高等学校教材

# 常微分方程（第三版）简明本

王高雄 周之铭 朱思铭 王寿松 编
朱思铭 李艳会 修订

常微分方程在微积分概念出现后即已出现，发展初期是对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解，属于“求通解”时代。早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔证明里卡蒂方程不存在一般的初等解而中断，加上柯西初值问题的提出，常微分方程从“求通解”转向“求定解”时代……

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

# 常微分方程

（第三版）简明本

Changweifen Fangcheng
(Di-san Ban) Jianmingben

王高雄　周之铭　朱思铭　王寿松　编
朱思铭　李艳会　修订



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是《常微分方程(第三版)》的简明本。简明本适当精简内容、降低难度,以适应教学课时较少的院校使用。其篇幅约为第三版的三分之二。

书中主要介绍常微分方程的基础理论和基本方法,并适当补充应用实例、非线性理论和计算机应用。同时在绪论中简单介绍了常微分方程的发展历史和在数学中的地位。附录“数学软件在常微分方程中的应用”,按章给出应用数学软件进行辅助分析计算的 MATLAB 程序。

全书主要内容有:绪论、一阶微分方程的初等解法、一阶微分方程的解的存在定理、高阶微分方程、线性微分方程组、非线性微分方程、一阶线性偏微分方程。书末附有数学软件在常微分方程中的应用和部分习题答案。

本书可作为综合大学和师范院校数学与应用数学专业、师范专科学校数学系常微分方程课程的教材和参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程(第三版)简明本/王高雄等编. —北京:高等教育出版社,2013.7
ISBN 978-7-04-037373-8

Ⅰ.①常… Ⅱ.①王… Ⅲ.①常微分方程－高等学校－教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 119178 号

策划编辑 胡 颖　责任编辑 胡 颖　封面设计 张申申　版式设计 范晓红
插图绘制 宗小梅　责任校对 刘 莉　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社　咨询电话 400－810－0598
社 址 北京市西城区德外大街 4 号　网 址 http://www.hep.edu.cn
邮政编码 100120　http://www.hep.com.cn
印 刷 北京东君印刷有限公司　网上订购 http://www.landraco.com
开 本 850mm×1168mm 1/32　http://www.landraco.com.cn
印 张 9.125　版 次 2013 年 7 月第 1 版
字 数 230 千字　印 次 2013 年 7 月第 1 次印刷
购书热线 010－58581118　定 价 19.00 元


物 料 号 37373－00

# 前　言

《常微分方程》的出版经历了中国改革开放的整个时期。1978年恢复高考后，急需一批高等院校专业教材，中山大学许淞庆教授接受了编写《常微分方程》教材的任务。在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位当时的年轻教师分工编写，王高雄统合。以中山大学数学力学系周之铭编写的《常微分方程讲义》为基础，参考国内外一些同类教材，经过加工补充、反复讨论、多次修改完成。初版由南京大学主审，复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查，修改后又经主审人何崇佑复审，于1978年出版。第二版由王高雄根据高等学校理科1981至1985年教材编写规划和1980年审订的“常微分方程教学大纲”作了全面修订，于1983年出版，1987年获“第一届国家教委高等学校优秀教材一等奖”。第三版由朱思铭、王寿松、李艳会修订，朱思铭主持，于2006年出版，2007年被评为“普通高等教育精品教材”。

本书是《常微分方程(第三版)》的简明本。介绍常微分方程的基础理论和基本方法，包括一阶常微分方程的初等解法，常微分方程的解的存在唯一性、连续依赖性、可微性理论，高阶线性微分方程和线性微分方程组理论，高阶常系数线性微分方程和方程组求解方法，非线性常微分方程定性、稳定性和混沌基础，一阶线性偏微分方程基本理论等。编写过程力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；要求突出重点，论证详细明了；并注意运算技能的培养和训练，配以适当例子和习题。考虑到科学技术的迅猛发展，除传统内容外，适当补充应用实例、非线性理论和计算机应用。同时在绪论中简单介绍了常微分方程的发展历史和在数学中的地位。

