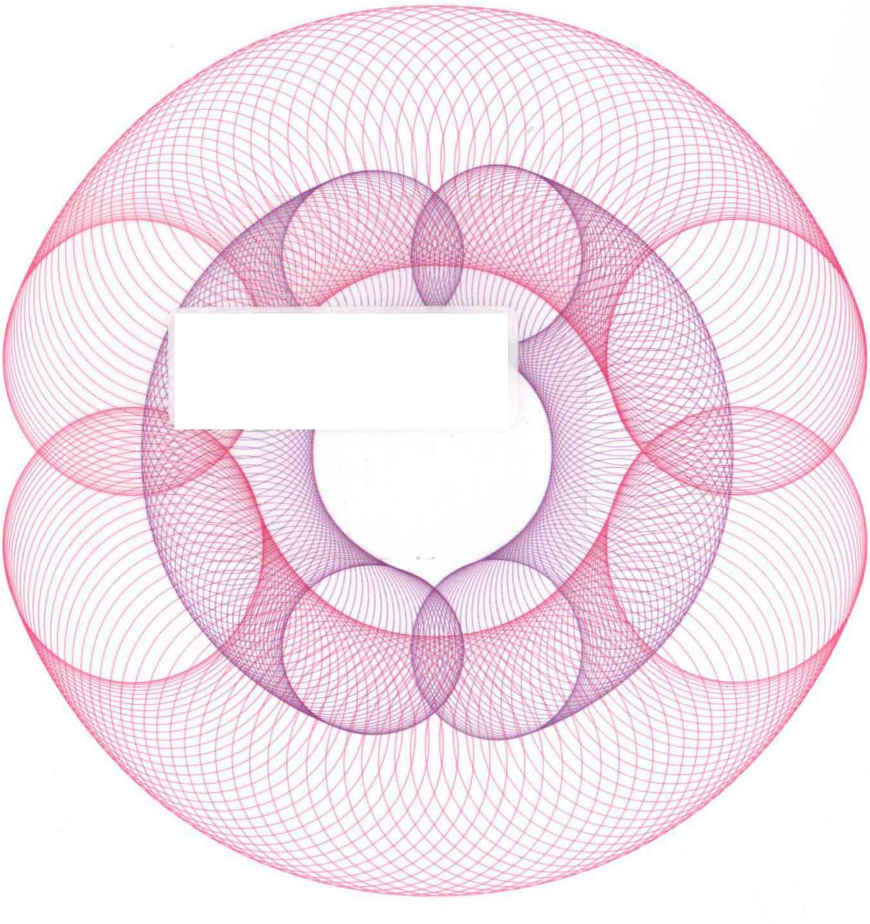
高考不猜题

高考数学压轴题不用猜

比猜中题还有效的满分必拿策略

尹秀敏 编著

- 大决战清华北大，一口气解决大多数考生都做不出的题
- 高考满分倒计时，2012最新高考真题为名校之梦铺路



化学工业出版社

高考不猜题

高考数学压轴题不用猜

比猜中题还有效的满分必拿策略

尹秀敏　编著

化学工业出版社

·北京·

本书是一本特别针对高考数学而编写的实用应考指南，旨在帮助考生在短时间内完整掌握高考数学的知识点和解题要点，从而快速准确地解答高考题，大幅度提高解题速度和质量.

本书由具有20年高三执教经验的资深教师编写，着重于解决高考数学最后一两个大题的解题问题. 这些题通常综合度比较高，需要学生有很强的运算、分析能力. 针对这一问题作者精心甄选了50道最具代表性的高考压轴题，从中总结高中数学压轴题的解题思维和解题步骤. 本书侧重于知识的“拔高”，针对压轴题的解答技巧提供了大量新鲜思路和新鲜解法，并在每道例题之后都会再延伸出5道类似的题目作为练习，让考生能够学以致用，进一步加强认识.

本书知识点全面，选题精辟、重点突出，是广大高考生必备的高分指南.

