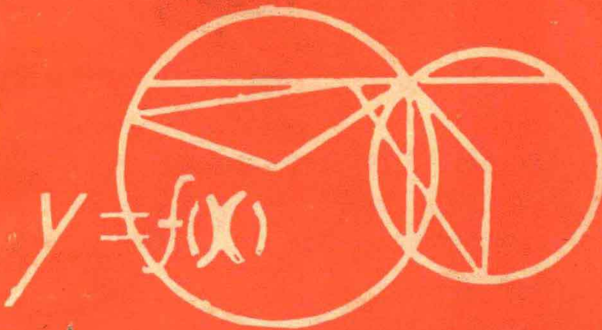


初中
数学竞赛题解
及归类分析

广州教育学院
数学系编

前　言

近年，国内已有不少地区相继举办初中数学竞赛，以提高学生对数学的兴趣和思维能力，推动数学课外活动，开阔学习视野，收到了良好的效果，受到学生所喜爱和欢迎。

在1984年11月，中国数学会于宁波召开的普及工作会议上作出这样的决定："从一九八五年起，每年四月中旬的星期日举行全国性的省、市、自治区初中数学联合竞赛。"因此从今年开始，以后每年四月全国举行一次初中数学竞赛。

为了使广大初中教师和学生对近两年初中数学竞赛的内容有所了解，故把1985年和1984年某些地区举办的初中数学竞赛题收集整理，编制成本书以供初中数学教师、初中学生和数学爱好者参考，也可作为课外数学小组的辅导材料，以解决课外数学活动资料的不足。

本书分两部分编撰。第一部分为竞赛试题及其参考答案，第二部分为归类分析，归类就是把本书介绍的竞赛题系统地归纳为五大类，分析就是根据所划归类型分析求解的一般方法，介绍有关概念和介绍某些试题的来龙去脉，并研究当试题条件有所改变时的情况下如何能得到最好的结果，从而使读者了解数学竞赛常见的类型，理解各类型题的概念、掌握解题思路、求解基本方法和技巧，总结带有规律性的数学知识，以祈通过本书的阅读能获得较多的数学知识。

由于我们水平有限，对编辑这类型的课外阅读资料是初次尝试，加之时间仓促，不当之处在所难免，希读者指正！

编　　者　一九八五年十月

目　　录

第一部份　竞赛题解

		解答
一九八五年省市自治区联合初中数学竞赛试题	(1)	(21)
一九八五年北京市中学生数学竞赛试题（初中二年级）	(5)	(25)
一九八五年广州、武汉、福州联合初中数学竞赛试题	(7)	(27)
天津一九八四年初中数学邀请赛试题（北方各省市联赛）	(10)	(32)
北京一九八四年初中数学竞赛试题	(13)	(35)
上海市一九八四年初中数学竞赛试题	(15)	(37)
福州、武汉、广州一九八四年联合初中数学竞赛试题	(17)	(41)

第二部份　归类分析

关于整数的基本性质…………………………………（46）
一元二次方程判别式及韦达定理的应用…………………（56）
函数及其图象……………………………………………（64）
关于面积的问题…………………………………………（70）
关于平面几何论证题……………………………………（77）

第一部份　竞赛题解选编

一九八五年省市自治区联合初中数学竞赛试题

一、选择题（满分30分）

本题共有6个小题。每一小题都给出了以（A），（B）（C），（D）为代号的四个答案，其中只有一个答案是正确的。请将正确的答案用代号填在各小题的方括号内。答对的每小题得5分，不答者得1分，答错者得0分。

1. 设ABCD为圆内接四边形，现在给出四个关系式

(1) $\sin A=\sin C$；　　(2) $\sin A+\sin C=0$；

(3) $\cos B+\cos D=0$；　　(4) $\cos B=\cos D$.

其中总能成立的关系式的个数是

（A）一个．（B）两个．（C）三个．（D）四个．

（江西提供）答：〔　　　〕

2. 若n是大于1的整数，则

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$

的值

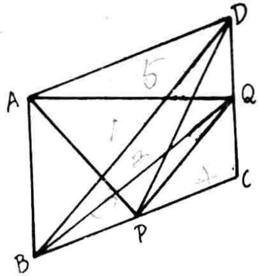
（A）一定是偶数．　（B）一定是奇数．

（C）是偶数但不是2．

（D）可以是偶数也可以是奇数．　（湖北提供）

答〔　　　〕

3. 在平行四边形ABCD中，P为BC的中点，过P作BD的平行线交CD于Q，连PA、PD、QA、QB，则图中与△ABP面积相等的三角形，除△ABP外还有（A）三个．（B）四个．（C）五个．（D）六个．



