高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

工程热力学与传热学实验原理与指导

Experimental Principles and Guidance of Engineering Thermodynamics & Heat Transfer

袁艳平　曹晓玲　孙亮亮◎主编

中国建筑工业出版社

高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材

工程热力学与传热学实验原理与指导

Experimental Principles and Guidance of Engineering Thermodynamics & Heat Transfer

袁艳平　曹晓玲　孙亮亮　主编

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程热力学与传热学实验原理与指导/袁艳平，曹晓玲，孙亮亮主编. —北京：中国建筑工业出版社，2013. 9
ISBN 978-7-112-15416-6

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①袁…②曹…③孙… Ⅲ. ①工程热力学-实验②工程传热学-实验 Ⅳ. ①TK123-33②TK124-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 091188 号

责任编辑：张文胜 姚荣华
责任设计：董建平
责任校对：王雪竹 赵 颖

高等学校建筑环境与能源应用工程专业规划教材
工程热力学与传热学实验原理与指导
袁艳平 曹晓玲 孙亮亮 主编
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
各地新华书店、建筑书店经销
霸州市顺浩图文科技发展有限公司制版
北京市密东印刷有限公司印刷
*
开本：787×1092 毫米 1/16 印张：8¼ 字数：200 千字
2013 年 8 月第一版 2013 年 8 月第一次印刷
定价：**20.00** 元
ISBN 978-7-112-15416-6
(23498)

前　　言

“工程热力学”和“传热学”不仅是建筑环境与能源应用工程专业的重要专业基础课，同时也是热能动力专业、车辆专业、机械专业和载运专业的专业基础课。工程热力学和传热学实验教学是培养学生观察和运用所学知识去分析解决实际问题的一个重要教学过程，它与课堂教学相辅相成，是理论教学的补充。通过本实验教学，培养学生分析测试系统和从事科学试验的初步能力。

本书分为工程热力学和传热学实验原理和实验指导两部分。实验原理部分包含了测量的基本知识，并介绍了工科实验及工程实践常用的几类测量仪表：压力测量、温度测量、流量（速）测量及湿度测量。实验指导部分包含 8 个基础实验。实验教学的目的是验证、巩固和补充课堂讲授的理论知识，通过实验，使学生初步掌握热能有效利用以及热能和其他能量转换规律的基本知识，以及热量传递的基本规律。使学生能正确运用热力学的基本原理进行热工和热力循环的分析：培养学生运用所学的理论解决实际问题的能力以及对实验结果进行综合分析并撰写实验报告的能力；通过实验，使学生能辨识热工设备、学会热工仪器仪表的使用方法。

本书内容全面、简明、实用，可作为高等院校建筑环境与能源应用工程专业和热能与动力工程专业实验教学用书，也可供建筑热能工程技术人员工作时参考。本书内容涵盖了建筑环境与能源应用工程专业和热能与动力工程专业工程的教学实验。

本书得到了西南交通大学教育教学改革研究项目的支持；在编写过程中得到了西南交通大学秦萍教授的热心指导及毕海权教授的大力协助，在此一并表示衷心感谢。由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请读者不吝赐教。

编者

2013 年 6 月于西南交通大学

序

为了适应社会经济发展和科技进步的需求，2012 年建筑环境与设备工程专业教学指导委员会对本专业进行调整，将建筑智能设施、建筑节能技术与工程两个专业纳入到建筑环境与设备工程专业。自此，建环专业范围扩展为建筑环境控制、城市燃气应用、建筑节能、建筑设施等领域，专业名称调整为“建筑环境与能源应用工程”，并于 2013 年开始以新专业名称进行招生。

在建筑环境与能源应用工程专业的知识体系中，工程热力学和传热学属于专业基础知识的范畴，而其对应的实验则为专业基础实验。工程热力学是研究能量转换与能量高效利用的学科。传热学是研究热量传递过程及其规律的学科。工程热力学和传热学都是与工程实践密切相关的学科，学生通过实验不仅可以加深对理论知识的理解，还可以提高其实际操作能力。

该书的编写组长期致力于工程热力学和传热学的教学与研究，所教授的工程热力学和传热学皆为四川省精品课程。此外，该书编写组还负责热能与动力工程、机械工程和车辆工程等专业的基础课程——热工基础的教学。该书内容区别于其他教材的一大特点是在满足建筑环境与能源应用工程专业实验教学的同时，还兼顾了相关专业的背景和特点，提高了该书对不同工业技术类专业的适用性。