图书在版编目（CIP）数据

高考数学压轴题不用猜：比猜中题还有效的满分必拿策略/尹秀敏编著.—北京：化学工业出版社，2012.10
（高考不猜题）
ISBN 978-7-122-15201-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.尹…　Ⅲ.中学数学课-高中-题解-升学参考资料　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第205209号

责任编辑：张素芳　　　　装帧设计：关　飞

责任校对：周梦华

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：化学工业出版社印刷厂
710mm×1000mm　1/16　印张5¾　字数140千字　2013年1月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：20.00元　　版权所有　违者必究

学习导言

高考是中国学生通往大学的必经之路．有人形容高考是一座独木桥，只有大胆心细的人才能闯过去，更多的人，因为慌张或者技术技巧问题而落水．但是，当那些成功闯过独木桥的人回头看的时候，会惊讶地发现，原本桥身并没有想象中的那样狭窄，究其原因，不过是人在高中时期掌握的知识面不够宽，技术技巧不够娴熟，心理机制不够完善，凭空放大了困难的模样．

实际上，高考确实是一种能力和技能的考试，它考察的并非是你是否掌握了某种知识，而是你是否拥有掌握这种知识的能力，以及你运用这种知识的技能有多么娴熟．这个考试思想在数学学科里的体现尤为明显．

中国的高考数学题目，向来在世界范围内得到好评，因为它梯度明显，解答弹性好，涉及的知识广而精炼，可以直接测试出一个学生在数学方面的知识接受能力和逻辑思维程度．对于高中学生来说，高考数学从集合、函数开始，至解析、立体几何为止，理科学生比文科学生要多接受算法、极限等方面的训练，因此，一张高考数学答卷里，几乎每道题都考到了一个知识点，而这些通常被称为“考点”的知识点，普遍是高中数学学习过程里的重点，而并非难点．高考的难度体现在个别（约1～3道）题目上，仅针对挑战高分、满分和能力有余的学生，对于绝大多数学生来说，高考数学题目并不难做，即使完全放弃以上所说的难度题，仍然能有可观的分数——这也是高考命题委员会的出题原则——基础题占据了试卷的70%甚至更多．

但是，为什么绝大多数学生头疼的科目偏偏就是数学？

在很多学生心目中，数学是一个靠海量练习累积而成的学科，同样的题目，条件和结论换位，算法立刻产生了翻天覆地的变化，即使几个数字略加更改，也可能导致完全不一样的解答，好像除了“做遍天下数学题”以外，并没有其他良好的解决办法．然而，不容忽视的是，在长期“不假思索”的解题过程中，学生对题目产生了熟悉感，却离知识和基础的数学思想越来越

远，以至于只会解传统题，一旦题目发生法则以外的变化，学生就只能陷入痛苦重复的错误演算中，自信心受挫，完全找不到解决办法.

尤其是，在全国使用新课标教材之后，数学的教学理念更加突出变化和应用，这几乎是学生们最恐惧的考点了. 变化，意味着传统的解题思路已经不能适应新题型的要求，而应用，则结合了当下最"时尚"的话题，比如环保、生态等问题，让传统的"已知AB，求证C"的数学题增加了理解难度. 在教学纲要和考试说明里，我们清楚地看到了高考对于"创新题"的规定，在压轴题的难度之上，创新题鼓励学生拓展思路，做出合理的、有逻辑的推测、预测，找到问题之间的联系和规律. 甚至，有一部分创新题的答案并不唯一或者鼓励多种解法和代数、几何解法的结合运用.

如何攻克压轴题？如何应对创新题？

单靠"题海战术"已经完全不能解决问题了，学生在新的考试方法下，需要的是精炼、明确的解题思考训练和少量却准确的解题参考信息. 这和小说中的"无招胜有招"有异曲同工之妙，掌握了解题思路、技巧和准确的考点，比埋头苦做成百上千的题目更有学习效率.

因此，我们编写了一本相对于其他教辅图书来说题量偏少的数学教辅图书. 本书精选了在高考过程中出现的50道压轴、创新类真题，帮助你进一步复习、理解最基础的数学知识. 在选题的时候，每一道题都经过了数学老师们的衡量，普遍具有以下五个特点：

(1) 每年必考的压轴知识点；

(2) 重复考查的高频率知识点；

(3) 难以掌握的知识难点；

(4) 令人"不理解"的新式题干；

(5) 贯穿小、初、高，甚至大学还要用到的解题思想.