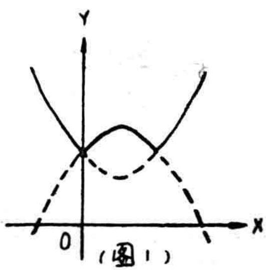
（湖北提供）答：〔　　　〕

4. 函数$y=1-|x-x^2|$的图象大致形状是

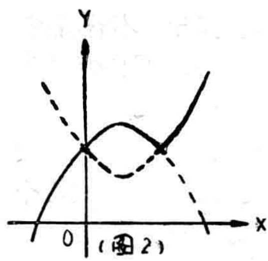
（A）图1中的实线部分．（B）图2中的实线部分．

（C）图3中的实线部分．（D）图4中的实线部分．

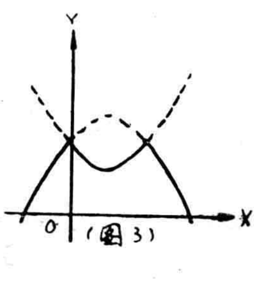
（湖北提供）答：〔　　　〕



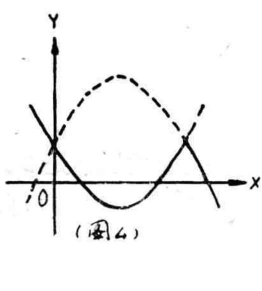
（图1）



（图2）



（图3）



（图4）

5. $[x]$ 表示取数x的整数部分，例如$\left[\frac{15}{4}\right]=3$，若

$$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$$

且当$x=1, 8, 11, 14$时$y=1$；

$x=2, 5, 12, 15$时$y=2$；

$x=3, 6, 9, 16$时$y=3$；

$x=4, 7, 10, 13$时$y=0$，

则表达式中的u等于

(A) $\frac{x+2}{4}$. (B) $\frac{x+1}{4}$. (C) $\frac{x}{4}$. (D) $\frac{x-1}{4}$.

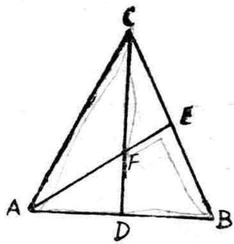
(北京提供) 答：〔　　　　〕

6. 如图、在等腰△ABC中，CD是底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F．现在给出三条路线：

(a) A→F→C→E→B→D→A；

(b) A→C→E→B→D→F→A；

(c) A→D→B→E→F→C→A；



设它们的长度分别是L (a)，L (b)，L (c)．那么下列三种关系式

L(a)<L(b)，L(a)<L(c)，L(b)<L(c) 中，一定能够成立的个数是：

(A) 0个．(B) 1个．(C) 2个．(D) 3个．

(河南提供) 答：〔　　　　〕

二、填空题（满分30分）

请将正确的结果填入“________”格内，每填对一小题得5分。

1. 设$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为__15__．（云南提供）

2. 设方程$x^2-402x-k=0$的一根加3，即为另一根的80倍，那么$k=$__1985__．（广东提供）

3. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元．若购甲4件，乙10件，丙1件共需4.20元，现在购甲、乙、丙各1件共需________元．

（河北提供）

4. 不等式$42x^2+ax<a^2$的解为________________．（辽宁提供）

5. 已知x($x\neq 0$，± 1）和1两个数，如果只许用加法，减法，1作被除数的除法三种运算（可以使用括号）经过六步算出x^2，那么计算的表达式是________________．

（安徽提供）

6. 在正实数集上定义一个运算$*$，其规则为：

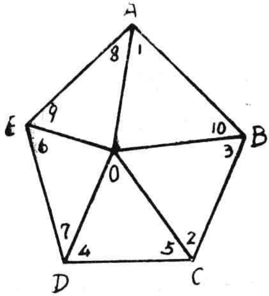
当$a\geqslant b$时，$a*b=b^a$；

当$a<b$时，$a*b=b^2$．

根据这个规则，方程$3*x=27$的解是________．

（湖北提供）

三、（本题满分10分）



如图，O为凸五边形ABCDE内一点，且

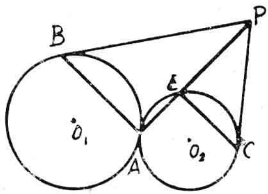
$\angle 1=\angle 2$， $\angle 3=\angle 4$，

$\angle 5=\angle 6$， $\angle 7=\angle 8$，

求证：$\angle 9$与$\angle 10$相等或互补。

（安徽提供）

四（本题满分15分）



如图，$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于A，半径分别为r_1和r_2；PB、PC分别为两圆的切线，B、C为切点；$PB:PC=r_1:r_2$；PA交$\odot O_2$于E点。求证$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$。