该书可作为高等院校建筑环境与能源应用工程专业和热能与动力工程等相关专业的实验教学用书，希望本书的出版能对建筑环境与能源应用工程专业以及相关专业的人才培养有所裨益。

教育部高等学校能源动力类教学指导委员会主任

何雅玲

2013 年 6 月 18 日

目　　录

上篇　工程热力学与传热学实验原理

下篇　工程热力学与传热学实验指导

上　篇

工程热力学与传热学实验原理

第一章　绪　　论

第一节　测量的基本知识

一、测量的定义

测量是指人们借助专门的工具，通过实验的方法和对实验数据的分析计算，获得被测量的过程。被测量可以用下式表示：

$$X_0=\mu U \tag{1-1}$$

式中　X_0——被测量；

U——测量单位；

μ——被测量的真实数值，也简称为真值。

由于测量误差会不可避免地出现，所以在测量时应尽量使测量值接近于真实值。为了最大限度地减少误差，应当选择合适的测量方法，采用国家或国际公认的测量单位，使用足够精确的测量仪器；同时还应减少不必要的主观影响和环境影响带来的误差。

二、测量的方法

测量方法就是实现被测量与测量单位的比较，并给出比值的方法，一个物理量的测量，可以通过不同的方法实现。必须根据测量的要求及测量条件选择合理的测量方法。如果选择的测量方法不正确，即使仪器的精密度很高，也不能获得准确的结果。

按照获取测量结果的方式的不同，测量方法可分为直接测量法、间接测量法和组合测量法。

（1）直接测量法　即将被测量与标准量比较，能直接得到测量结果的方法。如用天平直接测量质量，用玻璃温度计直接测量介质温度等，此方法的优点是简单迅速，是应用最广泛的测量方法。

（2）间接测量法　对于不能直接得到测量结果的测量过程，利用被测量与某些量之间具有的某种确定函数关系，通过测量间接量从而得到被测量数值的方法，称之为间接测量法。例如，直接测量灯泡两端的电压和电流，通过计算得到电灯泡的功率。

（3）组合测量法　被测量需用多个未知参数表过时，可以通过改变测量条件进行多次测量，求解方程组来获得测量结果，此类方法称为组合测量法。例如，测量某电阻的温度系数，其电阻值与温度的关系为：$R_t=R_0(1+at+bt^2)$，式中，R_t是温度为t℃时电阻的数值，可以直接测得。要取得系数a和b，可以通过在不同温度t_1，t_2下直接测量相应的电阻值R_{t1}、R_{t2}，分别带入关系式，联立求解该二元一次方程组得到。

按测量工具方式分类，测量方法可以分为偏差测量法、零位测量法和微差测量法。

（1）偏差测量法　测量中用仪表指针位移表示被测量的方法称为偏差测量法。其特点是简单迅速，但精度不高，多用于工程测量。

(2) 零位测量法　测量中用准确已知的标准量具与被测量进行比较，调整量具并使它随时等于被测量，然后读出量具的量值，这就是零位测量法。其特点是比较费时，操作繁琐，反应比较慢。

(3) 微差测量法　测量中先用零位法将标准量与被测量进行比较，得到量值，再用偏差法测出余下的偏差值，被测量即为量值与偏差值的代数和。微差测量法结合了偏差测量法和零位测量法的优点，其操作简单，精度比较高，反应快，在实际工程中得到了广泛的应用。

此外，按被测量与测量探头是否接触，可分为接触测量法和非接触测量法；按被测量在测量过程中的状态，分为动态测量和静态测量；按测量仪器是否直接表示被测量的大小，分为绝对测量和相对测量。

第二节　测量的误差

在测量过程中，由于受到测量装置的限制、环境条件的影响、测量方法的不同和测量人员心理上、生理上等这些原因的作用，不可避免地会造成测量结果与被测真值之间的差异，称之为测量误差。测量误差反映了测量质量的好坏，误差值越小，说明测定值越接近于真值。根据测量误差的规律性，找出消除或减少误差的方法，科学地表达出测量结果，合理地设计测量系统，这就是测量误差分析的目的。