符合这五个条件的50道真题，按照压轴题通常的类型划分为解析几何、数列、创新题三部分. 这三种类型并不是高考压轴题的所有类型. 事实上，压轴题可以出现任何考点，但这三种类型的题目确是近十几年来长考不衰的经典. 在新课标的要求下，压轴题还会出现较大难度的函数和集合类综合题，不过频率比较低.

在使用本书进行复习的时候，考生可以根据自己的弱点，分别选择不同的章节进行阅读，也可以从第一页开始，逐渐深入. 在创新题的复习过程中，不要拘泥于某一道例题，而是应该广泛关注考查的知识点本身. 创新题对学生的思路要求比较高，并不是人人都可以得分，因此不必强求每题都做会、做对，应根据自己的学习情况量力而行.

希望本书可以从知识、技能的角度，带给广大考生关于解答高考数学压

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

轴题的新思路，愿本书读者金榜题名.

最后，特别感谢戴秋馨、范澄、龚雪蓉、张韧、赵雪凤，以及覃子洋、刘欣然、王珊珊、张筱玫、朱成蹊、薛嫄、黄李慧、谢楠、金秀芳、霍连杰等在本书编写过程中提供的帮助和做出的贡献.

编　者

2012 年 8 月

阅读说明

(1) 章节前的考点、知识提示不可跳过，应仔细回想相关公式、定理、公理，为做题热身.

(2) 本书精选了 50 道考前复习必做的压轴题，均来自全国高考考卷.

(3) 压轴题属于高考难题，对高层次考生来说不可以放弃，在研读例题的过程中，不要轻易丧失信心——即使压轴题，也是由基础知识步步拼合而成的.

(4) 请仔细研读例题，反复思考解法，在不能越过的“障碍”面前，用以解决问题的是概念、公理、公式，而不是花哨的技巧.

(5) 注重压轴题的解题思想，注重解题的运算准确度.

(6) 数学复习讲究适量、精炼，完全掌握 50 道题，做会 50 道练习题，胜过 500 张模拟卷.

目 录

第 1 章　2012 年最新高考真题解析 ······ **1**

第 2 章　解析几何压轴题 ······ **13**

2.1　高考考点概述与应对策略 ······ 13

2.2　高考实战例题与分析 ······ 14

第 3 章　数列压轴题 ······ **41**

3.1　高考考点概述与应对策略 ······ 41

3.2　高考实战例题与分析 ······ 41

第 4 章　创新压轴题 ······ **68**

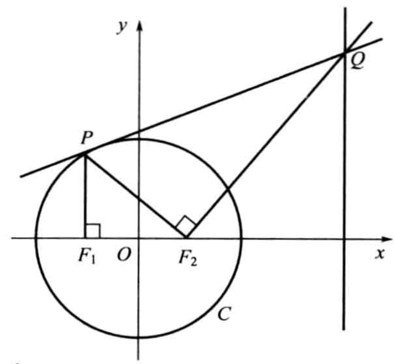
4.1　高考考点概述与应对策略 ······ 68

4.2　高考实战例题与分析 ······ 68

第1章

2012年最新高考真题解析

1. （2012安徽理）如图，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过点 F_1 作 x 轴的垂线交椭圆的上半部分于点 P，过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线交直线 $x=\frac{a^2}{c}$于点 Q.



（Ⅰ）若点 Q 的坐标为（4，4）；求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）证明：直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点.

分析　本题主要考查斜率公式、两条直线的位置关系、直线与圆锥曲线的位置关系以及分析、运算的能力．在第一问中，只要寻求到 a、b、c 之间的关系即可；在第二问中，直观的想法就是写出直线 PQ 的方程，与椭圆的方程联立，化简得到一个一元二次方程，只要计算判别式为零即可，但实际运算中很快就会发现因为字母太多，运算量很大，所以要转换思路，由于直线与曲线只有一个交点，即直线是曲线的切线，所以可考虑用导数解决此题.

