的一个点对应于一个实数. 常用 **R** 表示实数集合或实轴.

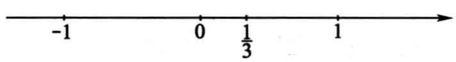

图 1 - 1

2. 实数的性质

实数的性质主要表现在以下三个方面:实数的代数性、有序性和完备性.

代数性:实数可以进行加、减、乘、除(除数不为 0),所得到的结果仍为实数.

有序性:如果 a,b 和 c 都是实数,则具有下述有序性质:

(1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$;

(2) $a < b \Rightarrow a - c < b - c$;

(3) $a < b$ 且 $c > 0 \Rightarrow ac < bc$;

(4) $a < b$ 且 $c < 0 \Rightarrow bc < ac$;

特别 $a<b\Rightarrow -b>-a$;

(5) $a>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}>0$;

(6) 如果 a,b 同号,且 $a<b\Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$.

完备性:实轴上没有“洞”或“缺口”.

3. 实数的子集

实数有下述重要的子集:

(1) 自然数 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

(2) 整数 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$;

(3) 有理数 $\mathbf{Q}=\{r:r=\dfrac{p}{q},p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0\}$;

(4) 无理数:无限不循环的小数.

命题 1.1 不存在一个有理数它的平方是 2.

证明 如果有理数 $\dfrac{p}{q}$ 的平方为 2,即 $\dfrac{p^2}{q^2}=2$,这里 p,q 没有大于 1 的公因子,则 $p^2=2q^2$,这说明 p 为偶数.设 $p=2m,m\in\mathbf{N}$.则 $4m^2=2q^2$,即 $q^2=2m^2$.因而 q 是偶数,设 $q=2n$,则 p 与 q 有公因子 2.矛盾.

命题 1.2 有理数具有稠密性:任何两个有理数之间存在有理数.

证明 设 $\dfrac{p_1}{q_1}$, $\dfrac{p_2}{q_2}$ 是两个有理数,其中 $p_i,q_i,i=1,2$ 为整数,且 $\dfrac{p_1}{q_1}<\dfrac{p_2}{q_2}$,则 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p_1}{q_1}+\dfrac{p_2}{q_2}\right)$是位于它们之间的有理数.

命题 1.3 设 $a<b$ 是两个有理数,则存在一个无理数 α,使得 $a<\alpha<b$.

证明 由于$\sqrt{2}>1,a<b$,则由有序性,$(\sqrt{2}-1)a<(\sqrt{2}-1)b$,即

$$\sqrt{2}a<(\sqrt{2}-1)b+a<\sqrt{2}b.$$

令

$$\alpha=\frac{(\sqrt{2}-1)b+a}{\sqrt{2}}=\frac{2b+\sqrt{2}(a-b)}{2}=b+\sqrt{2}\,\frac{a-b}{2},$$

则 α 是无理数,且 $a<\alpha<b$.

命题 1.2 和命题 1.3 说明:有理数是“很多”的,但也有“洞”,我们已经看到,说明一个数是无理数是很困难的,但其实无理数比有理数多得多.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

4. 区间

定义 具有下述性质的实轴上的子集称为区间：如果 a，b 是这个子集中的元素，则所有位于这两点之间的数都是这个子集的元素.

从几何上看，区间是实轴上的射线或线段，分别称为无限区间或者有限区间.

一个区间如果包含它的两个端点，则称为闭区间.

如果一个区间包含它的一个端点而不包含另一个，则称半开区间. 如果不包含端点，则称为开区间.

端点也称为边界点，术语"x_0 的一个区间"是指 x_0 是这个区间的点.

有限区间：(a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$.

无限区间：(a,∞)，$[a,\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,\infty)$.

5. 绝对值

$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 称为 x 的绝对值. 它具有下述性质：

(1) $|-a| = |a|$；

(2) $|ab| = |a||b|$；

(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$；

(4) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ （三角不等式）.

区间和绝对值：

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

反三角不等式：

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|.$$

对于任何两个实数 x 和 y，定义 x 与 y 之间的距离：$d(x,y) = |x-y|$. 则有如下命题.

命题 1.4 对任何数 x，y 和 z，

$$|x-y| = |y-x|,$$

$$|x-y| \geqslant 0 \text{ 且 } |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|.$$

证明 前两条性质由绝对值的定义可得. 后一条性质由三角不等式可得.