一、测量误差的表示方法

测量误差一般可用绝对误差和相对误差表示。

1. 绝对误差

绝对误差是指仪表的测量值与被测量的真实值之间的差值，即

$$\delta = x - x_0 \tag{1-2}$$

式中　δ——绝对误差；

x——测量值；

x_0——被测量的真实值。

在测量过程中测量误差的存在是不可避免的，任何测量值都只能近似反映被测量的真实值。也就是说，在实际的测量中，绝对准确的真实值是得不到的。因此，在常规的测量中，一般把比所用的测量仪表更准确的标准表的测量结果作为被测量的真实值。

2. 相对误差

相对误差是指仪表的绝对误差与被测量的真实值之比，用百分数表示，即

$$\text{相对误差} = \frac{x - x_0}{x} \times 100\% \tag{1-3}$$

对于大小不同的测量值，相对误差比绝对误差更能反映测量值的准确程度，相对误差越小，测量的准确性越高。

二、测量误差的分类

由于不同的测量误差性质，测量误差主要分为三大类：系统误差、随机误差和粗大误差。

1. 系统误差

在相同条件下，对一被测量进行多次等精度测量，若测量结果的误差大小和符号保持

不变或按照某一规律变化，这种误差称为系统误差。对于大小和符号始终保持不变的误差，称为恒值系统误差；当误差按照某一确定规律变化时，称为变值系统误差。产生系统误差的主要原因有：测量仪器设计原理及制作上的缺陷、实验方法的不完善、测量的环境条件的变化等，可通过对测量仪表进行校正或重新配置、改进测量方法、改善测量环境等进行消除。

2. 随机误差

随机误差是指在相同条件下，对同一被测量进行多次测量，测量结果有一定的分散性，即误差大小和符号的变化均无法预测的测量误差。随机误差体现了多次测量的精密度，随机误差小，则精密度高。一般随机误差不能通过修正或采取某种技术措施消除。从单个随机误差来看，其出现的符号和大小没有任何规律性，但是随着测量次数的增加，大量随机误差就表现出一定的分布规律，如正态分布规律。因此只有在测量条件不变的情况下，对测量数据进行统计处理，才能计算出随机误差。

随机误差主要来自：电磁场的微变，零件的摩擦、间隙，热起伏，空气扰动，气压及湿度的变化，测量人员的感觉器官的无规则变化而造成的读数不稳定等。

3. 粗大误差

测量结果与被测量值的真实值相比差别比较大，使该次测量失效的误差称为粗大误差。粗大误差主要来自于：测量方法不当或错误，测量操作疏忽和失误，测量条件的突然变化造成测量仪器示值的剧烈变化等。存在粗大误差的测量值，在处理时我们应该舍弃不用或剔除，以免其影响测量结果。粗大误差只能在一定程度上减弱，不好完全消除。

需要注意的是，除粗大误差较易判断和处理外，在大多数情况下，一次测量中系统误差和随机误差会同时存在，需根据其对测量结果的影响程度，作不同的具体处理：

（1）系统误差≫随机误差时，基本上可按纯粹系统误差来处理，也就是忽略随机误差。

（2）系统误差与随机误差相当或相差很小且两者均不能忽略时，应按不同的方法分别来处理，然后再估计其最终的综合影响。

（3）系统误差很小或已修正，基本上可按纯粹的随机误差来处理。

三、测量的准确度、精密度和正确度

1. 准确度

多次测量的平均值与真实值的相一致程度，称为准确度。它是建立在精密度和正确度的基础上，表示测量结果中系统误差和随机误差大小的程度。准确度是衡量测量质量好坏的重要标志之一，通常用相对误差来表示，误差小，则准确度高；误差大，则准确度低。

2. 精密度

精密度是指在相同条件下，对被测量值进行多次测量，测量值之间的重复性程度。它表征测定过程中随机误差的大小，随机误差越大，测量值越分散，精密度越低；随机误差越大，测量值越密集，则精密度越高。精密度通常以算数平均差、标准差和方差来量度。

3. 正确度

对同一被测量进行多次测量，测量值偏离被测量值真实值的程度。它表征测量过程中系统误差的大小，系统误差越小，正确度越高。

精密度与准确度是两个不同的概念，但又有一定程度上的联系，仪器的精密度好，其

准确度不一定高；如果要提高准确度，一定要求仪器的精密度好，因为系统误差并不影响仪器的精密度，但它会影响测量结果的准确度。

第三节　随机误差分析

在测量某零件的长度时，由于种种偶然因素的影响，存在随机误差，其长度的测量值是一个随机变量。一般人们只关心这个零件的平均长度及其测量结果的精密度，即平均值与离散度。又如，对一个射击手的射击技术的评定，除了根据他多次射击的平均命中环数评定之外，还要看他每次射击命中的环数与平均命中环数相差大不大。相差越大，表明射击命中点越分散，射击手的技术越不稳定。由这些例子可以看出，需要引进一些用来表示平均值和衡量离散程度的量，这些量能够描绘随机变量的主要性质，称其为随机变量的数字特征，其中最主要的是数学期望值和方差。