解：（Ⅰ）点 $P(-c,y_1)(y_1>0)$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$得：$y_1=\frac{b^2}{a}$

$$PF_2\perp QF_2\Leftrightarrow\frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-c}\times\frac{4-0}{4-c}=-1 \quad ①$$

$$\text{又}\frac{a^2}{c}=4 \quad ② \quad c^2=a^2-b^2(a,b,c>0) \quad ③$$

由①②③得：$a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{3}$即椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（Ⅱ）设 $Q\left(\frac{a^2}{c},y_2\right)$；则 $PF_2\perp QF_2\Leftrightarrow\frac{\frac{b^2}{a}-0}{-c-c}\times\frac{y_2-0}{\frac{a^2}{c}-c}=-1\Leftrightarrow y_2=2a$

得：$k_{PQ}=\frac{2a-\frac{b^2}{a}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{c}{a}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\Rightarrow y'=\frac{-\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}}$$

过点 P 与椭圆 C 相切的直线斜率 $k=y'|_{x=-c}=\frac{c}{a}=k_{PQ}$

∴直线 PQ 与椭圆 C 只有一个交点.

2.（2012 北京理）已知曲线 C：$(5-m)x^2+(m-2)y^2=8(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

（Ⅱ）设 $m=4$，曲线 C 与 y 轴的交点为 A，B，（点 A 位于点 B 的上方），直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M，N，直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G，求证：A，G，N 三点共线.

分析

本题主要考查椭圆的方程以及直线与椭圆的位置关系，要求学生会画图分析问题与解决问题，并掌握直线与圆锥曲线的常用解题方法、思路．在第二问中，要证明 A，G，N 三点共线，可考虑用向量证明 AG、AN 共线或证明这两条线斜率相等，但从运算角度来看向量法更简单．福建的高考题也涉及用向量求解，所以计算时要注意向量法的应用.

解：（Ⅰ）原曲线方程可化简得：$\frac{x^2}{\frac{8}{5-m}}+\frac{y^2}{\frac{8}{m-2}}=1$

由题意可得：$\begin{cases}\frac{8}{5-m}>\frac{8}{m-2}\\ \frac{8}{5-m}>0\\ \frac{8}{m-2}>0\end{cases}$，解得：$\frac{7}{2}<m<5$

（Ⅱ）将已知直线代入椭圆方程化简得：$(2k^2+1)x^2+16kx+24=0$，

$\Delta=32(2k^2-3)$，解得：$k^2>\frac{3}{2}$

由韦达定理得：$x_M+x_N=-\dfrac{16k}{2k^2+1}$①，$x_Mx_N=\dfrac{24}{2k^2+1}$②，

设 $N(x_N,kx_N+4)$，$M(x_M,kx_M+4)$，$G(x_G,1)$

MB 方程为：$y=\dfrac{kx_M+6}{x_M}x-2$，则 $G(\dfrac{3x_M}{kx_M+6},1)$，

$\therefore \overrightarrow{AG}=(\dfrac{3x_M}{kx_M+6},-1)$，$\overrightarrow{AN}=(x_N,x_Nk+2)$，

欲证 A，G，N 三点共线，只需证$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AN}$共线

即$\dfrac{3x_M}{kx_M+6}(kx_N+2)=-x_N$成立，化简得：$4kx_Mx_N=-6(x_M+x_N)$

将①②代入易知等式成立，则 A，G，N 三点共线得证.

3.（2012 全国大纲卷理）已知抛物线 C：$y=(x+1)^2$ 与圆 M：$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=r^2(r>0)$有一个公共点 A，且在 A 处两曲线的切线为同一直线 l.

（Ⅰ）求 r；

（Ⅱ）设 m，n 是异于 l 且与 C 及 M 都相切的两条直线，m，n 的交点为 D，求 D 到 l 的距离.

分析

本题考查抛物线与圆的方程，以及两个曲线的公共点处的切线的运用，并在此基础上求解点到直线的距离．该题出题的角度不同于平常，因为涉及的是两个二次曲线的交点问题，并且要研究两曲线在公共点处的切线，把解析几何和导数的工具性结合起来，是该试题的创新处，这也是 2012 年高考题目的一个特色．另外，在第二问中更是难度加大了，出现了另外的两条公共的切线，这样的问题对于我们以后的学习也是一个需要练习的方向.