相对于《常微分方程(第三版)》，本简明本适当精简内容、降低

难度，适合教学课时较少的院校使用。内容上略去“边值问题”和含参数微分方程。非线性微分方程仅介绍“定性，稳定性，混沌”。有些内容如解对初值的连续性和可微性及稳定性定理等仅作介绍而不证明。解的存在唯一性集中处理而不在线性微分方程组和非线性微分方程中重复。常微分方程的发展历史、奇解、数值解、拉普拉斯变换法、质点振动、第二宇宙速度的计算、拉普拉斯变换的应用和柯西问题为可选项。重写了附录“数学软件在常微分方程中的应用”，按章给出能应用数学软件进行辅助分析计算的MATLAB源程序。

由于目前高等院校中“常微分方程”课程教学时数的减少，需要精简教学内容。本简明本便是为此改编，其篇幅约为第三版的三分之二，适合每周3或4课时的“常微分方程”课程使用。

简明本由朱思铭、李艳会修订。

朱思铭

2013年1月于中山大学康乐园

# 目　录

# 第一章

# 绪　论

数学分析(微积分)中研究了变量的各种函数及函数的微分与积分. 如函数未知,但知道变量与函数的代数关系式,便组成代数方程,通过求解代数方程解出未知函数. 同样,如果知道自变量、未知函数及函数的导数(或微分)组成的关系式,得到的便是**微分方程**,通过求解微分方程求出未知函数. 只有一个自变量的微分方程称为**常微分方程**. 常微分方程是数学分析或基础数学的一个组成部分,在整个数学大厦中占据着重要位置.

在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中,大量存在满足常微分方程关系式的数学模型,需要我们通过求解常微分方程来了解未知函数的性质. 常微分方程是解决实际问题的重要工具.

本章先简单介绍自然界和社会科学中的几种常微分方程模型,了解构造常微分方程模型的几种方法. 同时讲述一些微分方程的基本概念及常微分方程发展历史,为后面的学习做准备.

## §1.1　常微分方程模型

这一节先介绍物理和力学中的常微分方程模型,然后讨论在社会、生物及气象中的常微分方程模型,为后面理论学习提供应用例子,同时总结出建立常微分方程模型的几种方法.

**例 1** $RLC$ 电路.

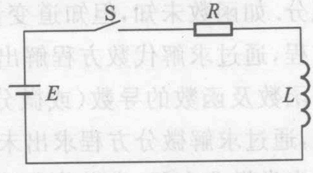
包含电阻 $R$、电感 $L$、电容 $C$ 及电源的电路称为 $RLC$ 电路，$RLC$ 电路是电子电路的基础. 根据电学知识，电流 $I$ 经过 $R$，$L$，$C$ 的电压降分别为 $RI$，$L\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{Q}{C}$，其中 $Q$ 为电量，它与电流的关系为 $I=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$，根据基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零.

由图(1.1)所示的 $RL$ 电路，设 $R$，$L$ 及电源电压 $E$ 为常数，当开关 S 合上后，存在关系式

$$E-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}-RI=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}, \tag{1.1}$$



图(1.1)

这便是 $RL$ 电路的常微分方程. 其中电流 $I$ 是自变量 $t$ 的函数 $I=I(t)$，在方程(1.1)中是未知函数. 当开关 S 刚合上即 $t=0$ 时，有 $I=0$，即

$$I(0)=0, \tag{1.2}$$

称此条件为方程(1.1)的初值条件.

如果当 $t=t_0$ 时有 $I=I_0$，而电源突然短路，即 $E=0$ 且保持不变，此时方程(1.1)变为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=0, \tag{1.3}$$

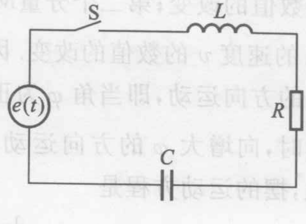
初值条件为

$$I(t_0)=I_0. \tag{1.4}$$

再看图(1.2)所示的 $RLC$ 电路，假设 $R$，$L$，$C$ 为常数，电源电

压 $e(t)$ 是时间 $t$ 的已知函数. 当开关 S 合上时有关系式

$$e(t)=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}.$$




图(1.2)