一、测量值的数学期望和标准差

1. 数学期望

期望的目的是找一个能反映随机变量取值的“平均”的一个数字特征。设对被测量 x 进行 n 次等精度测量，得到 n 个测得值：

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \tag{1-4}$$

定义 n 个测得值（随机变量）的算术平均值为：

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1-5}$$

式中，$\overline{x}$也称作样本平均值。

各次测得值与算术平均值之差，定义为剩余误差或残差：

$$v_i = x_i - \overline{x} \tag{1-6}$$

当 n 足够大时，残差的代数和等于零，这一性质可用来检验计算的算术平均值是否正确。

当测量次数 $n\to\infty$时，样本平均值$\overline{x}$的极限定义为测得值的数学期望：

$$E_{\mathrm{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \tag{1-7}$$

式中，E_{x}也称为总体平均值。

假设上面的测得值中不含系统误差和粗大误差，则第 i 次测量得到的测得值x_i与真值 A 间的绝对误差就等于随机误差：

$$\Delta x_i = \delta_i = x_i - A \tag{1-8}$$

式中　Δx_i、δ_i——分别表示绝对误差和随机误差。

随机误差的算术平均值：

$$\begin{aligned}\overline{\delta} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A\end{aligned} \tag{1-9}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-A$$

当 $n\to\infty$ 时，上式中第一项即为测得值的数学期望 E_x，所以

$$\bar{\delta}=E_x-A\ (n\to\infty) \tag{1-10}$$

由于随机误差的抵偿性，当测量次数 n 趋于无限大时，$\bar{\delta}$ 趋于零，即：

$$\bar{\delta}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)=0 \tag{1-11}$$

即随机误差的数学期望值等于零。由式（1-10）和式（1-11）得：

$$E_x=A \tag{1-12}$$

即测得值的数学期望等于被测量真值 A。

在实际测量中，当测量次数足够多时近似认为：

$$\bar{\delta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i\approx 0 \tag{1-13}$$

$$\bar{x}\approx E_x=A \tag{1-14}$$

由上述分析可知，在实际测量工作中，当基本消除系统误差和剔除粗大误差后，虽然仍有随机误差存在，但多次测得值的算术平均值很接近被测量真值，因此就将它作为最后测量结果，并称之为被测量的最佳估值或最可信赖值。

2. 方差与标准差

随机误差反映了实际测量的精密度即测量值的分散程度。由于随机误差的抵偿性，因此不能用它的算术平均值来估计测量的精密度，应使用方差进行描述。方差定义为 $n\to\infty$ 时，测量值与期望值之差的平方的统计平均值，即：

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-E_x)^2 \tag{1-15}$$

因为随机误差 $\delta_i=x_i-E_x$，故有：

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 \tag{1-16}$$

式中，δ^2 称为测量值的样本方差，简称方差。式中 δ_i 取平方的目的是：无论 δ_i 是正是负，其平方总是正的，相加的和不会等于零，从而可以用来描述随机误差的分散程度。这样在计算过程中不必考虑 δ_i 的符号，从而带来方便。求和再平均后，使个别较大的误差在式中占的比例也较大，使得方差对较大的随机误差反映较灵敏。

由于实际测量中 δ_i 都带有单位（mA，V，MPa 等），因而方差 σ^2 是相应单位的平方，使用不甚方便。为了与随机误差 δ_i 单位一致，将式（1-16）两边开方，取正方根，得：

$$\sigma=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2} \tag{1-17}$$

式中，σ 定义为测量值的标准误差或均方根误差，也称标准误差，简称标准差。反映了测量的精密度，σ 值小表示精密度高，测得值集中，σ 值大表示精密度低，测得值分散。

二、随机误差的正态分析

1. 正态分布

前面提到，随机误差的大小，符号虽然显得杂乱无章，事先无法确定，但当进行大量

等精度测量时，随机误差服从统计规律。理论和测量实践都证明，测得值 x_i 与随机误差 δ_i 都按一定的概率出现。在大多数情况下，测得值在其期望值上出现的概率最大，随着对期望值偏离的增大，出现的概率急剧减小。表现在随机误差上，等于零的随机误差出现的概率最大，随着随机误差绝对值的加大，出现的概率急剧减小。测得值和随机误差的这种统计分布规律，称为正态分布，如图 1-1 和图 1-2 所示。