解：（Ⅰ）设 $A(x_0,(x_0+1)^2)$，对 $y=(x+1)^2$求导得 $y'=2(x+1)$，故直线 l 的斜率 $k=2(x_0+1)$，当 $x_0=1$ 时，不合题意，所以 $x_0\neq 1$

圆心为 $M\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，$MA$ 的斜率 $k'=\dfrac{(x_0+1)^2-\dfrac{1}{2}}{x_0-1}$

由 $l\perp MA$ 知 $kk'=-1$，即 $2(x_0+1)\times\dfrac{(x_0+1)^2-\dfrac{1}{2}}{x_0-1}=-1$，解得 $x_0=0$，故 $A(0,1)$

所以 $r=|MA|=\sqrt{(1-0)^2+\left(\dfrac{1}{2}-1\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

（Ⅱ）设（a，$(a+1)^2$）为 C 上一点，则在该点处的切线方程为 $y-(a+1)^2=2(a+1)(x-a)$，即

$$y=2(a+1)x-a^2+1$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

若该直线与圆 M 相切，则圆心 M 到该切线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，即

$$\frac{\left|2(a+1)\times1-\frac{1}{2}-a^2+1\right|}{\sqrt{[2(a+1)]^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$，化简可得 $a^2(a^2-4a-6)=0$

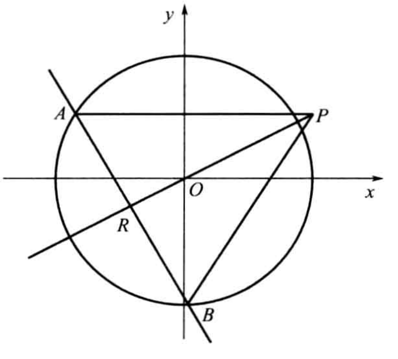
求解可得 $a_0=0,a_1=2+\sqrt{10},a_2=2-\sqrt{10}$

抛物线 C 在点（a_i，$(a_i+1)^2$）（$i=0$，1，2）处的切线分别为 l，m，n，其方程分别为

$$y=2x+1① \quad y=2(a_1+1)x-a_1^2+1② \quad y=2(a_2+1)x-a_2^2+1③$$

②－③得 $x=\frac{a_1+a_2}{2}=2$，将 $x=2$ 代入②得 $y=-1$，故 D（2，－1）

所以 D 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2\times2-(-1)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.



4.（2012 浙江理）如图，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\frac{1}{2}$，其左焦点到点 $P(2,1)$的距离为 $\sqrt{10}$. 不过原点 O 的直线 l 与 C 相交于 A，B 两点，且线段 AB 被直线 OP 平分.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求 ΔABP 的面积取最大值时直线 l 的方程.

分析 本题主要考查两点间的距离、椭圆的方程、性质、直线与椭圆的位置关系．在此题中 R 点是线段 AB 的中点，遇到此类条件，应优先考虑用代点法先求出直线 AB 的斜率.

解：（Ⅰ）由题意可得：$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$；①

左焦点$(-c,0)$到点 $P(2,1)$的距离为:$d=\sqrt{(2+c)^2+1^2}=\sqrt{10}$. ②

由①②可解得：$a^2=4$，$b^2=3$，$c^2=1$.

∴所求椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）易得直线 OP 的方程：$y=\frac{1}{2}x$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$R(x_0,y_0)$. 其中 $y_0=\frac{1}{2}x_0$.

$\because A$，B 在椭圆上，

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{x_A^2}{4}+\dfrac{y_A^2}{3}=1 \\ \dfrac{x_B^2}{4}+\dfrac{y_B^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow \quad k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=-\frac{3}{4}\frac{x_A+x_B}{y_A+y_B}=-\frac{3}{4}\frac{2x_0}{2y_0}=-\frac{3}{2}.$$

设直线 AB 的方程为 l：$y=-\dfrac{3}{2}x+m(m\neq 0)$，

代入椭圆：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=-\dfrac{3}{2}x+m \end{cases} \Rightarrow \quad 3x^2-3mx+m^2-3=0.$

显然 $\Delta=(3m)^2-4\times 3(m^2-3)=3(12-m^2)>0$.

$\therefore -2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$ 且 $m\neq 0$.

