九年制义务教育初中数学读物

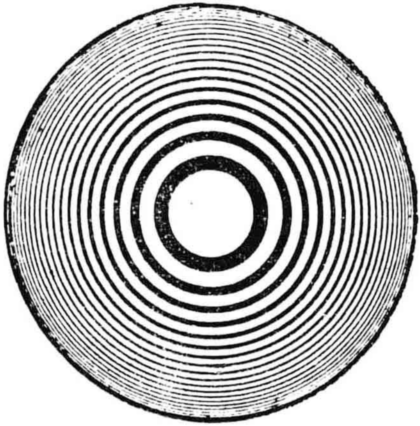
主编 罗四维 杨泰良

几何变换

刘凯年

四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

几何变换

刘凯年

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

（川）新登字005号

责任编辑：何伍鸣
封面设计：何一兵

九年制义务教育初中数学读物
几何变换

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　自贡新华印刷厂印刷

开本787×960毫米　1/32　印张 4.25　插页1　字数 75 千
1992年 5 月第一版　　1992年 5 月第一次印刷
印数：1—4730 册

ISBN7—5408—1734—8/G·1656　　定价：1.53 元

前言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自已真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分析内

容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目　　录

一　奇妙的几何变换

“几何变换”这一概念，一些读者也许会感到陌生，但中学几何课程中其实早已蕴含了几何变换的思想和方法．当你阅读本书，理解了一两个陌生的名词概念之后，几何变换将把你带入一个奇妙的世界．利用几何变换的思想和方法解几何题，具有思路快捷，方法独到，表达简洁等优点，是你克服“几何题难做”的有力工具．

§1　从寻找宝藏的故事说起

1．宝藏在哪里？

从前，有一个富于冒险精神的年轻人，在他祖先留下的遗物中发现了一张泛黄的羊皮纸．由于偶然的原因，羊皮纸在蜡烛火焰的烘烤下显出了铁锈色的字迹：

……在我可能即将遭到不测的时候，把我的全部价值约×千万瑞士法朗的财宝遗赠给我的合法继承人．为了防止意外，我已将这批宝藏深埋在西经××度、北纬××度的一座荒岛上．岛的北岸是一

大片草地，草地上有一棵高大的橡树和一棵栎树，附近打有一个木桩A作为标记．按以下的办法即可找到财宝埋藏处：

从木桩A出发，走到橡树B，记住步数，左转弯走相同步数后到达点M，在M点插上一个标记，此时$MB=AB$．重新从木桩A出发，走到栎树C，右转弯前进同样远近后到达点N，此时$NC=AC$，在N点插上第二个标记．宝藏就埋在标记M和N连线的中点处．

……

××，××××年×月．

年轻人只身驾船来到了荒岛．尽管岁月流逝，两棵大树却依然枝繁叶茂．但令他震惊的是，作为标记的木桩A，不知什么缘故，已不见踪影！

绝望的冒险家在岛上乱掘一气，最后只好两手空空，启帆回航．

也许，这批宝藏至今还未见天日吧！

这真是一个令人伤心的故事！但更令人伤心的是，宝藏究竟埋在哪里，这本是一个容易解决的问题．如果这位年轻的冒险家懂得一点几何学，会利用简单的几何变换的方法（见本书第二章§3例4和第三章§3例2），故事的结局就完全是另外一种情况了！

2．台球桌上的几何学

游园活动中，同学们都被数学老师的“高招”

吸引住了．主持这项活动的张老师准备了一帧精美的贺年卡作为奖品，但吸引同学们的并不是奖品，而是活动本身的复杂和趣味．

“在我们面前的是一张特制的台球桌，”张老师告诉同学们，“矩形的台面光滑无孔，现在将两个台球随意地扔到桌上，要求撞击第一个球 A，使 A 依次碰撞台桌的四侧边后能击中第二个球 B，假设台球碰撞台桌侧边后的反射路径服从光的反射定律：反射角等于入射角，于是问题的关键是确定 A 球的第一次弹着点．谁是幸运的成功者呢？”

同学们都跃跃欲试，读者也想试一试吗？（解法见第二章§2例8）

3．小“工程师”的难题

暑假，小林回到乡下．乡政府正计划在保管室 A 和汽车站 B 之间修筑一条石板大道，但从 A 到 B 要经过两条水渠（见第二章图2—8），在渠上架桥要求桥身垂直于渠岸线．乡长见到小林，不由高兴地说：“小林，你是我们的‘工程师’，请给我们设计这条大道的路线，要使得 A 到 B 的总长为最短．”小林琢磨了一会，欢呼道：“我有办法了！”（解法见第二章§1例5）

你知道小林的设计方案吗？

* * *

上述问题有趣而又棘手，但均可用几何变换的思想方法来解决．那么，什么是几何变换呢？

§2 什么是几何变换

在平面几何课程中，我们已经解决过下述问题：

例1 已知：$\triangle ABC$和直线MN（图1—1）.