数学归纳法原理

对每个自然数 n，设 $S(n)$ 是某个数学论断. 假设 $S(1)$ 是真. 如果当 $S(k)$ 是真时，$S(k+1)$ 也真. 则 $S(n)$ 对每个自然数成立.

Bernoulli 不等式

对每个自然数 n 和每个数 $a \geqslant -1$，则有

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

证明 我们将用数学归纳法证明这个不等式. 设 $S(n)$ 是上述不等式. $n=1$ 时，$(1+a)^1=1+a$，即 $S(1)$ 真. 假设 $S(k)$ 真，即 $(1+a)^k \geqslant 1+ka$，我们需要证明 $S(k+1)$ 也真. 由于 $1+a \geqslant 0$ 且 $S(k)$ 真，所以有

$$(1+a)^{k+1}=(1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a).$$

由于

$$(1+ka)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2 \geqslant 1+(k+1)a,$$

我们看到 $S(k+1)$ 也真. 由数学归纳法原理，$S(n)$ 对所有的 n 成立.

几何平均值－算术平均值不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

证明 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，则对应的等式成立. 因此不访设

$$a_1<a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n,$$

则

$$a_1<A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<a_n \quad (n=2,3,\cdots)$$

且有

$$0<(A_n-a_1)(a_n-A_n)=A_n(a_1+a_n-A_n)-a_1a_n,$$

即

$$a_1a_n<A_n(a_1+a_n-A_n), \quad n=2,3,\cdots.$$

$n=2$ 时，$\sqrt{a_1a_2} \leqslant \dfrac{a_1+a_2}{2}$ 成立. 设 $n=k \geqslant 2$ 时，所设不等式成立. 那么，$n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{a_2+a_3+\cdots+a_k+(a_1+a_{k+1}-A_{k+1})}{k} \\ &\geqslant \sqrt[k]{a_2a_3\cdots a_k(a_1+a_{k+1}-A_{k+1})}, \end{aligned}$$

即

$$A_{k+1}^k \geqslant a_2a_3\cdots a_k(a_1+a_{k+1}-A_{k+1}),$$

从而

$$\begin{aligned}A_{k+1}^{k+1} &\geqslant a_2 a_3 \cdots a_k A_{k+1}(a_1 + a_{k+1} - A_{k+1}) \\ &\geqslant a_1 a_2 a_3 \cdots a_k a_{k+1}.\end{aligned}$$

下面的代数恒等式将是非常有用的.

设 a 和 b 是实数,n 为自然数,则

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

事实上,检查右端的乘积便可证明这一点:

$$\begin{aligned}&(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &\quad = a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \cdots - ab^{n-1} - b^n \\ &\quad = a^n - b^n.\end{aligned}$$

当 $a = 1, b = r$ 时,我们有下面的公式.

几何求和公式

对于任何自然数 n 和实数 $r \neq 1$,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

下面的公式也是很有用的,其证明留作练习.

二项式公式

对任何自然数 n 和实数对 a 和 b,

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} ab^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

最后我们介绍一个简约的求和记号.设 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是数,n 为自然数,定义

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

于是有

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k,$$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \neq 1,$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k.$$

练习 1.1

1. 设 a 是正数,证明:如果 x 满足 $|x - a| < \frac{a}{2}$,则

$$x > \frac{a}{2}.$$

2. 设 $|a-b|\leqslant 1$,证明:$|a|\leqslant|b|+1$.
3. 设 a,b,c 和 d 满足 $|c|\neq|d|$. 证明:
$$\left|\frac{a+b}{c+d}\right|\leqslant\frac{|a|+|b|}{||c|-|d||}.$$
4. 在 $a\geqslant 0$ 时,说明 Bernoulli 不等式是二项式公式的推论.
5. 设 $a\geqslant b\geqslant 0$,n 为自然数,证明:
$$a^n-b^n\geqslant nb^{n-1}(a-b).$$
6. 证明下面的 Cauchy 不等式:
$$ab\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$
用 Cauchy 不等式证明不等式
$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}(a+b).$$
7. 设 n 为自然数,$a_1,a_2,\cdots a_n$ 是整数. 证明:
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n,$$
且
$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})\geqslant n^2.$$
8. 用数学归纳法证明:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