（天津提供）

五（本题满分15分）

有一长、宽、高分别为正整数m、n、r（$m\leqslant n\leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体。已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和，减去一面带红色的正方体个数得1985。求m、n、r的值。

（黑龙江提供）

1985年北京中学生数学竞赛（初中二年级）试题

（时间120分钟，满分100分）

一、（满分40分）

（说明与前第1页类同，故略）

1.设〔x〕表示不超过x的最大整数，如〔2〕＝2；

〔3.1〕$=3$；$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$ 等等．对任意实数x，下面式子中正确的是

(A) $[x]=|x|$．　(B) $[x]\geqslant\sqrt{x^2}$．

(C) $[x]>-x$．　(D) $[x]>x-1$．

2．如果关于x的方程$\frac{1}{x^2-x}+\frac{k-5}{x^2+x}=\frac{k-1}{x^2-1}$有增根$x=1$，则$k$的值等于

(A) 1．　(B) 2．　(C) 3．　(D) 6．

3．$\triangle ABC$中三边a、b、c所对的内角分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，以A为顶点的$\triangle ABC$的外角记为α，以B为顶点的$\triangle ABC$的外角记为β，则下面四个判断中正确的一个是

(A) $a=b+c$．　(B) $\angle B=\alpha$．

(C) $\alpha>120°$，$\beta\geqslant120°$，$\angle C<60°$．

(D) $\angle B+\angle C=\alpha$．

4．如果$x<0$，$y<0$，且$3x-2y=\sqrt{xy}$，则$\frac{y}{x}$的值为

(A) $-\frac{9}{4}$．　(B) 1．　(C) $\frac{9}{4}$．　(D) 以上答案都不对．

5．若p、q都是自然数，方程$px^2-qx+1985=0$的两个根都是质数，则$12p^2+q$的值等于

(A) 404．(B) 1998．(C) 414．(D) 1996．

二、（满分20分）

若a为自然数，证明 $10|(a^{1985}-a^{1949})$．

三、（满分20分）

$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A=30°$．分别以AB、AC为边，在$\triangle ABC$的外侧作正$\triangle ABE$与正$\triangle ACD$，DE与AB交于F，求证：$EF=FD$．

四、（满分10分）

象棋比赛中，每个选手都与其他选手恰好比赛一局。每局赢者记2分，输者记0分．如果平局，两个选手每人各记1分．今有四个同学统计了比赛中全部选手得分总数，分别是：1979、1980、1984、1985．经核实确实有一位同学统计无误，试计算这次比赛中共有多少名选手参加．

五、（满分10分）

某电影院共有1985个座位．某天，这家电影院上、下午各映一场电影．看电影的是甲、乙两所中学的各1985名学生（同一个学校的学生有的看上午场，也有的看下午场）．试证明：电影院一定有这样的座位，这天看电影时，上、下午在这个座位上坐的是两个不同学校的学生．

1985年广州、武汉、福州联合初中数学竞赛试题

第一试

（时间60分钟，满分50分）

一、选择题（满分25分）

（说明与前第1页类同，故略）

1．x为任意实数，下列能成立的等式是

（A）$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$

（B）$10^{\lg x}=x$．　　（C）$x^0=1$．

（D）$\sqrt[2n+1]{x}=-\sqrt[2n+1]{-x}$（$n$为自然数）．

2．已知$|x-1|+|x-5|=4$．则x的取值范围是

（A）$1\leqslant x\leqslant 5$．　　（B）$x\leqslant 1$．

(C) $1<x<5$. (D) $x\geqslant 5$.

3. 已知$a>1$，b为正有理数，且$a^b+a^{-b}=2\sqrt{3}$，则a^b-a^{-b}的值为

(A) $-2\sqrt{3}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $-2\sqrt{2}$.

(D) $\pm2\sqrt{2}$.

4. 在△ABC中，∠C=90°，∠A的平分线AD交BC于D，则$\frac{AB-AC}{CD}$等于

(A)sinA. (B)cosA. (C)tgA. (D)ctgA.

5. 已知$lga=\bar{1}.02$，那么$0.01^{0.01}$的值是

(A)a. (B)$\frac{1}{a}$. (c) $10a$. (D)$\frac{1}{10a}$.

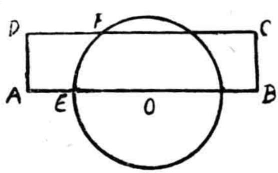
二、填空题（满分25分，每小题5分）

1. 函数$y=\frac{1}{\sqrt{lg0.01^x+3970}}$的自变量取值范围是______.