求作：$\triangle A'B'C'$，使$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$关于MN对称.

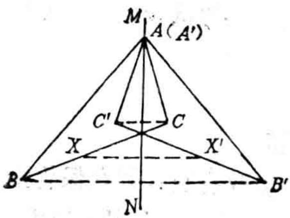


图1—1

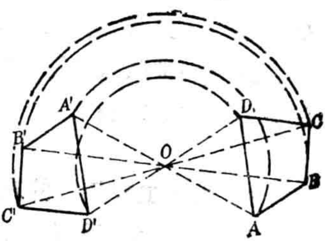


图1—2

例2 已知：四边形$ABCD$和一点O（图1—2）.

求作：四边形$ABCD$关于O的中心对称图形。

其实，这里的将$\triangle ABC$变到$\triangle A'B'C'$，将四边形$ABCD$变到$A'B'C'D'$，就是几何变换.

一般地，我们把根据某种法则（或规律），将一个几何图形F变成另一个几何图形F'的过程，叫做几何变换。

在几何课本“相似形”一章中，有过下面的例题：

例3　已知：锐角三角形ABC（图1—3）．

求作：矩形$DEFG$，使DE在边BC上，点G和F分别在边AB和AC上，且

$$DE:GD=2:1.$$

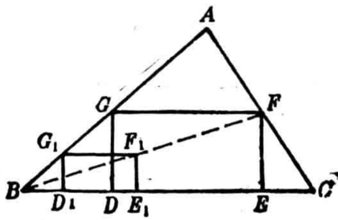


图1—3

作法是先作邻边之比为2:1的矩形$D_1E_1F_1G_1$，然后作它的位似图形$DEFG$，$DEFG$就是所求的内接矩形．这里已经用到了位似变换的思想方法．

二　常用的几何变换

§1　平移变换

为了画出过已知直线AB外一点P与AB平行的直线CD，我们在几何课程中采用的是如图2—1所示的方法：

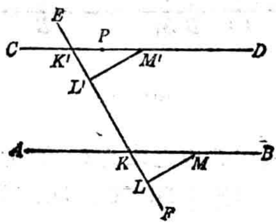


图2—1

沿直尺（直线EF）推动三角板KLM，使原来和AB重合的一边KM经过点P，这时三角板KLM变到$K'L'M'$的位置．沿三角板$K'L'M'$的$K'M'$边画直线CD即可．

这里的将三角板（图形）按一定方向（$F\to E$的方向）移动一定距离（KK'）的几何变换就是平移变换．

定义1：规定了起点和终点的线段叫做有向线

段．起点为P、终点为Q的有向线段记为$\overrightarrow{PQ}$．P到Q的方向规定为有向线段$\overrightarrow{PQ}$的（正）方向．

定义2：平行（或共线）、相等、且方向相同的两条有向线段叫做相等的有向线段．

例如，在图2—1中，$\overrightarrow{K'M'}=\overrightarrow{KM}$，但$\overrightarrow{K'M'}\neq\overrightarrow{MK}$．

上面移动三角板的过程可以说成是"按有向线段$\overrightarrow{KK'}$的平移变换"．

一般地，有

定义3：设$\overrightarrow{PQ}$是一条给定的有向线段，把图形F按$\overrightarrow{PQ}$的方向移动距离PQ的几何变换叫做按$\overrightarrow{PQ}$的平移变换，记为$T(\overrightarrow{PQ})$（字母T表示"平移"）．图形F在平移变换$T(\overrightarrow{PQ})$之下变到图形F'，记为

$$F\xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})}F'.$$

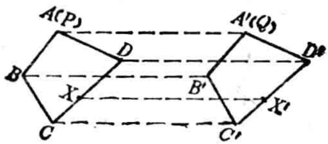


图2—2

仔细分析图2—2中的情形，在平移变换$T(\overrightarrow{PQ})$之下，图形F（$ABCD$）上任一点X变到F'（即A'

$B'C'D'$）上一点X'，满足：$\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{PQ}$.

定义4：把点X'（或图形F'）叫做点X（或图形F）在平移变换$T(\overrightarrow{PQ})$之下的像；点X（或图形F）叫做点X'（或图形F'）的原像.①

容易看出，当$F\xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})}F'$时，有

$F'\xrightarrow{T(\overrightarrow{QP})}F$.关于平移变换的性质，有下面的定理.

定理1：若图形$F\xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})}F'$，则$F'\cong F$，而且像点$X'$与原像点$X$也是全等图形$F'$与$F$的一对对应点.

因此，在平移变换之下，直线变为直线，三角形变为三角形，圆变为圆，…….

定理2：若直线$l\xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})}l'$，则$l'\parallel l$，或$l'$与$l$重合.

