THIRD EDITION

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

By Erwin Kreyszig

高等工程數學

第三册

袁定培譯

東華書局印行

高等工程數學

第三冊

著者

克雷斯聚格

譯者

袁定培

東華書局印行

中華民國六十三年八月初版

中華民國六十七年三月四版

大學用書 高等工程數學（全四冊）

第三冊 定價新臺幣四十元整

（外埠酌加運費滙費）

著　者　克雷斯聚格

譯　者　袁定培

發行人　卓鑫淼

出版者　臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號

印刷者　中臺印刷廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號

(62054)

高等工程數學

第三冊目錄

第十一章 複變解析函數

第十二章 保角寫像法

第十三章 複變積分

第十四章　數列與級數

第九章

符立爾級數及積分

Fourier Series and Integrals

循環函數經常在工程問題中出現。此等函數，如能以簡單之循環函數，例如正弦，餘弦等來表示，則其實際用途，極爲重要。由此即導出所謂符立爾級數。此類級數，係按法國物理學家約瑟夫-符立爾(JOSEPH FOURIER) (1768—1830年）而命名，爲解答各種包含常微分，及偏微分方程式問題之一極有效工具。

本章將討論並說明有關符立爾級數之基本觀念、事實、及技巧。包括闡釋範例以及若干重要之工程應用問題。更進一步之應用，將於下章之偏微分方程式，及界値問題中討論。

符立爾級數之理論相當複雜，但其應用較爲簡易。在某一觀點看來，符立爾級數，較泰勒級數更爲普遍，因許多具有實用興趣之非連續循環函數，可展開爲符立爾級數，而不能以泰勒級數表示之。

本章最後一節，將致力於符立爾積分之討論。對偏微分方程式之應用，則將在下章中考慮之（10. 6節）。

研讀本章前之預修課目：基本積分學。

短期課程可省略之節數：9. 6—9. 8節。

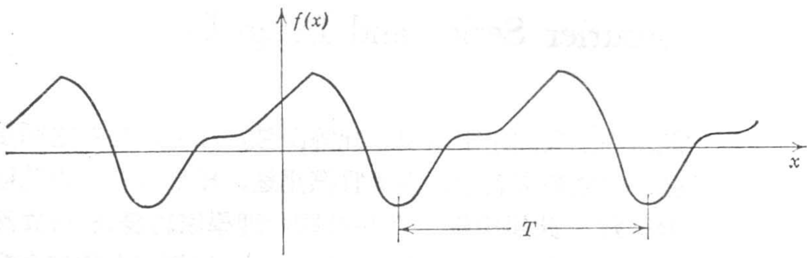
参考資料：附錄 I 之D部份。

習題答案：附錄 2。

9.1　循環函數. 三角級數 (Trigonometric Series).

若函數 $f(x)$ 對所有實值 x 均有定義，且存在某一正數 T，使得

$$f(x+T)=f(x) \qquad \text{對所有 } x \text{ 而言} \tag{1}$$



第172圖　循環函數

則 $f(x)$ 稱爲具有**循環性**。數字 T 則稱爲 $f(x)$ 之**週期**[1]。此種函數之**圖形**，係在任何長度爲 T 之區間內，作週期性之重複變化（第 172 圖)。

由 (1) 式可知，若 n 爲任何整數，

$$f(x+nT)=f(x) \qquad \text{對所有 } x \text{ 而言}$$

故 T 之任何整數倍數 $nT\,(n\neq 0)$ 亦爲一週期。此外，若 $f(x)$ 及 $g(x)$ 之週期爲 T，則函數

$$h(x)=af(x)+bg(x) \qquad (a, b \text{ 爲常數})$$

之週期亦等於 T.

熟悉之循環函數，例如有正弦和餘弦函數。注意函數 $f=c=$常

註 1：設一循環函數 $f(x)$ 具有最小週期 $T(>0)$，此即被稱爲 $f(x)$ 之原始週期 (primitive period)。例如，$\sin x$ 和 $\sin 2x$ 之原始週期分別爲 2π 和 π. 無原始週期循環函數之例，有 $f=$常數及 $f(x)=0$〔x 有理(rational)〕，其餘情形 $f(x)=1$.