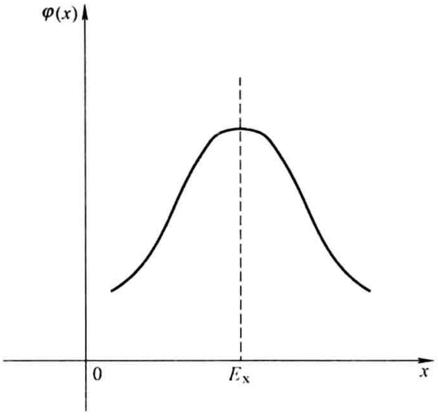

图 1-1　x_i 的正态分布曲线

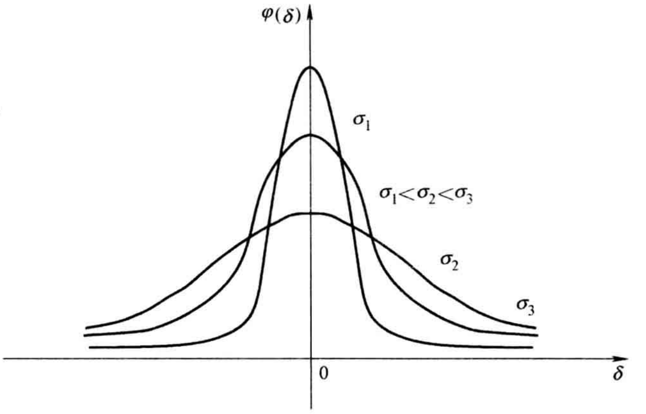

图 1-2　δ_i 的正态分布曲线

设测得值 x_i 在 x 到 $x+\mathrm{d}x$ 范围内出现的概率为 p，它正比于 $\mathrm{d}x$，并与 x 值有关，即：

$$p\{-\infty<x_i<x+\mathrm{d}x\}=\varphi(x)\mathrm{d}x \tag{1-18}$$

式中，$\varphi(x)$ 定义测量值 x_i 的分布密度函数或概率分布函数，显然有：

$$p\{-\infty<x_i<\infty\}=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1 \tag{1-19}$$

对于服从正态分布的测量值 x_i，有：

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-E_x)^2}{2\sigma^2}} \tag{1-20}$$

同样，对于正态分布的随机误差 δ_i，有：

$$\varphi(\delta)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-21}$$

由图 1-2 可以看到如下特征：

（1）σ 越小，$\varphi(\delta)$ 越大，说明绝对值小的随机误差出现的概率大；相反，绝对值大的随机误差出现的概率小，随着 σ 的加大 $\varphi(\delta)$ 很快趋于零，即超过一定界限的随机误差实际上几乎不出现（随机误差的有界性）。

（2）大小相等、符号相反的误差出现的概率相等（随机误差的对称性和抵偿性）。

（3）σ 越小，正态分布曲线越尖锐，表明测得值越集中，精密度高；反之 σ 越大，曲线越平坦，表明测得值分散，精密度越低。

正态分布又称高斯分布，在误差理论中占有重要的地位。由众多相互独立的因素的随机微小变化所造成的随机误差，大多遵从正态分布，限于篇幅，本书下面仅讨论正态分布情况。

2. 极限误差 Δ

对于正态分布的随机误差，根据式（1-21），可以算出随机误差落在［$-\sigma$，$+\sigma$］区间的概率为：

$$p\{|\delta_i|\leqslant\sigma\}=\int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}\cdot \mathrm{d}\sigma=0.683 \tag{1-22}$$

该结果的含义可理解为，在进行大量等精度测量时，随机误差δ_i落在［$-\sigma$，$+\sigma$］区间的测得值的数目占测量总数目的68.3%，或者说，测得值落在［$E_x-\sigma$，$E_x+\sigma$］区间（该区间在概率论中称为置信区间）内的概率（在概率论中称为置信概率）为0.683。