上式对 $t$ 求导数,代入 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$,便得到以时间 $t$ 为自变量、电流 $I$ 为未知函数的常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

当电源电压是常数 $e(t)=E$ 时,上述微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=0. \tag{1.6}$$

如还有 $R=0$,微分方程进一步化简为

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{LC}=0. \tag{1.7}$$

**例 2** 数学摆.

数学摆是系于一根长度为 $l$ 的线上而质量为 $m$ 的质点 $M$,在重力作用下,在垂直于地面的平面上沿圆周运动,如图(1.3)所示. 我们来确定摆的运动方程.


图(1.3)

设取逆时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 $\varphi$ 的正方向. 质点 $M$ 沿圆周的切向速度 $v$ 可以表示为 $v=l\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$. 作用于质点 $M$ 的重力 $mg$ 将摆拉回平衡位置 $A$. 把重力 $mg$ 分解为两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$,第一个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 沿半径 $OM$ 方向,与线的拉力相抵消,它不会引起质点 $M$ 的速度 $v$

的数值的改变；第二个分量$\overrightarrow{MP}$沿着圆周的切线方向，它引起质点$M$的速度$v$的数值的改变. 因为$\overrightarrow{MP}$总是使质点$M$向着平衡位置$A$的方向运动，即当角$\varphi$为正时，向减小$\varphi$的方向运动；当角$\varphi$为负时，向增大$\varphi$的方向运动，所以$\overrightarrow{MP}$的数值等于$-mg\sin\varphi$. 因此，摆的运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\varphi,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{1.8}$$

如果只研究摆的微小振动，即当$\varphi$比较小时的情况，我们可以取$\sin\varphi$的近似值$\varphi$代入方程(1.8). 这样，就得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.9}$$

如果我们假设摆是在一个黏性的介质中摆动，那么，沿着摆的运动方向就存在一个与速度$v$成比例的阻力. 如果阻力系数是$\mu$，则摆的运动方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=0. \tag{1.10}$$

如果沿着摆的运动方向恒有一个外力$F(t)$作用于它，这时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t). \tag{1.11}$$

当要确定摆的某一个特定的运动时，我们应该给出摆的初始状态：

$$当\ t=0\ 时,\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega_0, \tag{1.12}$$

这里$\varphi_0$代表摆的初始位置，$\omega_0$代表摆的初始角速度的大小.

**例 3　人口模型**[3-5]①.

英国人口统计学家马尔萨斯(Malthus)在担任牧师期间，查看了当地教堂100多年人口出生统计资料，发现了这样一个现象：人口出生率是一个常数. 1798年他发表了《人口原理》一书，其中提出了闻名于世的马尔萨斯人口模型.

他的基本假设是：在人口自然增长的过程中，净相对增长率(单位时间内人口的净增长数与人口总数之比)是常数，记此常数为 $r$(生命系数).

在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口数量 $N=N(t)$ 的增长量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t,$$

于是 $N(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN. \tag{1.13}$$

方程可用"分离变量"方法(见§2.1)解得，为

$$N=c\mathrm{e}^{rt}, \tag{1.14}$$

其中 $c$ 可以是任意常数.

如设初值条件为

$$t=t_0\text{时},\quad N(t)=N_0, \tag{1.15}$$

代入上式可得 $c=N_0\mathrm{e}^{-rt_0}$. 即方程(1.13)满足初值条件(1.15)的解为

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}. \tag{1.16}$$

如果 $r>0$，上式说明人口总数 $N(t)$ 将按指数规律无限增长. 当人口总数不大时，生存空间、资源等极充裕，人口总数指数地增长是可能的. 但当人口总数非常大时，指数增长的线性模型则不能反映这样一个事实：环境所提供的条件只能供养一定数量的人口

---

① 为书末参考文献的编号，表示其出处或有关的可参阅的书籍、文章，全书同.

生活，所以马尔萨斯模型在 $N(t)$ 很大时是不合理的.