由上可得：$x_A+x_B=m, y_A+y_B=\dfrac{m^2-3}{3}$.

$$\therefore \quad |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_B|=\sqrt{1+k_{AB}}\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{4-\frac{m^2}{3}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{9}{4}}\sqrt{4-\frac{m^2}{3}}.$$

$\because$ 点 P（2，1）到直线 l 的距离为：$d=\dfrac{|m-4|}{\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}}$.

$$\therefore \quad S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}d\,|AB|=\frac{1}{2}|m-4|\sqrt{4-\frac{m^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{(m-4)^2(12-m^2)}$$

令 $g(m)=(m-4)^2(12-m^2)$，利用积的导数公式可得：

$g'(m)=-4(m-4)(m^2-2m-6)=-4(m-4)(m-1-\sqrt{7})(m-1+\sqrt{7})$

由函数的单调性可知：当且仅当 $m=1-\sqrt{7}$ 时：三角形的面积最大，

此时直线 l 的方程 $y=-\dfrac{3}{2}x+1-\sqrt{7}$.

5.（2012 山东理）在平面直角坐标系 xOy 中，F 是抛物线 C：$x^2=2py(p>0)$ 的焦点，M 是抛物线 C 上位于第一象限内的任意一点，过 M，F，O 三点的圆的圆心为 Q，点 Q 到抛物线 C 的准线的距离为 $\dfrac{3}{4}$.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）是否存在点 M，使得直线 MQ 与抛物线 C 相切于点 M？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由；

（Ⅲ）若点 M 的横坐标为 $\sqrt{2}$，直线 l：$y=kx+\frac{1}{4}$ 与抛物线 C 有两个不同的交点 A,B,l 与圆 Q 有两个不同的交点 D，E，求当 $\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2$ 时，$|AB|^2+|DE|^2$ 的最小值.

分析 本题主要考查圆的垂径定理，圆的方程、抛物线的方程及焦点、准线、两直线的位置关系．在第一问中，要抓住 O 点与 F 点的固定性，利用弦的知识求解圆心；第二问是开放性的题目，此类题目的常规解法就是先假设所求的点存在，然后依据已知条件运算求解，看是否产生矛盾，从而判定结论，本题中由于直线 MQ 与抛物线相切，所以可以考虑利用导数的几何意义求解；第三问要求 $|AB|^2+|DE|^2$ 的最小值，则首先要将 $|AB|^2+|DE|^2$ 表示出来，由题意 $|AB|$ 用弦长公式即可，DE 是圆 Q 的弦，可考虑用勾股定理求 $|DE|$，最后选择适宜的方法求最值就可以了.

解：（Ⅰ）依题线段 OF 为圆 Q 的弦，由垂径定理知圆心 Q 的纵坐标 $y_Q=\frac{P}{4}$，

又 Q 到抛物线准线 $y=-\frac{p}{2}$ 的距离为 $y_Q+\frac{p}{2}=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$，所以 $p=1$.

所以 $x^2=2y$ 为所求.

（Ⅱ）假设存在点 $M\left(x_0,\frac{x_0^2}{2}\right)$，又 $F\left(0,\frac{1}{2}\right)$，设 Q，$\left(x_Q,\frac{1}{4}\right)$.

$x^2=2y$ 变形为 $y=\frac{x^2}{2}\Rightarrow y'=x$

因为直线 MQ 为抛物线的切线，故 $k_{MQ}=\dfrac{\frac{x_0^2}{2}-\frac{1}{4}}{x_0-x_Q}=y'|_{x=x_0}=x_0$，

解得 $x_Q=\frac{x_0}{2}+\frac{1}{4x_0}$，即 $Q\left(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{4x_0},\frac{1}{4}\right)$.

取 FM 中点 $N\left(\frac{x_0}{2},\frac{x_0^2+1}{4}\right)$，由垂径定理知 $FM\perp QN$，

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{QN}=\left(x_0,\frac{x_0^2-1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4x_0},\frac{x_0^2}{4}\right)=0\Rightarrow x_0=\sqrt{2}$，所以存在点 $M(\sqrt{2},1)$ 满足假设.