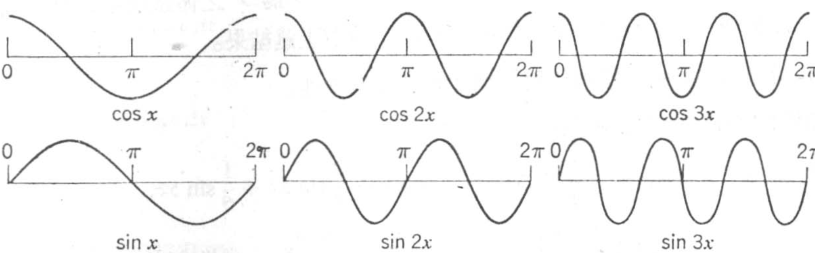
數，根據定義亦爲循環函數，因其對任何正值T均適合 (1) 式。

本章前面幾節，將討論週期爲 2π 之各種函數，以下列週期爲 2π 之簡單函數

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

來表示之問題（第 173 圖）。與此有關之級數形式爲

$$(2)\qquad a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots,$$



第173圖　餘弦及正弦函數之週期等於 2π

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ 均爲實值常數。此種級數，稱爲**三角級數**，而 a_n 及 b_n 稱爲此級數之**係數**。吾人可看出此級數中每一項之週期，均等於 2π。因此，**若級數具有收斂性，則其和亦爲週期等於 2π 之函數。**

在工程問題中出現之循環函數，通常均較複雜，故有將其用簡單循環函數表示之必要。吾人將明瞭，任何出現在應用問題中，週期爲 2π 之循環函數 $f(x)$，例如，有關振動問題等，均可以三角級數來表示。同時吾人將導出 (2) 式中，各係數以 $f(x)$ 表示之公式，使得(2) 式具有收斂性，其和恰爲 $f(x)$。稍後，吾人將所得結果，推廣及於週期爲任何數值之函數；此一推廣方法十分簡單。

習　題

試求下列各函數之最小正值週期 T.

1. $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos \pi x$, $\sin \pi x$, $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$

2. $\cos nx$, $\sin nx$, $\cos \dfrac{2\pi x}{k}$, $\sin \dfrac{2\pi x}{k}$, $\cos \dfrac{2\pi nx}{k}$, $\sin \dfrac{2\pi nx}{k}$

3. 若 T 係 f 之一週期，求證 $nT, n = \pm 2, \pm 3, \cdots$ 亦爲 f 之一項週期。

4. 設 f 及 g 均係週期爲 T 之循環函數，求證 $h = af + bg$ $(a, b$ 常數) 亦必然如此。因而所有週期爲 T 之函數，組成一向量空間。

5. 若 $f(x)$ 爲 x 之循環函數，其週期爲 T，試證 $f(ax)$，$a \neq 0$ 爲 x 之循環函數，其週期爲 T/a；而 $f(x/b)$，$b \neq 0$ 爲 x 之循環函數，其週期爲 bT. 對 $f(x) = \cos x$，$a = b = 2$，驗證上述結果。

6. 求證 $f(x) =$ 常數對任何週期 T 均具有循環性。

試繪出下列各函數之正確圖形。

7. $\sin x$, $\quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$, $\quad \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$,

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/4 & \text{當} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi/4 & \text{當} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{及} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

8. $\sin 2\pi x$, $\quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x$, $\quad \sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 6\pi x + \frac{1}{5}\sin$

9. $\sin x$, $\quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$, $\quad \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$,

$f(x) = x/2$ 當 $-\pi < x < \pi$ 及 $f(x + 2\pi) = f(x)$

10. $-\cos x$, $\quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x$, $\quad -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x$,