同样，可以求得随机误差落在［-2σ，$+2\sigma$］和［-3σ，$+3\sigma$］区间的概率为：

$$p\{|\sigma_i|\leqslant 2\sigma\}=\int_{-2\sigma}^{2\sigma}\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}\times \mathrm{d}\sigma=0.954 \tag{1-23}$$

$$p\{|\sigma_i|\leqslant 3\sigma\}=\int_{-3\sigma}^{3\sigma}\frac{1}{\sigma\times\sqrt{2\pi}}\times e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}\times \mathrm{d}\sigma=0.997 \tag{1-24}$$

即当测得值x_i的置信区间为［$E_x-2\sigma$，$E_x+2\sigma$］和［$E_x-3\sigma$，$E_x+3\sigma$］时的置信概率分别为0.954和0.997。也就是说，随机误差绝对值大于3σ的概率（可能性）仅为0.003或0.3%，实际上出现的可能性极小，因此定义

$$\Delta=3\sigma$$

为极限误差，或称最大误差，也称作随机不确定度。如果在测量次数较多的等精度测量中，出现了$|\delta_i|>\Delta=3\sigma$的情况（由于$\delta_i=x_i-E_i=x_i-A$，$E_x$或$A$无法求得，就以$\overline{x}$代替，此时随机误差$\delta_i$以残差$v_i=x_i-\overline{x}$代替），则必须予以仔细考虑，通常将$|v_i|\approx|\delta_i|>3\sigma$的测得值判为坏值，应予以删除。另外，按照$|\delta_i|>3\sigma$来判断坏值是在进行大量等精度测量、测量数据属于正态分布的前提下得出的。通常将这个原则称为莱特准则。

3. 贝赛尔公式

在上面的分析中，随机误差$\delta_i=x_i-E_i=x_i-A$，其中x_i为第i次测得值，A为真值，E_x为x_i的数学期望，且$E_x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{x}=A$。在这种前提下，用测量值数列的标准差$\delta$来表征测量值的分散程度，并有$\delta=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^2}$。但是实际上不可能做到$n\to\infty$的无限次测量。当$n$为有限值时，用残差$v_i=x_i-\overline{x}$来近似或代替真正的随机误差$\delta_i$，用$\hat{\sigma}$表示有限次测量时标准误差的最佳估计值，可以得到：

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2} \tag{1-25}$$

4. 算术平均值的标准差

如果在相同条件下将被测量分成m组，每组重复测量n次，则每组测得值都有一个平均值$\overline{x}$。由于随机误差的存在，这些算术平均值也不相同，而是围绕真值有一定的分散性，即算术平均值与真值间也存在着随机误差。用$\sigma_{\overline{x}}$来表示算术平均值的标准差，由概率论中方差运算法则可以求出：

$$\sigma_{\overline{x}}=\sigma/\sqrt{n} \tag{1-26}$$

同样定义$\Delta_{\overline{x}}=3\sigma_{\overline{x}}$为算术平均值的极限误差，$\overline{x}$与真值间的误差超过这一范围的概率

极小，因此，测量结果可以表示为：

$$
\begin{aligned}
x &= \text{算术平均值} \pm \text{算术平均值的极限误差} \\
&= \overline{x} \pm \Delta_{\overline{x}} \\
&= \overline{x} \pm 3\sigma_{\overline{x}}
\end{aligned} \tag{1-27}
$$

在有限次测量中，以 $\hat{\sigma}$ 表示算术平均值标准差的最佳估计值，有：

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}} = \hat{\sigma}/\sqrt{n} \tag{1-28}$$

因为实际测量中 n 只能是有限值，所以有时就将 $\hat{\sigma}$ 和 $\hat{\sigma}_{\overline{x}}$ 叫做测量值的标准差和测量平均值的标准差，从而将式（1-25）和式（1-28）直接写成：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} v_i^2} \tag{1-29}$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \sigma/\sqrt{n} \tag{1-30}$$

三、有限次测量下测量结果的表达

由于实际上只可能做到有限次等精度测量，因而分别用式（1-29）和式（1-30）来计算测得值的标准差和算术平均值的标准差。实际上是两种标准差的最佳估计值。由式（1-30）可以看到，算术平均值的标准差随测量次数 n 的增大而减小，但减小速度要比 n 的增长慢得多，即仅靠单纯增加测量次数来减小标准差收益不大，因而实际测量中 n 的取值并不很大，一般在 10～20 之间。