（Ⅲ）依题 M（$\sqrt{2}$，1），圆心 $Q\left(\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{1}{4}\right)$，

圆 Q 的半径 $r=|OQ|=\sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{32}}$，

圆心 Q 到直线 $y=kx+\frac{1}{4}$ 的距离为 $d=\dfrac{\left|\frac{5\sqrt{2}}{8}k\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}k}{8\sqrt{1+k^2}}$，

所以，$|DE|^2=4(r^2-d^2)=4\left(\frac{27}{32}-\frac{25k^2}{32(1+k^2)}\right)=\frac{27+2k^2}{8(1+k^2)}$.

又联立$\begin{cases}x^2=2y\\y=kx+\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow x^2-2kx-\frac{1}{2}=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有$\begin{cases}x_1+x_2=2k\\x_1x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

所以，$|AB|^2=(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=(1+k^2)(4k^2+2)$.
于是，

$$\begin{aligned}|AB|^2+|DE|^2&=(1+k^2)(4k^2+2)+\frac{2k^2+27}{8(1+k^2)}\\&=4k^4+6k^2+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}\cdot\frac{1}{1+k^2}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2\right)\end{aligned}$$

令 $x=k^2$

记 $f(x)=4x^2+6x+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}\cdot\frac{1}{1+x}\quad\left(\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 4\right)$，则

$f'(x)=8x+6-\frac{25}{8}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}>6-\frac{25}{8}>0$，所以 $f(x)$ 在$\left[\frac{1}{4},4\right]$上单增，

所以当 $x=\frac{1}{4}$，$f(x)$取得最小值 $f_{\min}(x)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{2}$，

所以当 $k=\frac{1}{2}$时，$|AB|^2+|DE|^2$ 取得最小值$\frac{13}{2}$.

6. (2012 广东理) 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，满足 $2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1$ $(n\in N^*)$，且 a_1,a_2+5,a_3 成等差数列.

(Ⅰ) 求 a_1 的值；

(Ⅱ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(Ⅲ) 证明：对一切正整数 n，有$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

分析 数列的考查模式主要是求通项公式、求数列的和. 本题考查 a_n与 s_n的关系、递推法求通项公式及用数学归纳法证明，在证明的过程中可考虑放缩法. 另外，第二问求数列的通项时，也可以利用构造法，由 $a_{n+1}=3a_n+2^n\Leftrightarrow a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$，可知数列 $\{a_n+2^n\}$ 是以 3 为公比的等比数列，利用等比数列的通项公式求解即可.

解：(Ⅰ) $2S_n=a_{n+1}-2^{n+1}+1,2S_{n+1}=a_{n+2}-2^{n+2}+1$ 相减得：

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+2^{n+1}$$

$$2S_1=a_2-3\Leftrightarrow a_2=2a_1+3,a_3=3a_2+4=6a_1+13$$

$$a_1,a_2+5,a_3\text{ 成等差数列}\Leftrightarrow a_1+a_3=2(a_2+5)\Leftrightarrow a_1=1$$

（Ⅱ）$a_1=1,a_2=5$ 得 $a_{n+1}=3a_n+2^n$ 对 $\forall n\in N^*$ 均成立

$$a_{n+1}=3a_n+2^n\Leftrightarrow a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$$

得：$a_n+2^n=3(a_{n-1}+2^{n-1})=3^2(a_{n-2}+2^{n-2})$
$=\cdots=3^{n-1}(a_1+2)\Leftrightarrow a_n=3^n-2^n$

（Ⅲ）当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{a_1}=1<\dfrac{3}{2}$

当 $n\geqslant 2$ 时，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\geqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^2>2\Leftrightarrow 3^n>2\times 2^n\Leftrightarrow a_n>2^n\Leftrightarrow\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}<\frac{3}{2}$$

由上式得：对一切正整数 n，有$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{3}{2}$

7.（2012 全国理）函数 $f(x)=x^2-2x-3$. 定义数列 $\{x_n\}$ 如下：$x_1=2$，x_{n+1}是过两点 $P(4,5)$,$Q_n(x_n,f(x_n))$的直线 PQ_n 与 x 轴交点的横坐标.