荷兰生物学家威尔霍斯特(Verhulst)引入常数 $N_{\mathrm{m}}$(环境最大容纳量)表示自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数，并假设净相对增长率为 $r\left(1-\frac{N(t)}{N_{\mathrm{m}}}\right)$，即净相对增长率随 $N(t)$ 的增加而减少，当$N(t)\to N_{\mathrm{m}}$时，净增长率$\to 0$.

按此假定，人口增长的方程应改为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_{\mathrm{m}}}\right)N, \tag{1.17}$$

这就是**逻辑斯谛(logistic)模型**. 当 $N_{\mathrm{m}}$ 与 $N$ 相比很大时，$\frac{rN^2}{N_{\mathrm{m}}}$ 与 $rN$ 相比可以忽略，则模型变为马尔萨斯模型；但当 $N_{\mathrm{m}}$ 与 $N$ 相比不是很大时，$\frac{rN^2}{N_{\mathrm{m}}}$ 这一项就不能忽略，人口急剧增加的速率要缓慢下来.

**例 4** 两生物种群生态模型[3-5].

意大利生物学家棣安考纳(D'Ancona)发现某海港在第一次世界大战期间捕鱼量减少而捕获到的捕食鱼占的百分比却急剧增加，为解释这种现象，意大利数学家沃尔泰拉(Volterra)建立了一个关于捕食鱼与被食鱼生长情形的数学模型.

沃尔泰拉把所有的鱼分成两类：被食鱼与捕食鱼，设 $t$ 时刻被食鱼的总数为 $x(t)$，而捕食鱼的总数为 $y(t)$. 因为被食鱼所需的食物很丰富，他们本身的竞争并不激烈，如果不存在捕食鱼的话，被食鱼的增加应遵循指数增长率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax$ ($a>0$ 为某个常数，表示自然净相对增长率)，但因捕食鱼的存在，致使其增长率降低，设单位时间内捕食鱼与被食鱼相遇的次数为 $bxy$ ($b>0$ 为某个常数)，因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy.$$

类似地，沃尔泰拉认为捕食鱼的自然减少率（因缺少被食鱼）同它们存在数目 $y$ 成正比，即为 $-cy$（$c>0$ 为常数），而自然增长率则同它们本身的存在数目 $y$ 及食物——被食鱼数目 $x$ 成正比，即 $dxy$（$d>0$ 为某个常数，反映被食鱼对捕食鱼的供养能力），于是得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-c+dx).\end{cases}\tag{1.18}$$

上式表示当不存在人类捕鱼活动时，捕食鱼与被食鱼应遵循的规律，称为**沃尔泰拉被捕食-捕食模型**.

对甲、乙两种群，假设种群甲和乙的数量分别为 $x,y$，则可用下列方程表示种群甲、乙相互竞争同一资源时的生长情况：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-by),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(c-dx),\end{cases}\tag{1.19}$$

这里系数 $a,b,c,d$ 均是正数，这方程称为两种群**竞争模型**. 当系数 $b,d$ 为负数时，两种群互相促进、互为依赖，这样的方程称为**共生模型**.

更一般地，可用下列的一般方程（统称为沃尔泰拉模型）表示有相互关系的种群甲、乙的生长情况：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a+bx+cy),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(d+ex+fy),\end{cases}\tag{1.20}$$

其中系数 $a,b,c,d,e,f$ 为常数，可正可负或为 0，视两种群的相互关系而定，一般分竞争、共生、被捕食-捕食等类型. 就一个种群来说，如 $y=0$ 或 $x=0$ 种群内部存在密度制约关系时即为一维逻辑

斯谛模型.

前面两种群模型(1.19)和(1.20)都是常微分方程.与一维逻辑斯谛模型不同,模型(1.20)一般是不可积的,无法通过直接求解来了解方程的性态.在第六章中将用定性方法进行讨论.