$f(x) = x^2/4 - \pi^2/12$ 當 $-\pi < x < \pi$ 及 $f(x + 2\pi) = f(x)$

11. $f(x) = x^3$ 當 $-\pi < x < \pi$ 及 $f(x + 2\pi) = f(x)$

12. $f(x) = e^{|x|}$ 當 $-\pi < x < \pi$ 及 $f(x + 2\pi) = f(x)$

試繪出下列循環函數之圖形，其週期爲 2π，且在 $-\pi < x < \pi$ 間以已知公式表達。

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{當} \ -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{當} \ 0 < x < \pi \end{cases}$ **14.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{當} \ -\pi < x < 0 \\ \sin x & \text{當} \ 0 < x < \pi \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}\pi+x & 當\ -\pi<x<0\\ \pi-x & 當\ \ 0<x<\pi\end{cases}$　　16. $f(x)=\begin{cases}1 & 當\ -\pi<x<0\\ \cos x/2 & 當\ \ 0<x<\pi\end{cases}$

試求下列各積分值，其中 $n=0,1,2,\cdots$（此等積分式，可作爲吾人今後討論所必需之典型範例）。

17. $\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$　　18. $\int_{-\pi/2}^{0}\cos nx\,dx$　　19. $\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$

20. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\sin nx\,dx$　　21. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos nx\,dx$　　22. $\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$

23. $\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nx\,dx$　　24. $\int_0^{\pi}e^x\cos nx\,dx$　　25. $\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx$

9.2　符立爾級數。尤勒公式

假設 $f(x)$ 爲週期等於 2π 之循環函數，且可以下一三角級數表示

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{1}$$

已知如此之一函數 $f(x)$，欲求出相當級數 (1) 式中之係數 a_n 和 b_n.

首先求 a_0. 將 (1) 式兩邊由 $-\pi$ 至 π 逐予積分，可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]dx.$$

若此級數允許逐項積分[2]，則可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

右邊首項等於 $2\pi a_0$，而由直接積分，即知所有右邊其他各項積分值

註 2：吾人將就一致收斂性之情形，證明此舉可行（參考 15.4 節中定　　）。

均爲零。故第一項結果爲

(2) $$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,$$

吾人可用相似程序以決定 $a_1, a_2, \cdots$ 之值，將（1）式乘以 $\cos mx$，其中 m 爲任何正整數，然後由 $-\pi$ 積分至 π，可得

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\Big]\cos mx\,dx.$$

右邊逐項積分可得

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx$$
$$+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\Big].$$

第一項爲零。應用附錄 3 內（11）式可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\,dx.$$

上式等號右邊四項積分爲零，僅第一式中之最後一項，當 $n=m$ 時等於 π。因在（3）式中此項被乘以 a_m，故（3）式之右方等於 $a_m\pi$，而吾人可獲得第二結果爲

(4) $$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx, \qquad m=1,2,\cdots$$

最後決定(1)式中之$b_1, b_2, \cdots$。若將(1)式乘以 $\sin mx$，其中m爲任何正整數，然後由 $-\pi$ 積分至 π，可得

$$(5)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\Big]\sin mx\,dx.$$

逐項積分後，右邊變成

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx$$
$$+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\Big].$$

第一項積分爲零。次一積分型式前曾論及，且知對所有 $n=1,2,\cdots$，其值爲零。最後一項積分可變換成

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx.$$

最後一項爲零。右邊第一項當 $n\neq m$ 時爲零，當 $n=m$ 時爲 π. 因(5)式中此項係乘以 b_m，故(5)式右邊等於 $b_m\pi$，因此可得最後結果如下

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx,\qquad m=1,2,\cdots.$$

以n取代m後，總結可得下列所謂**尤勒公式**:

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\text{(a)}\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\\ &\text{(b)}\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\ &\text{(c)}\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\end{aligned}\qquad n=1,2,\cdots.$$

注意由於被積分函數具有循環性，(6) 式中之積分限，可以長度爲2　之任何區間取代之，例如，區間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