对于精密测量，常需要进行多次等精度测量，在基本消除系统误差并从测量结果中剔除坏值后，测量结果的处理可按下述步骤进行：

（1）列出测量数据表；

（2）计算算术平均值$\overline{x}$，残差 v_i 及 $v_i{}^2$；

（3）计算 δ 和 $\delta_{\overline{x}}$；

（4）给出最终测量结果表达式：

$$x = \overline{x} \pm 3\delta_{\overline{x}}$$

第四节　系统的误差分析

系统误差的主要特点是只要在测量条件保持不变的情况下，误差就是一个确定的数值，而一般的方法也不能消除系统误差。本节内容将重点介绍系统误差的特性，判断系统误差的方法以及消除或削弱系统误差的一些测量方法。

一、系统误差的特性

排除了粗大误差后，测量误差等于系统误差 δ_i 与随机误差 ε_i 的代数和，即：

$$\Delta x_i = \varepsilon_i + \delta_i = x_i - A \tag{1-31}$$

假设进行 n 次等精度测量，且系统误差为恒值，即 $\varepsilon_i = \varepsilon$，则 n 次测量误差的算数平均值为：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \overline{x} - A = \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{1-32}$$

当 n 足够大时，由于随机误差的抵偿性，δ_i 的算术平均值趋于零，于是由上式得：

$$\varepsilon = \overline{x} - A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i \tag{1-33}$$

可见当测量次数足够多时，系统误差的大小等于测量误差的算术平均值。系统误差的这一特性决定了其很难消除，而测量结果的准确度是与其密不可分的。因此，发现系统误差且减弱其对测量结果的影响是十分必要的。

二、系统误差的判断

在测量过程中形成系统误差的原因是复杂的，通常人们难于查明所有的系统误差，即使对系统误差进行修正，也不可能全部消除系统误差的影响。但是，人们在实际测量的工作过程中，经过不断的探索与总结，还是有一些发现系统误差的行之有效的方法。

1. 实验对比法

实验对比法是通过改变产生系统误差的条件，进行其他条件下的测量，以发现系统误差的方法。这种方法适用于发现定值系统误差。

当缺少标准器具的检定手段时，可以考虑选择几个实验室之间进行比对测试，在严格执行比对测试规范的基础上，对测试数据进行汇总和统计分析，得出一些说明实验室之间测试结果是否有显著差异的结论。

在计量工作中，常用标准器具或标准物质作为检定工具，来检定某测量器具的标称值或测量值中是否含有显著的系统误差。标准器具所提供的标准量值的准确度应该比被检定测量器具的标称值要高出 1～2 个等级或至少高几倍以上。

2. 残差观察法

残差观察法是根据测量列各个残差大小和符号的变化规律，直接由误差数据列表或误差曲线图形来判断有无系统误差。这种方法主要适用于发现有规律变化的系统误差。

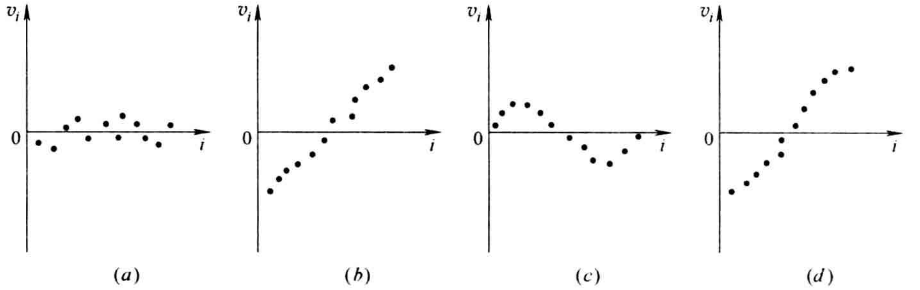

图 1-3　系统误差的判断

图 1-3（*a*）说明各残差大体正负相间，无显著变化规律，故认为不存在系统误差。图 1-3（*b*）的残差数值有规律地递增，且在测量开始与结束时误差符号相反，则说明存在线性递增的系统误差。图 1-3（*c*）的残差符号由正变负，再由负变正，循环交替地变化，则说明存在周期性系统误差。图 1-3（*d*）的残差值变化既有线性递增又有周期性变化，则说明存在复杂规律的系统误差。

三、消除系统误差产生的根源

产生系统误差的原因有很多，如果能找出其产生的根源并且尽量消除的话将会对测量结果产生很大的影响。对于控制其根源需要注意以下几点：

（1）选择正确的测量仪表的类型，避免由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