**例 5** 洛伦茨(Lorenz)方程[19].

气象学家洛伦茨(Lorenz)在美国天气预报中心工作,进行数值天气预报.他在20世纪60年代初开始用数字计算机,曾简化气象方程组,将大气对流现象化为14个变量,最后减到12个变量.他对12个变量的微分方程组用数字计算机进行模拟计算,一小时能计算两个月的天气变化.一次偶然离开后回来时发现计算结果发生变化,重新输入计算结果又不同.反复检查原因,原来是重新输入数据的小数位尾数误差所引起,从而发现方程的解对初值敏感的现象.后来他访问另一天气中心时,了解到另有人得到了7个变量的类似的方程组.经过重新处理,他将其中4个变化不大的变量删去,得到仅含3个变量的右端非常简单的微分方程组,但其解对初值却异常敏感,他将数值计算结果发表在美国气象学报上,这3个变量的方程就是后来被称为混沌(chaos)现象第一例的有名的**洛伦茨方程**

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a(y-x),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-xz+cx-y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy-bz,\end{cases}\tag{1.21}$$

其中参数 $a=10,b=\dfrac{8}{3},c=28$.

洛伦茨方程是一个三变量的常微分方程组,对此方程的分析留在§6.3混沌中讨论.

从前面的例子大致可以看出微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的变化关系,往往与时间有关,是一个动态(力)

系统.构造常微分方程的数学模型有如下几种方法:最常用的是从物理、力学等已确定的自然规律出发,考虑其主要因素,忽略次要因素,提炼出状态变量,包括自变量和因变量(未知函数),然后应用相应的规律和实际情况,构造出自变量、未知函数及其导数的关系式,即相应的微分方程;如果没有直接的已知规律可参考,亦可利用不同现象可以具有相同的数学模型这一事实,应用类比方法,建立相应模型,例如用电路来模拟某些力学系统或机械系统;此外,还可以根据已发现的数据,通过分析数据的相互关系加上合理的逻辑推理,寻找出相关规律建立相应的模型,例如人口增长的马尔萨斯模型和逻辑斯谛模型;最后,还可以根据一定的目的,通过反复试验,寻找出适合要求的模型,例如洛伦茨模型便是从建立十多个变量的大气动力方程进行数值模仿,后来发现存在初值敏感性,而将不敏感的变量剔除,最后得到简单明了又能说明问题的三变量的洛伦茨方程,虽然它已不能直接代表原来的气象关系,但却深刻地刻画了混沌现象的本质.

从上述各种类型的例子中不难发现,完全无关的、本质上不同的模型有时可以由同类型的微分方程来描述.例如反映 $RL$ 电路中电流变化规律的方程(1.1),(1.3)及人口增长模型(1.13)都可以写成如下方程类型:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=c; \tag{1.22}$$

而 $RLC$ 电路方程(1.5),(1.6)和数学摆的强迫振动方程(1.11)属于同一类型:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=f(x); \tag{1.23}$$

又 $RLC$ 电路方程(1.7)和数学摆的微小振动方程(1.9)也属于同一类型.

两种群模型(1.18)和本书尚未介绍的传染病 SIR 模型[1]、双分子化学动力学模型[1]属于同一类型,同时由于右端变量均不含

$t$,可以将(1.18)中两方程合并为一方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}. \tag{1.24}$$

这样可将自变量为 $t$ 的两个未知函数 $x(t)$,$y(t)$ 的方程变为以 $y$ 或 $x$ 为自变量而另一个为未知函数表示的方程(1.24)求解,然后再将已知的 $x$,$y$ 的关系式代入(1.18)其中一个方程,从而得到未知函数与 $t$ 的关系式.

前面只是结合后面学习的需要介绍几个有代表性的常微分方程模型,实际上在数学模型中有各种各样的常微分方程模型,例如糖尿病检测模型、作战模型、交通模型、经济模型以及判别艺术伪造品模型等[5].

## §1.2 常微分方程的基本概念和发展历史

自变量、未知函数均为实值的微分方程称为实值微分方程,未知函数取复值或自变量及未知函数均取复值时称为复值微分方程.在本书中只讨论实值微分方程,若无特别声明,均指实变量的实值微分方程.

### 1.2.1 常微分方程的基本概念

(1) 常微分方程和偏微分方程

我们已经知道微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式.如果在微分方程中,自变量的个数只有一个,我们称这种微分方程为**常微分方程**,自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为**偏微分方程**.

方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t), \tag{1.25}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0 \tag{1.26}$$