若已知一週期爲 2π 之循環函數，由 (6) 式可求出 a_n 及 b_n 之值，而形成下一三角級數

$$(7)\qquad a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots.$$

則此級數稱爲相當於 $f(x)$ 之**符立爾級數**。由 (6) 式求得之係數稱爲 $f(x)$ 之**符立爾係數** (Fourier coefficients)。

由定積分定義可知，若 $f(x)$ 有連續性，或僅具分段連續性（即在積分限內，除有限數目之跳躍點而外，其餘均具有連續性），則 (6) 式中積分存在。利用 (6) 式，即可計算出 $f(x)$ 之符立爾係數值。剩下之問題爲：如上得出之符立爾級數，是否具有收斂性，又其和是否爲 $f(x)$，本節稍後將予討論。

吾人舉一簡易例題，以說明 (6) 式之實際用途。若干其他例題，將於下面幾節中出現。

例 1　試求第 174a 圖中所示循環函數 $f(x)$ 之符立爾係數。此函數之表示法，可分析爲

$$f(x)=\begin{cases}-k & \text{當 } -\pi<x<0\\ k & \text{當 } 0<x<\pi\end{cases}\quad \text{且}\quad f(x+2\pi)=f(x).$$

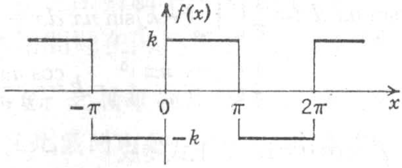
加於機械系統上之外力，電路中之電動勢等等，均屬此類函數。

由 (6a) 式知 $a_0=0$. 由 (6b) 式可得

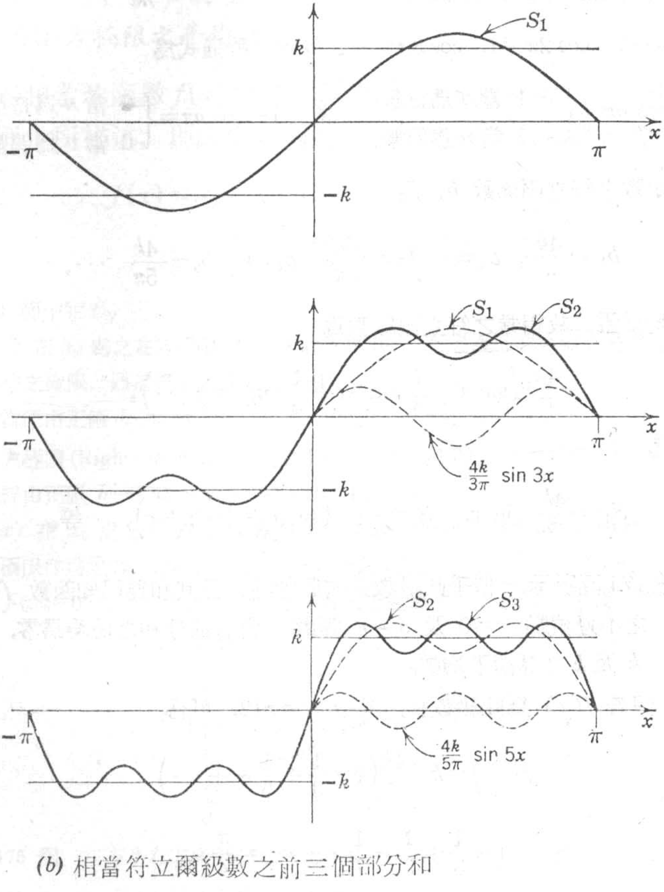
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}k\cos nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+k\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right]=0$$

此因在 $-\pi, 0$, 及 π 處，對所有 $n=1,2,\cdots$, $\sin nx=0$. 又由 (6c) 可得



(a) 已知函數 $f(x)$



(b) 相當符立爾級數之前三個部分和

第174圖　例 1

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-k)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}k\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-k\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right].$$

因爲 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ 及 $\cos 0=1$，故上式變成

$$b_n=\frac{k}{n\pi}[\cos 0-\cos(-n\pi)-\cos n\pi+\cos 0]=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