略证：如图2—3，设A、B是直线l上两个点，

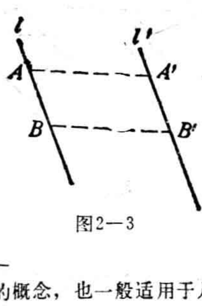


图2—3

① 关于像和原像的概念，也一般适用于几何变换，读者不难作相应的理解，本书以后各章节不再另行写出定义。

$$A \xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})} A', \quad B \xrightarrow{T(\overrightarrow{PQ})} B'.$$ 由定义，

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{PQ},$$

∴ $AA' \perp\!\!\!= BB' \Longrightarrow AB \parallel A'B'$，即 $l' \parallel l$，或者 AA' 与 BB' 共线，此时 l' 与 l 重合.

平移变换在证明线段的相等、平行，以及角的相等诸方面都有广泛的应用.

例1 已知：如图2—4，P 是 $\square ABCD$ 内一点，$\angle 1 = \angle 2$.

求证：$\angle 3 = \angle 4$.

分析：$\angle 3$、$\angle 4$ 所在位置不便于利用平行四边形的有利条件，而平移可产生新的平行线，平行线可产生等角，故考虑将图形平移.

证明：令

$$\triangle ABP \xrightarrow{T(\overrightarrow{AD})} \triangle DCP',$$

则 $\triangle ABP \cong \triangle DCP'$，且

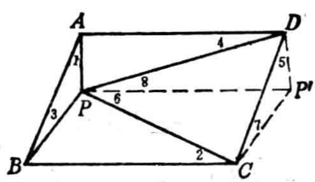


图2—4

$$PP' \parallel AD \parallel BC,$$

∴ $\angle 5 = \angle 1 = \angle 2 = \angle 6$，

∴ P、C、P'、D 共圆，

$\therefore \quad \angle 3 = \angle 7 = \angle 8 = \angle 4.$

例2 如图2—5，D、E、F分别是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB的中点，I_1、I_2、I_3与H_1、H_2、H_3分别是$\triangle AFE$、$\triangle FBD$、$\triangle EDC$的内心和垂心。

求证：$\triangle I_1I_2I_3 \cong \triangle H_1H_2H_3$。

分析：由平移变换的定义，在$T(\overrightarrow{PQ})$之下，任一对对应点X与X'都满足$XX' = PQ$，线段的相等有利于证三角形全等，而题设中的三个全等的三角形又为平移变换提供了条件。

证明：$\because \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED}$，故存在平移$T(\overrightarrow{AF})$，使得

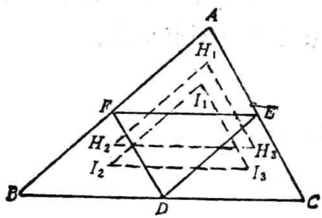


图2—5

$$\triangle AFE \xrightarrow{T(\overrightarrow{AF})} \triangle FBD,$$

$$\therefore \quad I_1 \xrightarrow{T(\overrightarrow{AF})} I_2, \qquad H_1 \xrightarrow{T(\overrightarrow{AF})} H_2,$$

$$\therefore \quad I_1I_2 = H_1H_2 = AF,$$

同理有 $\quad I_2I_3 = H_2H_3, \; I_3I_1 = H_3H_1,$

$$\therefore \quad \triangle I_1I_2I_3 \cong \triangle H_1H_2H_3.$$

评注：若用传统的综合几何的方法证明本题，

须费较多的笔墨（读者不妨一试！）．表达简洁，是几何变换方法的优点之一．

例3　以$\triangle ABC$三中线长为边构成$\triangle A_1B_1C_1$，又以$\triangle A_1B_1C_1$三中线长为边构成$\triangle A_2B_2C_2$．

求证：（1）$\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$，其相似比为4∶3；

（2）$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle A_1B_1C_1} :$
$S_{\triangle A_2B_2C_2} = 4:3$．

分析：要研究$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$与原三角形ABC之间的关系，显然应尽可能在原图形中来构造新三角形．为此，考虑将一些中线作平移变换．

证明：（1）设$\triangle ABC$的三中线为AD、BE、CF（图2—6）．令

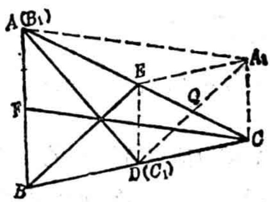


图2—6

$$BE \xrightarrow{T(\overrightarrow{BD})} DA_1，设DA_1与AC交于Q．$$

$$BE \underline{\mathbin{/\!/}} DA_1 \Longrightarrow EA_1 \underline{\mathbin{/\!/}} BD \Longrightarrow EA_1 \underline{\mathbin{/\!/}} DC$$
$$\Longrightarrow A_1C \underline{\mathbin{/\!/}} ED \underline{\mathbin{/\!/}} AF \Longrightarrow A_1A = CF,$$

∴　$\triangle A_1AD$就是以$\triangle ABC$之三中线长为边构成的三角形，记为$\triangle A_1B_1C_1$．