（Ⅰ）证明：$2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$；

（Ⅱ）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

分析

本题主要考查数列的通项公式以及函数与数列相结合的综合运用．先从函数入手，表示直线方程，从而得到交点坐标，再运用数学归纳法进行证明，根据递推公式构造等比数列进而求得数列的通项．从历年的高考试题来看，此题的创新效果很好，题目并不怪和偏，不但考查了基础知识，还考查了同学们灵活运用所学知识解决问题的能力，入题不难，但是解出来也不是那么容易．此题以函数为背景，引出点的坐标，并通过直线与坐标轴的交点得到数列的递推公式．既考查了直线方程，又考查了函数解析式，以及不等式的证明，试题比较综合，有一定的难度．做这类试题就是根据已知条件，一步一步地翻译为代数式，化简得到要找的关系式即可.

解：（Ⅰ）因为 $f(4)=4^2-8-3=5$，故点 $P(4,5)$在函数 $f(x)$的图像上，故由所给出的两点 $P(4,5)$,$Q_n(x_n,f(x_n))$可知，直线 PQ_n 斜率一定存在．故有直线 PQ_n 的方程为 $y-5=\dfrac{f(x_n)-5}{x_n-4}(x-4)$，令 $y=0$，可求得

$$-5=\frac{x_n^2-2x_n-8}{x_n-4}(x-4)\Leftrightarrow\frac{-5}{x_n+2}=x-4\Leftrightarrow x=\frac{4x_n+3}{x_n+2}$$

所以 $x_{n+1}=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$.

下面用数学归纳法证明 $2\leqslant x_n<3$.

当 $n=1$ 时，$x_1=2$，满足 $2\leqslant x_1<3$

假设 $n=k$ 时，$2\leqslant x_k<3$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\dfrac{4x_k+3}{x_k+2}=4-\dfrac{5}{x_k+2}$，

由 $2\leqslant x_k<3\Leftrightarrow 4\leqslant x_k+2<5\Leftrightarrow 1<\dfrac{5}{x_k+2}\leqslant\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow 2<\dfrac{11}{4}\leqslant 4-\dfrac{5}{x_k+2}<3$，即 $2\leqslant x_{k+1}<3$ 也成立.

综上可知 $2\leqslant x_n<3$ 对任意正整数恒成立.

下面证明 $x_n<x_{n+1}$.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{4x_n+3}{x_n+2}-x_n=\frac{4x_n+3-x_n^2-2x_n}{x_n+2}=\frac{-(x_n-1)^2+4}{x_n+2}$$

由 $2\leqslant x_n<3\Rightarrow 1\leqslant x_n-1<2\Rightarrow 0<-(x_n-1)^2+4\leqslant 3$，故有 $x_{n+1}-x_n>0$，即 $x_n<x_{n+1}$.

综上可知 $2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$ 恒成立.

（Ⅱ）由 $x_{n+1}=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}$得到该数列的一个特征方程 $x=\dfrac{4x+3}{x+2}$，即 $x^2-2x-3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-1$.

$\therefore x_{n+1}-3=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}-3=\dfrac{x_n-3}{x_n+2}$①　　$x_{n+1}-(-1)=\dfrac{4x_n+3}{x_n+2}+1=\dfrac{5x_n+5}{x_n+2}$②

两式相除可得$\dfrac{x_{n+1}-3}{x_{n+1}+1}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{x_n-3}{x_n+1}$，而$\dfrac{x_1-3}{x_1+1}=\dfrac{2-3}{2+1}=-\dfrac{1}{3}$

故数列$\left\{\dfrac{x_n-3}{x_n+1}\right\}$是以$-\dfrac{1}{3}$为首项，以$\dfrac{1}{5}$为公比的等比数列.

$\dfrac{x_n-3}{x_n+1}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$，故 $x_n=\dfrac{9\times 5^{n-1}-1}{3\times 5^{n-1}+1}=3-\dfrac{4}{3\times 5^{n-1}+1}$.

8.（2012 天津理）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1=b_1=2$.

$$a_4+b_4=27，S_4-b_4=10$$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记 $T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+a_{n-2}b_3+\cdots+a_1b_n$；证明：$T_n+12=-2a_n+10b_n(n\in N_+)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com