9. 证明:$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

1.2 函　数

函数是以数学的方式描述现实世界的主要工具. 我们知道圆的面积完全由它的半径决定,即面积 $A=\pi r^2$,其中 r 是圆的半径. 它反映了这样一件事情:给定一个正数 r,有惟一的一个数 A 来表示圆的面积,即 A 是 r 的函数. Leonhard Euler(1707 ~ 1783) 是给出函数概念的第一位科学家. Euler 发明用下述符号描述"y 是 x 的函数":
$$y=f(x).$$

定义 2.1　设 $D\subset\mathbf{R}$ 是一个实数子集. 对于任何 $x\in D$,按照某种法则 f,有惟一的实数 $f(x)$ 与之对应:
$$f:D\rightarrow\mathbf{R},$$

则称按规则 f 确定一个从 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数，记为

$$y = f(x).$$

D 称为 $f(x)$ 的定义域，记为 $D(f)$.

集合

$$R(f) = \{y \in \mathbf{R} \mid \text{存在 } x \in D(f), \text{使 } f(x) = y\} = f(D)$$

称为 f 的值域.

$y = f(x)$ 定义一个函数时，它的定义域通常不是明显给出的. 我们都是假设使之有意义的最大的 x 的集合为 f 的定义域，这种定义域称为自然定义域. 当需要对定义域限制时，必须特别指出. 如：$y = \dfrac{1}{x-1}$，它的自然定义域是：$x \neq 1$，而"$y = \dfrac{1}{x-1}, x > -1$"的定义域是：$(-1,1) \cup (1,\infty)$.

1. 函数的四则运算

像数一样，函数也可以作四则运算：

对于 $x \in D(f) \cap D(g)$，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0).$$

函数与常数相乘：设 c 为实数，则

$$(cf)(x) = cf(x), \quad \forall x \in D(f).$$

例 1　已知 $f(x) = x^2 - 2x + 3$，则

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 - 2(x+h) + 3 - (x^2 - 2x + 3) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3 - (x^2 - 2x + 3) \\ &= (2x - 2 + h)h. \end{aligned}$$

当 $h \neq 0$ 时，

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x - 2 + h.$$

例 2　给定 $f(x) = \sqrt{x+4}$ 和 $g(x) = |x| + x$，则

(i) $(f+g)(x) = \sqrt{x+4} + |x| + x$，定义域$[-4,\infty)$；

(ii) $(f-g)(x) = \sqrt{x+4} - |x| - x$，定义域$[-4,\infty)$；

(iii) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+4}(|x| + x)$，定义域$[-4,\infty)$；

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}}{|x|-x}$,定义域$(0,\infty)$.

例 3 符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

它的定义域为$\mathbf{R}$,值域为$\{-1,0,1\}$.

使用符号函数,我们有

$$|x|=x\operatorname{sgn}(x).$$

2. 函数的图像

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数,其定义域为 $D(f)$,则称平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点集$\{(x,f(x))\mid x\in D(f)\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像.

例 4 描述下列函数的图像.

(1) $y=|x|,-2\leqslant x\leqslant 3$.

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{2x^2-9x+4}{x-4}, & x\neq 4,\\ 5, & x=4.\end{cases}$

(3) $\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$.

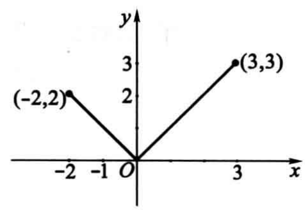

图 1-2

解 (1) 注意函数的定义域为$[-2,3]$,图像如图 1-2 所示.

(2) $y=\begin{cases}\dfrac{(x-4)(2x-1)}{x-4}, & x\neq 4,\\ 5, & x=4\end{cases}=\begin{cases}2x-1, & x\neq 4,\\ 5, & x=4,\end{cases}$ 如图 1-3 所示.

(3) 半圆,如图 1-4 所示.

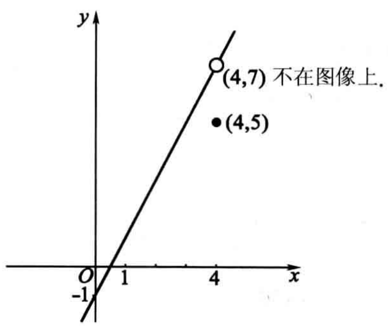

图 1-3

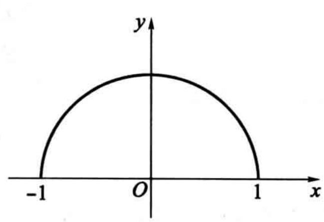

图 1-4

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com