2. 在平面直角坐标系内，已知两点A(-2,2)，B(6,6)，设点C为线段AB上的一个分点，且$|AC|=3\sqrt{5}$，则点C的坐标为______.

3. 方程$x^2+bx+1=0$与方程$x^2-x-b=0$有一公共实根，则$b=$______.

4. 如图，矩形ABCD的边AB经过圆O的圆心，E、F分别为边AB、DC与圆O的交点，若AE=3，AD=4，DF=5，则圆O的直径等于______.



5. 在△ABC中，∠C=60°，a、b、c分别是∠A、∠B、

$\angle C$的对边，则$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}$的值为_________.

第二试

（时间120分钟，满分70分）

一、（10分）

有m部同样的机器一齐工作，需要m小时完成一项任务。

（1）设由x部机器（x为不大于m的正整数）完成同一任务，求所需时间y（小时）与机器的部数x的函数关系式；

（2）画出所求函数当$m=4$时的图象。

二、（12分）

已知α、β为钝角，求证：

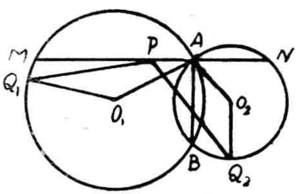
（1）关于x的方程

$$2x^2-2\sqrt{1+\cos\alpha}\,x+\cos\alpha=0 \qquad (\mathrm{I})$$

有两个不等实根；

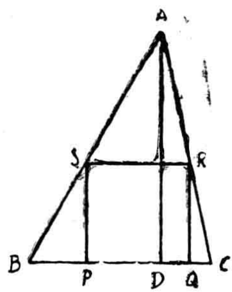
（2）若$\sin\beta$是方程（I）的根，则$\cos\beta$也是方程（I）的根。

三、（13分）



如图，已知$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、B，直线MN垂直AB于A且又分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$交于M、N，P为线段MN的中点，$\angle AO_1Q_1=\angle AO_2Q_2$，求证：$PQ_1=PQ_2$。

四、（15分）



如图，$\triangle ABC$的面积是其内接矩形PQRS面积的3倍，并且边BC和高AD的值是有理数，问矩形PQRS的周长的值，在什么情

况下是有理数？在什么情况下是无理数？

五、（20分）

凸$4n+2$边形$A_1A_2A_3\cdots A_{4n+2}$（n为自然数）各内角都是30°的整数倍，已知关于x的方程

$$x^2+2x\sin A_1+\sin A_2=0, \qquad (1)$$

$$x^2+2x\sin A_2+\sin A_3=0, \qquad (2)$$

$$x^2+2x\sin A_3+\sin A_1=0. \qquad (3)$$

都有实根，求这凸$4n+2$边形各内角的度数。

天津1984年初中数学邀请赛试题

（北方各省市联赛）

一、选择题（本题满分50分）

（说明与前第1页类同，故略）

1. 若$|-a|>-a$，则

（A）$a>0$；（B）$a<0$；（C）$a<-1$；

（D）$-1<a<0$；（E）以上结论都不对。

2. 以线段$a=16$，$b=13$，$c=10$，$d=6$为边，且使$a\parallel c$作四边形，这样的四边形

（A）能作一个；（B）能作二个；

（C）能作三个；（D）能作无数多个；

（E）不能作。

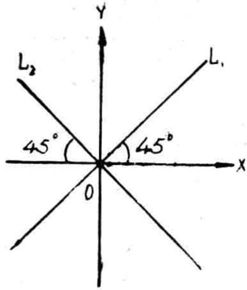
3. 周长相同的正三角形、正方形、正六边形的面积分别是S_3、S_4、S_6，则

（A）$S_3>S_4>S_6$；（B）$S_6>S_4>S_3$；

（C）$S_6>S_3>S_4$；（D）$S_3>S_6>S_4$；

(E) $S_4>S_6>S_3$.

4. 如图，直线L_1和L_2上点的坐标（x，y）满足关系式



(A) $|x|+|y|=0$；

(B) $|x|+\sqrt{y^2}=1$；

(C) $\sqrt{x^2}-|y|=1$；

(D) $|x|-|y|=0$；

(E) $x-|y|=0$.

5. 方程$x^2+1984513x+3154891=0$

(A) 没有实数根；　(B) 有整数根；

(C) 有正数根；　(D) 两根的倒数和小于-1；

(E) 以上结论都不对.

6. △ABC的三条外角平分线相交成一个△LMN，则△LMN

(A) 一定是直角三角形；

(B) 一定是钝角三角形；

(C) 一定是锐角三角形；

(D) 不一定是锐角三角形；

(E) 一定不是锐角三角形.