因 $\cos\pi=-1$，$\cos 2\pi=1$，$\cos 3\pi=-1$ 等等，故通式爲

$$\cos n\pi=\begin{cases}-1 & \text{當 } n \text{ 爲奇數,}\\ 1 & \text{當 } n \text{ 爲偶數,}\end{cases}\qquad \text{故}\quad 1-\cos n\pi=\begin{cases}2 & \text{當 } n \text{ 爲奇數,}\\ 0 & \text{當 } n \text{ 爲偶數。}\end{cases}$$

因此已知函數之符立爾係數 b_n 爲

$$b_1=\frac{4k}{\pi},\quad b_2=0,\quad b_3=\frac{4k}{3\pi},\quad b_4=0,\quad b_5=\frac{4k}{5\pi},\ \cdots,$$

又因 a_n 均爲零，故相當之符立爾級數爲

$$\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right).$$

其部分和爲

$$S_1=\frac{4k}{\pi}\sin x,\quad S_2=\frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x\right),\quad \text{等。}$$

其圖形如第 174 圖所示，似乎此級數具有收斂性，且其和爲已知函數 $f(x)$。注意在 $f(x)$ 之不連續點 $x=0$ 及 $x=\pi$ 等處，所有部分和之值均爲零，即爲已知函數值 $-k$ 及 k 之算術平均數。

此外，假若 $f(x)$ 爲此級數和，又令 $x=\pi/2$，可得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=k=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\right)$$

或

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

此一著名結果，獲自萊布尼玆 (Leibniz)（在 1673 年根據幾何方法所得）。由此可知各種常數項之值，可由在特殊點處求符立爾級數之值而獲得。

能以符立爾級數表示之函數範圍，極爲廣大而且普遍。幾乎包括所有可能遭遇之工程應用問題在內。其相當之充分條件如下。

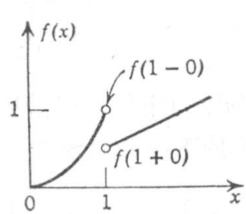
定理 1　若週期爲 2π 之循環函數 $f(x)$；在區間 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ 内具有分段連續性[3]，且在此區間内每一點，均具有左方及右方導數值[4]，則其相當之符立爾級數 (7)〔係數如 (6) 所示〕必有收斂性。除在 $f(x)$ 非連續點 x_0 外，其和爲 $f(x)$，恰在 x_0 處之級數和，則爲 $f(x)$ 在 x_0 處左右兩方極限之平均值。

注意　若相當於函數 $f(x)$ 之符立爾級數，具有收斂性，且其和爲 $f(x)$，有如定理 1 所描述，則此級數稱爲 $f(x)$ 之符立爾級數，寫成

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots$$
$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots,$$

註 3：4.1 節中定義。

註 4：$f(x)$ 在 x_0 處之**左方極限** (Left-hand limit)，其定義爲當 x 由左邊趨近 x_0 時，$f(x)$ 之極限，通常表示法爲 $f(x_0-0)$。
故當經由正值 $h\to 0$ 時，$f(x_0-0)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0-h)$。
右方極限 (Right-hand limit) 之表示法爲：$f(x_0+0)$。
且經由正值 $h\to 0$ 時，$f(x_0+0)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)$。
$f(x)$ 在 x_0 處之**左方及右方導數** (Left- and right-hand derivatives)，分別以下列二極限作爲定義：當經由正值 $h\to 0$ 時之 $f(x_0-h)-f(x_0-0)/-h$ 及 $f(x_0+h)-f(x_0+0)/h$。當然，若 $f(x)$ 在 x_0 具有連續性，二式分子中最後一項均爲 $f(x_0)$。



第 175 圖　左方及右方極限 $f(1-0)=1$，$f(1+0)=\frac{1}{2}$，函數

爲 $f(x)=\begin{cases} x^2 & 當\ x<1 \\ x/2 & 當\ x>1 \end{cases}$