7. 已知方程 $2x^2+kx-2k+1=0$ 的两实根的平方和为$\frac{29}{4}$，则k的值为

(A) 3；　(B) -11；　(C) 3 或 -11；

(D) 11；　(E) 以上结论都不对.

8. 一个两位数，交换它的十位数字与个位数字所得的两位数是原来数的$\frac{7}{4}$倍，则这样的两位数有

（A） 1个；　（B） 2个；　（C） 4个；

（D）无数多个；　（E） 0个。

9. 半径为13和半径为5的两个圆相交，圆心距为12，则这两个圆公共弦长为

（A） $3\sqrt{11}$；　（B） $\frac{65}{6}$　（C） $4\sqrt{6}$；

（D） 10；　（E）以上结果都不对。

10. 下列哪一个数一定不是某个自然数的平方（其中n为自然数）

（A） $3n^2-3n+3$；　（B） $4n^2+4n+4$；

（C） $5n^2-5n-5$；　（D） $7n^2-7n+7$；

（E） $11n^2+11n-11$。

二（本题满分10分）

试推导出一元二次方程$ax^3+bx+c=0(a\neq0)$的求根公式。

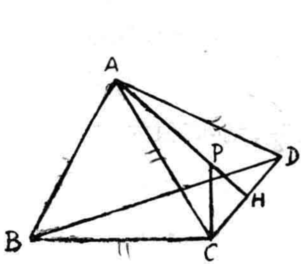
三（本题满分15分）

已知：$A=6\lg p+\lg q$，其是p、q为质数，且满足$q-p=29$。求证：$3<A<4$。

四、（本题满分15分）

已知：如图，$AB=BC=CA=AD$，$AH\perp CD$于H，$CP\perp BC$交AH于P。

求证：$\triangle ABC$的面积$S=\sqrt{\frac{3}{4}}AP\cdot BD$。



五、（本题满分15分）

在锐角$\triangle ABC$中，$AC=1$，$AB=c$，$\triangle ABC$的外

接圆半径长$R\leqq 1$。

求证：$\cos A < c \leqq \cos A+\sqrt{3}\sin A$。

六、（本题满分15分）

有两种重量（设分别为p与q，且$p>q$）的球五个，涂红、白、黑三种颜色。其中，两个红球重量不同；两个白球重量不同；一个黑球不知它的重量是p或是q。由于外形上不能确定球的轻重，请你用一台无砝码的天平（只能比较轻重，不能称出具体重量）称两次，将5球的轻重都区分出来。试叙述你的称球办法，并说明理由。

提示：用天平称球比较重量的结果，可用等号或不等号表示。

北京1984年初中数学竞赛试题

（一）（40分）（说明与前第1页类同，故略）

1． $\lg\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$ 的值等于

（A）$\frac{1}{2}$；　（B）1；　（C）$2\sqrt{3}$；

（D）$\frac{1}{2}\lg 6$；　（E）$2\sqrt{5}$。

2． 设$x=1+2^{p}$，$y=1+2^{-p}$，那么y等于

（A）$\frac{x+1}{x-1}$；　（B）$\frac{x+2}{x+1}$；　（C）$\frac{x}{x-1}$；

（D）$2-x$；　（E）$\frac{x-1}{x}$。

3． 一条直线分一张平面为两部分，二条直线最多分一张平面为四部分，设五条直线最多分一张平面为n个部分，则n等于

（A）32；　（B）31；　（C）24；

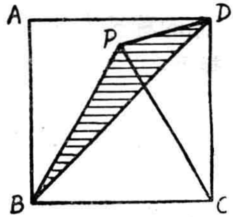
(D) 18；　　(E) 16。

4. 方程$(1984x)^2-1983\cdot1985x-1=0$的较大根为$r$，$x^2+1983x-1984=0$的较小根为$s$，则$r-s$等于

(A) $\frac{1}{1985}$；　　(B) 1985；　　(C) $\frac{1984}{1985}$；

(D) 0；　　(E) $-\frac{1983}{1984}$。

5. 如图，ABCD是面积为1的正方形，△PBC为正三角形，则△BPD的面积为



(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$；

(B) $\frac{2\sqrt{3}-1}{8}$；

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$；

(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$；　　(E) $\frac{1}{4}$。

(二) (10分)

证明：$\lg^2 9>\lg 8.1$.

(三) (15分)

已知凸四边形边长别为a、b、c、d，对角线相交所成的锐角为45°，若S为四边形的面积，求证：

$$S=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}.$$

(四) (15分)

a是负数，求证方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+a^2}=0$$

(1) 有两个异号实根；